52

MATH ECOLE

MARS 1972

11e ANNÉE

MATH ECOLE MARS 1972 11e ANNÉE 52

De l'idée d'échange à la notion de division

par Raymond Hutin, Genève

1. La notion d'échange

Le projet de programme romand pour les quatre premières années de l'école primaire, adopté par la commission CIRCE, mentionne explicitement dès la première année, dans le chapitre réservé à la numération, les *jeux d'échange.*

Les essais effectués ces dernières années montrent que cette notion est difficile et que, jusqu'à 8 ans environ, le maître est contraint de se limiter aux jeux les plus simples. Il est donc indiqué de poursuivre les activités d'échanges dans les degrés 4 et 5.

L'idée d'échange dans sa forme la plus simple apparaît relativement tôt, mais elle est généralement liée à l'affectivité ou à la perception. Il n'est pas rare de voir un enfant donner volontiers un jouet de valeur à son camarade en échange d'un bibelot sans importance dont il a fortement envie sur le moment. On sait aussi que, pendant un temps assez long, l'enfant préfère recevoir dix pièces de 10 centimes plutôt qu'une pièce d'un franc parce qu'il a le sentiment d'être plus «riche» lorsqu'il possède un plus grand nombre de pièces.

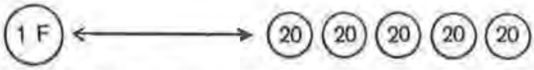
Pour que l'enfant puisse réellement aborder les jeux d'échanges, il faut qu'il ait surmonté ces problèmes d'ordre affectif ou perceptif et qu'il soit en mesure d'accepter une règle du jeu conventionnelle.

Exemples:

a) Règle d'échange □ ⟷ △△△

On en déduit que 2 carrés correspondent à 6 triangles, qu'il faut 9 triangles pour 3 carrés, etc...

Le comité de rédaction informe les lecteurs de Math-Ecole que les articles publiés n'engagent la responsabilité que de leurs auteurs.

b) Règle d'échange 

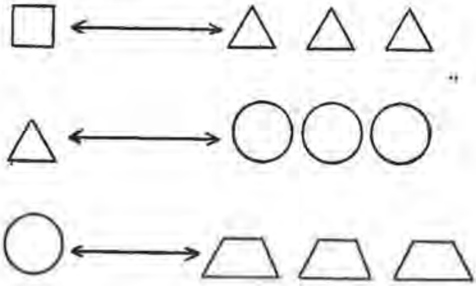
Nous avons ici une règle d'utilisation courante. Qui n'a pas eu cet échange à faire, pour utiliser un distributeur de timbres ou un parcomètre?

2. Le principe de récurrence

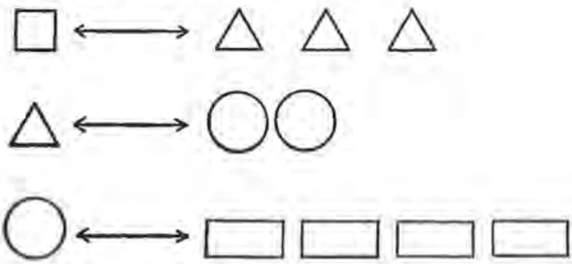
L'exploitation des jeux d'échanges prendra toute sa valeur lorsque nous serons en présence d'une règle du jeu récurrente, c'est-à-dire d'une règle dans laquelle des échanges s'effectuent toujours de la même manière.

Exemples:

a) Règle d'échange récurrente



b) Règle d'échange non récurrente



c) Règle d'échange récurrente

1 millier	=	10 centaines,
1 centaine	=	10 dizaines,
1 dizaine	=	10 unités,
1 unité	=	10 dixièmes, etc.

d) Règle d'échange non récurrente

1 semaine	=	7 jours
1 jour	=	24 heures
1 heure	=	60 minutes

Pour l'apprentissage de la numération et de la technique des opérations arithmétiques, c'est à la notion de récurrence qu'il sera constamment fait appel.

3. Domaines d'application

La notion d'échange ou de transformation par récurrence apparaît dans de nombreuses activités mathématiques.

Nous la trouverons tout d'abord dans le mécanisme de l'addition et de la soustraction avec retenue. En base dix, il s'agit de comprendre que 10 unités sont équivalentes à une dizaine, que 10 dizaines valent une centaine, et, par extension, que 30 unités peuvent être indiquées en inscrivant 3 dans la colonne des dizaines, etc...

La même notion sera présente dans la plupart des activités de mesure abordées dès la quatrième année.

On la retrouvera avec l'étude de la technique de la multiplication et de la division puis, avec un degré d'abstraction plus élevé, lorsqu'on abordera la notion de puissance.

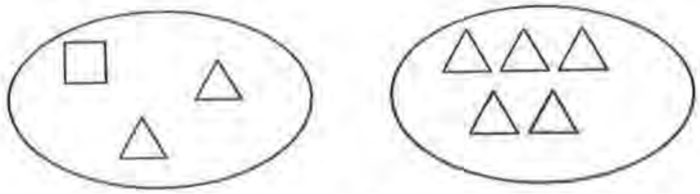
Enfin ce type de mise en correspondance de quantités devant être équivalentes mais formées d'éléments de valeur inégale apparaît dans de très nombreuses situations de la vie courante. Citons, comme seul exemple, les problèmes posés à la ménagère par les comparaisons de qualité, de prix et de quantité lors de chaque achat quotidien.

4. La notion de collections équivalentes

Il est absolument nécessaire que l'enfant comprennent bien ce que l'on entend par *équivalence*.

La notion d'équivalence est liée à celle de *règle du jeu*. Deux collections seront équivalentes *selon une certaine règle* et non selon une autre règle. En voici un exemple:

Collection A Collection B



Si la règle du jeu est: □ ⟷ △ △ △,
les collections A et B sont équivalentes;

Si la règle du jeu est: □ ⟷ △△△△,
les collections A et B ne sont pas équivalentes.

Z. P. Dienes, dans son ouvrage «Ensembles, nombres et puissances» (OCDL, Paris, 1969, p. 62) déclare:

«Il est extrêmement important que les enfants saisissent bien que lorsqu'ils emploient le terme *équivalent*, il y a quelque chose qui se conserve de l'une à l'autre des deux situations décrites comme équivalentes, mais que ce n'est pas toujours la même chose qui se conserve. Avec les nombres orientés, les fractions, etc., les enfants rencontreront d'autres types d'équivalences, et c'est alors qu'ils tireront tout le profit d'avoir, antérieurement, discuté de ce que signifie une équivalence, et d'avoir rencontré sur leur chemin un certain nombre de types différents d'équivalences.»

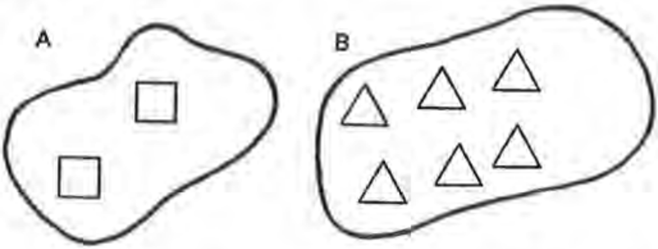
Une des difficultés de la notion d'échange provient donc du fait que l'enfant est contraint de formuler une hypothèse:

— *Si* la règle d'échange permet de faire correspondre un carré à trois triangles, *alors* les collections A et B ci-dessus sont équivalentes.

5. Comparaison de collections

Les premiers exercices auront pour objectif de faire comprendre à l'enfant qu'une règle d'échange est forcément arbitraire et qu'elle résulte d'un choix, d'une convention.

Proposons par exemple aux élèves deux collections d'objets de deux sortes différentes:



Nous décidons que ces deux collections sont équivalentes. Quelle déduction peut-on en tirer?

— La règle d'échange choisie est donc: «un carré vaut trois triangles».

Présentons les deux mêmes collections et cherchons une règle d'échange pour laquelle ces collections ne soient pas équivalentes.

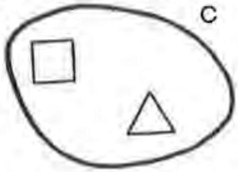
— Les enfants découvriront que n'importe quelle règle, à l'exception de l'échange «un contre trois», peut s'appliquer.

Sur la base de cette idée de comparaison et de choix d'une règle d'échange, de nombreux jeux et exercices peuvent être développés. Ils auront tous pour but la prise de conscience que l'équivalence dépend d'une règle préalablement fixée. Aussi longtemps que les enfants n'auront pas parfaitement assimilé cette notion, il faudra constamment avoir recours à la manipulation d'objets concrets: d'abord pour effectuer la mise en correspondance permettant de résoudre le problème, plus tard pour vérifier la réponse donnée à partir d'une représentation graphique des mêmes éléments.

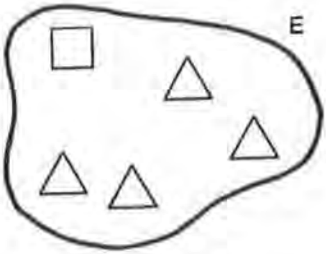
Exercices

Règle: □ ⟷ △△△

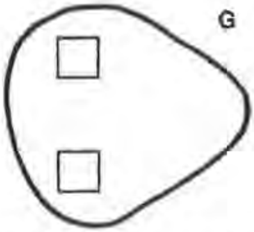
a) *Former une collection équivalente ou non-équivalente.*



Former une collection D
équivalente à C.

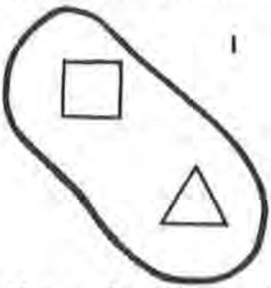


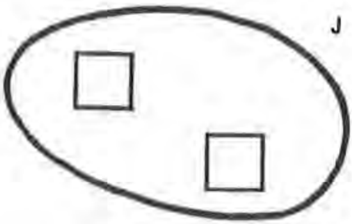
Former une collection F
équivalente à E.



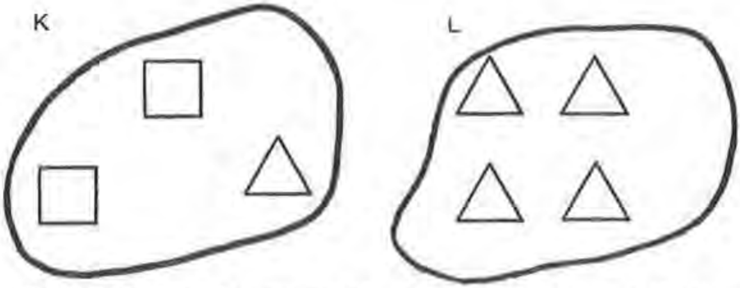
Former une collection H
qui ait moins de valeur
(ou plus de valeur) que G.

b) *Modifier une collection.*





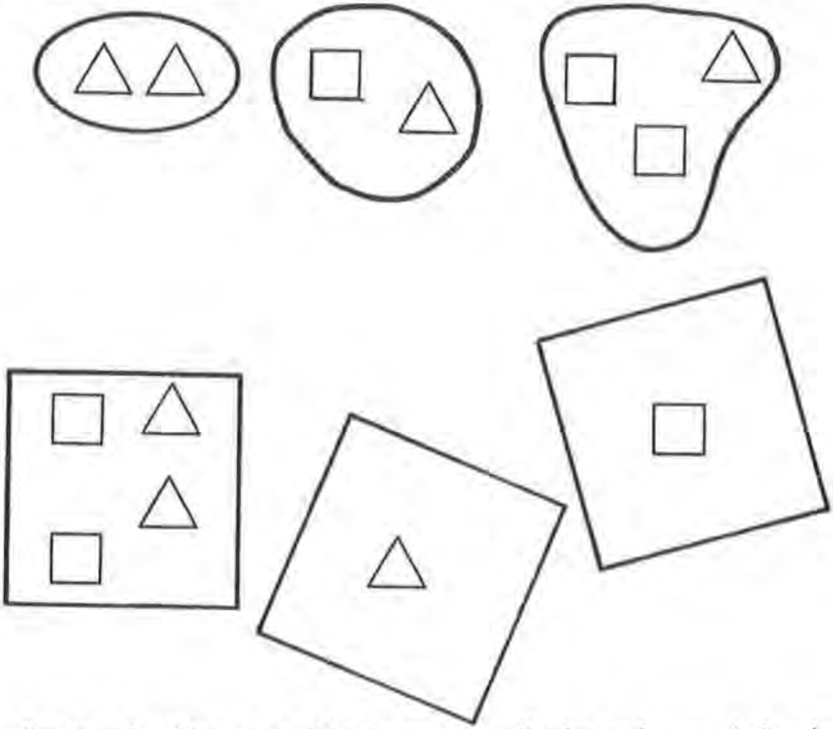
Ajouter des éléments à I ou à J pour que les deux collections soient équivalentes.



Modifier la collection K pour qu'elle soit équivalente à la collection L.

c) *Sérier une suite de collections.*

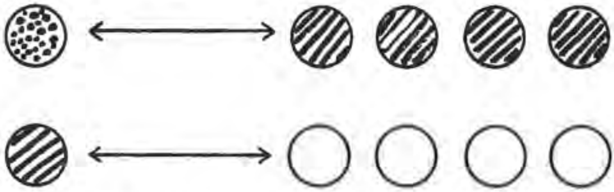
Placer dans l'ordre, de celle qui vaut le plus à celle qui vaut le moins, les collections suivantes:



Lorsque la sériation est faite, trouver la collection qui pourrait être intercalée dans la série.

Les exercices qui précèdent peuvent déjà être abordés avec de jeunes enfants pourvu que ceux-ci possèdent suffisamment la notion de conservation. En revanche, la difficulté sera considérablement accrue lorsque l'exercice portera sur une double, voire une triple règle d'échange.

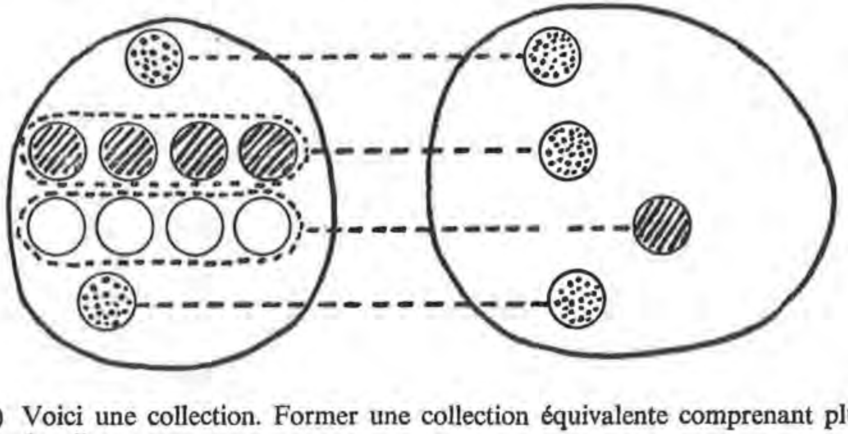
Voici une règle d'échange:



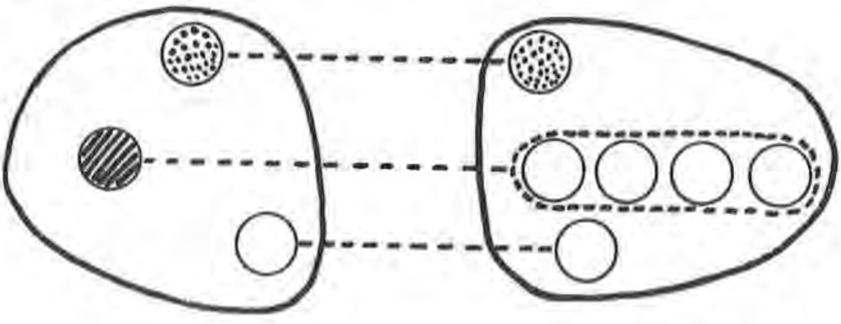
Il s'agit pour les élèves de former une collection équivalente, d'abord librement puis avec des contraintes:
— collection comprenant plus de pièces;
— collection comprenant moins de pièces;
— collection comprenant des pièces d'une seule sorte;
— collection comprenant le moins de pièces possible.

Exemples:

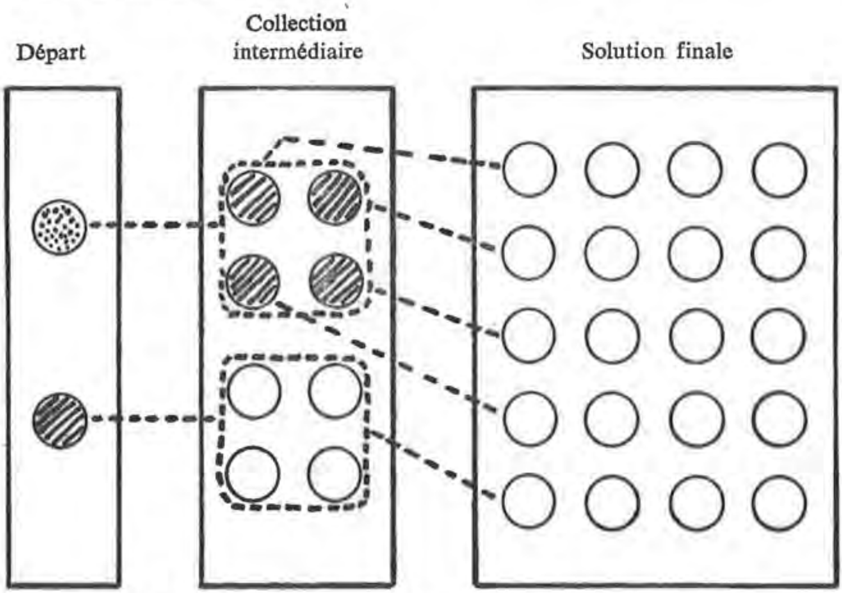
a) Voici une collection. Former une collection équivalente comprenant moins de pièces.



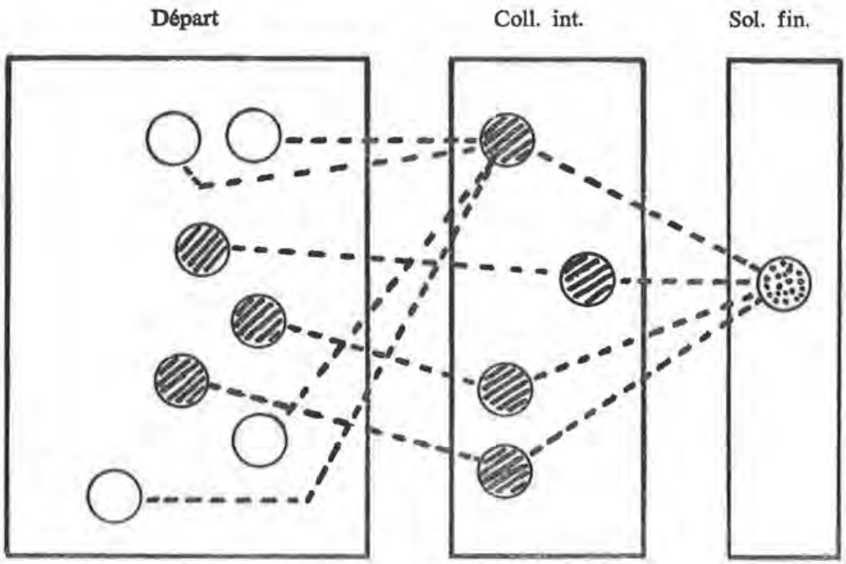
b) Voici une collection. Former une collection équivalente comprenant plus de pièces.



c) Voici une collection. Former une collection équivalente comprenant le plus de pièces possible.



d) Voici une collection. Former une collection équivalente comprenant le moins de pièces possible.



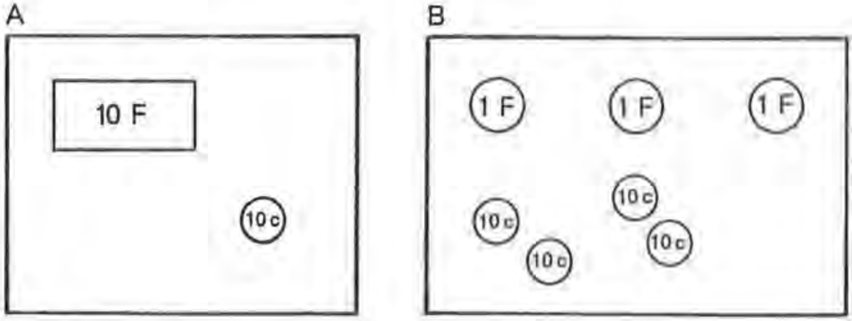
Remarque

Un premier examen pourrait laisser croire que la notion d'échange est relativement facile. Parmi les nombreuses constatations effectuées dans les classes, nous citerons deux exemples significatifs de la difficulté que représente l'idée d'équivalence.

Premier exemple:

Dans une classe d'élèves de 9-10 ans dont la majorité n'a pas reçu un enseignement de mathématique, dite moderne, les années précédentes.

Situation proposée:



Q. — Quel porte-monnaie contient le plus?

R. — Il faut compter.

Q. — Pourrait-on échanger notre fortune contre des pièces de 10 centimes? Les élèves trouvent 101 et 34 pièces.

Q. — Quel porte-monnaie contient le plus?

R. — *Si on fait l'échange*, c'est le A.

Q. — Combien contient le premier porte-monnaie?

R. — 10 F 10.

Q. — Et le second?

R. — 3 F 40.

Un élève. — 10 F 10 c'est plus que 3 F 40.

Q. — Observez les deux porte-monnaie dessinés au tableau noir (A et B), lequel contient le plus d'argent?

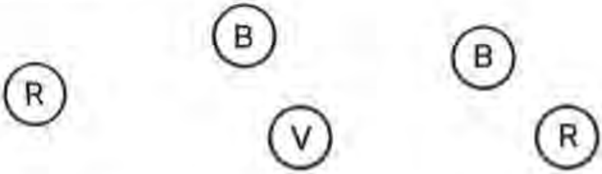
R. — Pour le savoir il faudrait échanger.

On voit combien, à propos d'une situation qui semble pourtant bien connue des enfants, il y a conflit entre le raisonnement et la perception des éléments.

Deuxième exemple:

Dans une classe d'élèves de 10-11 ans qui ont reçu un enseignement de mathématique, dite moderne, mais n'ont guère travaillé les échanges.

Situation proposée:



Q. — Voici des ballons de différentes couleurs. Ils ne coûtent pas tous le même prix. Pourrait-on établir une règle d'équivalence, une règle d'échange?

R. — On pourrait échanger un ballon vert contre un bleu et un rouge.

L'idée émise est représentée au tableau noir.

Q. — Des trois ballons, lequel vaut le plus?

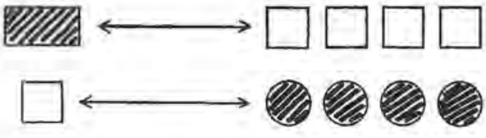
Cette question se révèle embarrassante pour tous les élèves. Ce n'est qu'après une longue confrontation des points de vue qu'une partie des enfants seulement admet que le ballon vert vaut obligatoirement plus que le rouge ou que le bleu.

6. Construction d'une série de collections équivalentes

Après avoir effectué de nombreuses comparaisons entre deux collections, l'enfant pourra aborder la recherche de *toutes* les collections équivalentes à une certaine donnée. Cette recherche se fera d'abord empiriquement, sans ordre établi.

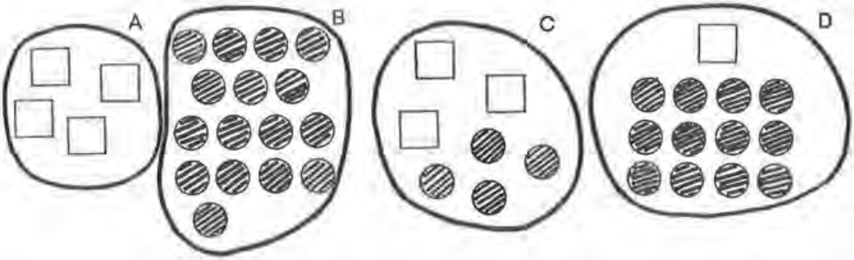
Exemple:

Règle:



Problème: Trouver des collections d'éléments équivalentes à un rectangle.

Réponses données par les élèves:



Q. — Avons-nous trouvé toutes les réponses?

Cette question amène l'idée d'ordre. Les enfants passent sans difficulté de la manipulation des éléments à la désignation de leur nombre.

Nous avons trouvé:

□	●
4	0
0	16
3	4
1	12

Q. — Essayons d'inscrire, dans un autre ordre, ce qui a été trouvé. Pouvons-nous obtenir quelque chose de mieux ordonné?

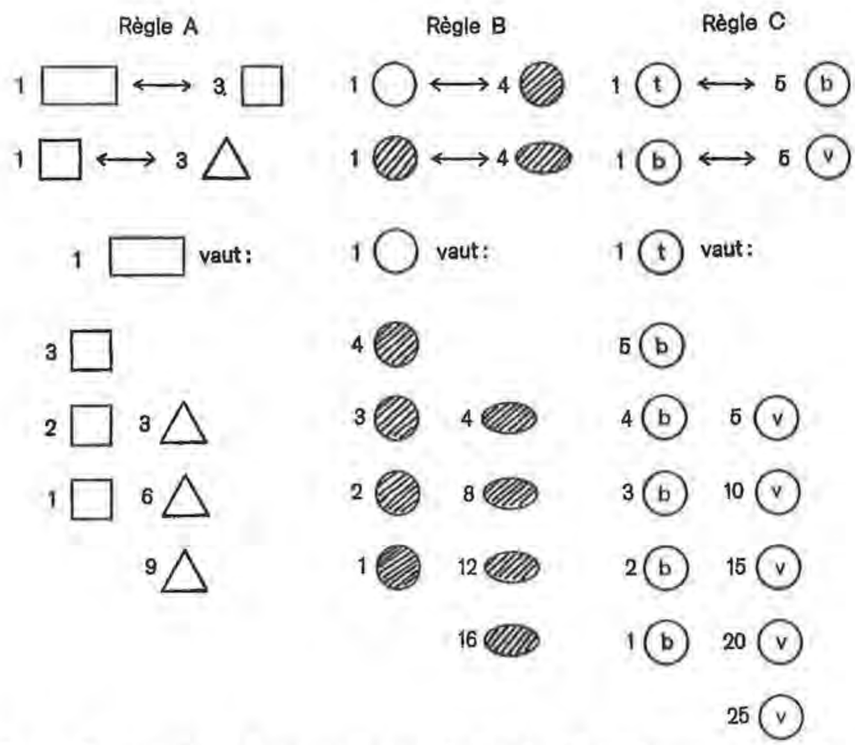
□	●			
4	0			
3	4			
		←	2	8
1	12			
0	16			

La mise en ordre du tableau suggère aux enfants la réponse manquante. Une vérification par manipulation en apporte la confirmation.

A partir d'exercices de ce type, des observations plus détaillées pourront être effectuées lorsque les enfants seront en mesure de travailler sur le nombre des éléments entrant en jeu, sans le support direct du matériel.

Exemple:

Comparaison à propos de règles différentes.



Q. — Pourra-t-on, à l'avance, prévoir le nombre des réponses si la règle est 1 contre 6; 1 contre 7; 1 contre 10?

7. Remarques à propos du support matériel

Les exercices présentés ci-dessus peuvent être réalisés concrètement par la manipulation de toutes sortes de matériels: objets quelconques, formes diverses découpées dans du carton, jetons de couleurs différentes, blocs multibases, réglettes Cuisenaire, etc. Ce qui importe, c'est que l'enfant comprenne que l'équivalence est déterminée par une décision arbitraire, par une convention, par une règle du jeu adoptée pour un moment.

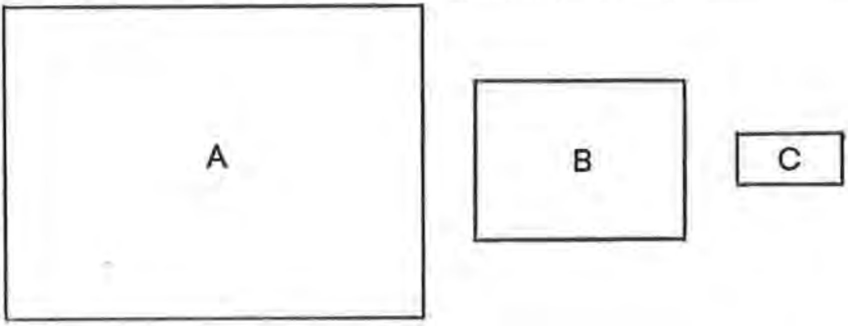
La réalisation de la même série d'exercices par ces groupes d'élèves utilisant chacun un matériel différent constitue une manière de faire intéressante. Elle permet, au moment de la discussion générale, de comparer les travaux de chaque groupe et de dégager les règles générales d'une manière plus sûre.

Il convient de veiller à ce que la situation perceptive n'amène pas l'enfant à une sorte de conditionnement. On évitera, par exemple, que l'élément ayant la valeur la plus haute soit toujours le plus grand de la collection.

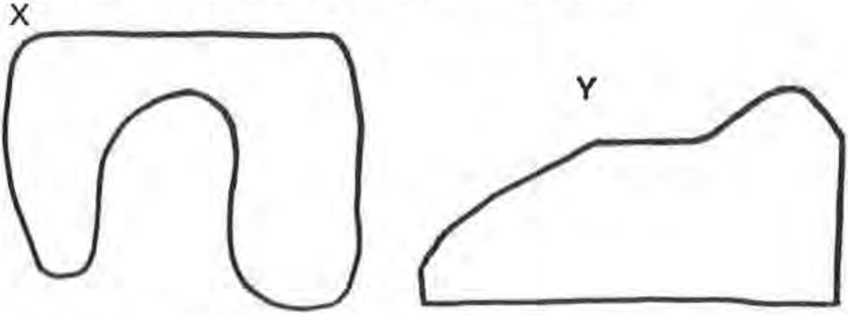
8. Echanges à propos des mesures

La notion de mesure, et plus particulièrement la mesure des surfaces, donne l'occasion d'effectuer des exercices d'échanges intéressants. En voici un exemple:

Pour comparer la dimension de deux surfaces, on dispose d'un nombre limité de rectangles de carton de trois tailles différentes.

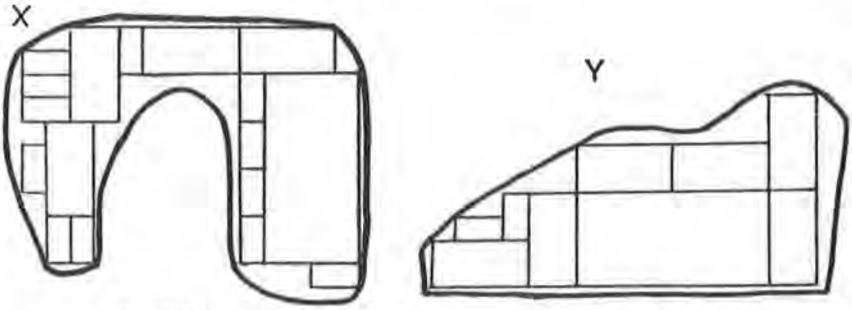


Les surfaces à comparer sont découpées dans du papier.



La mesure s'effectue a) par défaut; b) par excès.

a) par défaut



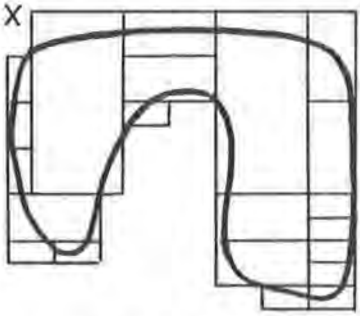
1 A; 4 B; 12 C

1 A; 6 B; 2 C

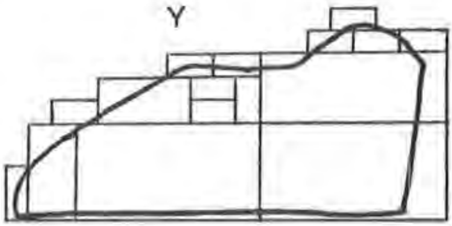
En effectuant les échanges pour obtenir le moins d'éléments possible, on obtient:

2 A; 3 B; 0 C — 2 A; 2 B; 2 C

b) par excès



2 A; 7 B; 12 C



3 A; 2 B; 11 C

Effectuons les échanges:

4 A; 2 B; 0 C — 4 A; 0 B; 3 C

Nous parvenons ainsi à:

2 A; 3 B; 0 C $<$ Aire de X $<$ 4 A; 2 B; 0 C
2 A; 2 B; 2 C $<$ Aire de Y $<$ 4 A; 0 B; 2 C

Dans la discussion de cette comparaison on pourra conclure que Y semble plus petit que X. Néanmoins, les enfants observeront certainement l'imprécision de la mesure et suggéreront peut-être de recourir à des unités de mesure encore plus petites.

Par analogie, des échanges similaires pourront intervenir à propos des mesures de longueur, de masse, de capacité, de temps, etc...

9. Addition et soustraction par les jeux d'échanges

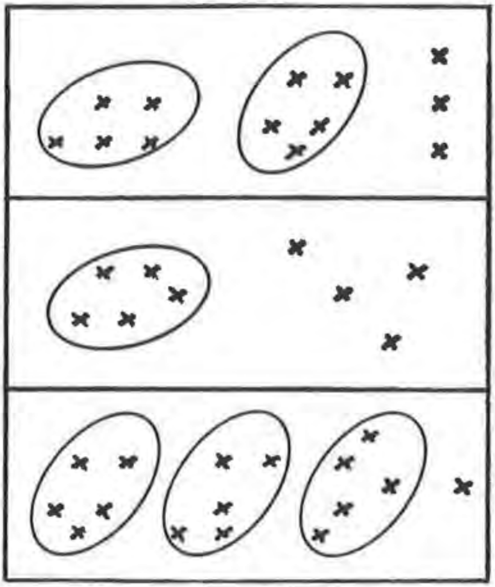
Revenons brièvement sur une notion déjà travaillée en troisième année, mais qu'il n'est pas inutile de reprendre en quatrième et même en cinquième année. Trop souvent, en effet, on considère que la soustraction est assimilée au terme de la troisième année et qu'il n'y a pas lieu de retravailler cet algorithme. C'est une des raisons pour lesquelles la soustraction pose des problèmes à de nombreux élèves âgés de plus de 12 ans.

Afin de mieux mettre en évidence les notions à assimiler, il est utile d'effectuer la même opération par les groupements et par les échanges ainsi que, dans ce dernier cas, de varier le contenu sur lequel portera l'opération.

Exemples:

a) *Addition*

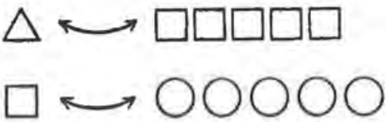
Groupements:

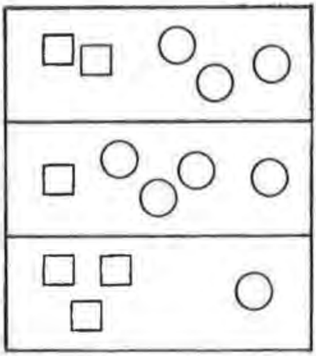


base cinq

	2	3
	1	4
+	3	1
1	2	3

Echanges: Règle d'échange





	△	□	○
		2	3
		1	4
+		3	1
	1	2	3

Ou bien

Règle d'échange $\quad 1\ P \equiv 5\ S$

$\qquad\qquad\qquad\quad 1\ S \equiv 5\ T$

Voici trois collections:

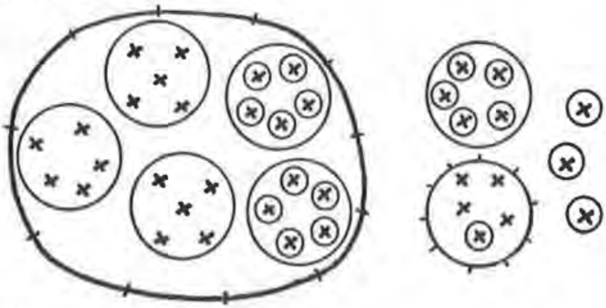
1) 2 S, 3 T $\qquad$ 2) 1 S, 4 T $\qquad$ 3) 3 S, 1 T

Trouver une collection équivalente à la somme des trois précédentes, qui comprenne le moins de lettres possible:

	P	S	T
		2	3
		1	4
+		3	1
	1	2	3

b) *Soustraction*

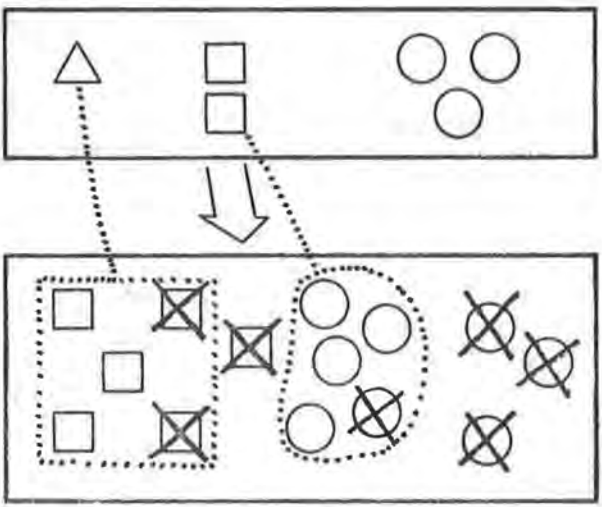
Groupements à défaire:



Base cinq

	1	2	3
−		3	4
		3	4

Echanges:



1 $\quad$ 2 $\quad$ 3

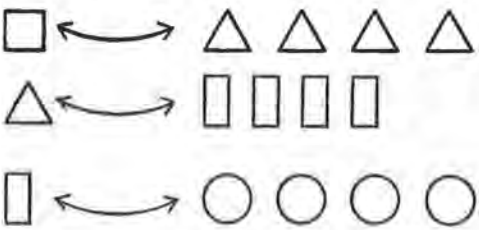
−	3	4
	3	4

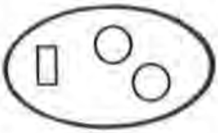
Il convient de noter que la soustraction par les échanges figure déjà au programme de troisième année. Cependant, il s'avère que la plupart des élèves de ce degré n'ont pas encore une compréhension suffisante de la notion d'échange pour en tirer parti. Il faut donc, de temps en temps, reprendre ce type d'exercice aussi bien en cinquième qu'en quatrième année afin de consolider la maîtrise de la soustraction.

10. La technique de la multiplication au moyen des échanges

L'une des approches de la multiplication en tant que mécanisme peut être l'addition, avec échanges, de collections composées des mêmes éléments.

Prenons, par exemple, la règle d'échange:



La collection constituée est 

Nous la prenons:	Eléments de chaque sorte:			Collection réduite au nombre minimum d'éléments:			
	△	▯	○	□	△	▯	○
Une fois		1	2			1	2*
Deux fois		2	4			3	0**
Trois fois		3	6		1	0	2
Quatre fois		4	8		1	2	0*
Cinq fois		5	10		1	3	2
Six fois		6	12		2	1	0
Sept fois		7	14		2	2	2
Huit fois		8	16		3	0	0**

Par une observation bien conduite, l'enfant sera amené à comparer les résultats marqués d'un ou de deux astérisques.

Cette observation se poursuivra dans d'autres situations.

Exemples:

Collection de départ: 1 3 2

Règle: 1 contre 4

Une fois	1;	3;	2		
Deux fois	2;	6;	4	≡	3; 3; 0
Trois fois	3;	9;	6	≡	1; 1; 2; 2
Quatre fois	4;	12;	8	≡	1; 3; 2; 0
Cinq fois	5;	15;	10	≡	2; 1; 1; 2
Six fois	6;	18;	12	≡	2; 3; 1; 0
Sept fois	7;	21;	14	≡	3; 1; 0; 2
Huit fois	8;	24;	16	≡	3; 3; 0; 0
Neuf fois	9;	27;	18	≡	1; 0; 0; 3; 2
Dix fois	10;	30;	20	≡	1; 0; 2; 3; 0

Règle: 1 contre 5

Une fois	1;	3;	2		
Deux fois	2;	6;	4	≡	3; 1; 4
Trois fois	3;	9;	6	≡	1; 0; 0; 1
Quatre fois	4;	12;	8	≡	1; 1; 3; 3
Cinq fois	5;	15;	10	≡	1; 3; 2; 0
Six fois	6;	18;	12	≡	2; 0; 0; 2
Sept fois	7;	21;	14	≡	2; 1; 3; 4
Huit fois	8;	24;	16	≡	2; 3; 2; 1
Neuf fois	9;	27;	18	≡	3; 0; 0; 3
Dix fois	10;	30;	20	≡	3; 1; 4; 0

Règle: 1 contre 3

Une fois	1;	3;	2	≡	2; 0; 2
Deux fois	2;	6;	4	≡	1; 1; 1; 1
Trois fois	3;	9;	6	≡	2; 0; 2; 0
Quatre fois	4;	12;	8	≡	2; 2; 2; 2
Cinq fois	5;	15;	10	≡	1; 0; 2; 0; 1
Six fois	6;	18;	12	≡	1; 1; 1; 1; 0
Sept fois	7;	21;	14	≡	1; 2; 0; 1; 2
Huit fois	8;	24;	16	≡	1; 2; 2; 2; 1
Neuf fois	9;	27;	18	≡	2; 0; 2; 0; 0
Dix fois	10;	30;	20	≡	2; 1; 1; 0; 2

Règle: 1 contre 10

Une fois	1;	3;	2	≡	
Deux fois	2;	6;	4	≡	
Trois fois	3;	9;	6	≡	
Quatre fois	4;	12;	8	≡	5; 2; 8
Cinq fois	5;	15;	10	≡	6; 6; 0
Six fois	6;	18;	12	≡	7; 9; 2
Sept fois	7;	21;	14	≡	9; 2; 4
Huit fois	8;	24;	16	≡	1; 0; 5; 6
Neuf fois	9;	27;	18	≡	1; 1; 8; 8
Dix fois	10;	30;	20	≡	1; 3; 2; 0

Cette recherche, qui exige une intense activité de calcul, sera de préférence effectuée par des groupes d'élèves travaillant sur des données de départ différentes.

La confrontation des résultats obtenus permettra peu à peu une prise de conscience de ce qui se passe lorsqu'on multiplie un nombre quelconque:

a) par la base;
b) par un multiple de la base;
c) par une puissance de la base;

ainsi:

En *base quatre:* quatre s'écrit 1 0
huit s'écrit 2 0

Donc:

$$\begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 1\,0 \\ \hline 1\,3\,2\,0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 3\,3\,0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 2\,0 \\ \hline 3\,3\,0\,0 \end{array}$$

En *base cinq:* cinq s'écrit 1 0
dix s'écrit 2 0

Donc:

$$\begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 1\,0 \\ \hline 1\,3\,2\,0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 2 \\ \hline 3\,1\,4 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 2\,0 \\ \hline 3\,1\,4\,0 \end{array}$$

En *base trois:* trois s'écrit 1 0
six s'écrit 2 0
neuf s'écrit 1 0 0

Donc:

$$\begin{array}{r} 2\,0\,2 \\ \times\ \ 1\,0 \\ \hline 2\,0\,2\,0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 2\,0\,2 \\ \times\ \ \ \ 2 \\ \hline 1\,1\,1\,1 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 2\,0\,2 \\ \times\ \ \ 2\,0 \\ \hline 1\,1\,1\,1\,0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 2\,0\,2 \\ \times\ \ 1\,0\,0 \\ \hline 2\,0\,2\,0\,0 \end{array}$$

En *base dix:* dix s'écrit 1 0
cent s'écrit 1 0 0
mille s'écrit 1 0 0 0

Donc:

$$\begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 1\,0 \\ \hline 1\,3\,2\,0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 1\,0\,0 \\ \hline 1\,3\,2\,0\,0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 1\,0\,0\,0 \\ \hline 1\,3\,2\,0\,0\,0 \end{array}$$

trois s'écrit 3
trente s'écrit 3 0
trois cents s'écrit 3 0 0

Donc:

$$\begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 3\,9\,6 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 3\,0 \\ \hline 3\,9\,6\,0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\,3\,2 \\ \times\ \ 3\,0\,0 \\ \hline 3\,9\,6\,0\,0 \end{array}$$

Par la suite, on arrivera à la multiplication par un nombre de deux chiffres.

En *base quatre:* six s'écrit 1 2

Six fois 1 3 2 = Quatre fois 1 3 2 + deux fois 1 3 2

$$\begin{array}{r} 1\ \ 3\ \ 2 \\ \times\ \ \ \ 1\ \ 0 \\ \hline 1\ \ 3\ \ 2\ \ 0 \end{array}\ -\ \begin{array}{r} 1\ \ 3\ \ 2 \\ \times\ \ \ \ 2 \\ \hline 3\ \ 3\ \ 0 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\ \ 3\ \ 2 \\ \times\ \ \ \ 1\ \ 2 \\ \hline 3\ \ 3\ \ 0 \\ (+)\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 0 \\ \hline 2\ \ 3\ \ 1\ \ 0 \end{array}$$

En *base cinq:* sept s'écrit 1 2

Sept fois 1 3 2 = Cinq fois 1 3 2 + deux fois 1 3 2

$$
\begin{array}{r}
1\ 3\ 2 \\
\times\quad 1\ 0 \\
\hline
1\ 3\ 2\ 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\ 3\ 2 \\
\times\quad\ \ 2 \\
\hline
3\ 1\ 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\ 3\ 2 \\
\times\quad 1\ 2 \\
\hline
3\ 1\ 4 \\
(+)\ 1\ 3\ 2\ 0 \\
\hline
2\ 1\ 3\ 4
\end{array}
$$

En *base dix:* douze s'écrit 1 2

Douze fois 1 3 2 = Dix fois 1 3 2 + deux fois 1 3 2

$$
\begin{array}{r}
1\ 3\ 2 \\
\times\quad 1\ 0 \\
\hline
1\ 3\ 2\ 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\ 3\ 2 \\
\times\quad\ \ 2 \\
\hline
2\ 6\ 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1\ 3\ 2 \\
\times\quad 1\ 2 \\
\hline
2\ 6\ 4 \\
(+)\ 1\ 3\ 2\ 0 \\
\hline
1\ 5\ 8\ 4
\end{array}
$$

De nombreux exercices similaires feront découvrir à l'enfant que la règle est valable dans n'importe quelle circonstance.

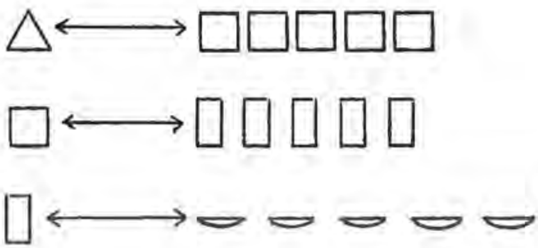
On veillera cependant à ne pas considérer la multiplication dans des bases autres que dix comme un but en soi, mais bien comme un outil destiné à faire mieux comprendre la technique de cette opération en base dix.

11. La division

La division pourra être préparée de la même manière. Il n'est pas nécessaire d'attendre que la multiplication soit assimilée pour aborder cette opération. Bien au contraire, la division sous forme d'échange travaillée parallèlement à la multiplication permettra une meilleure structuration des deux opérations.

Exemple:

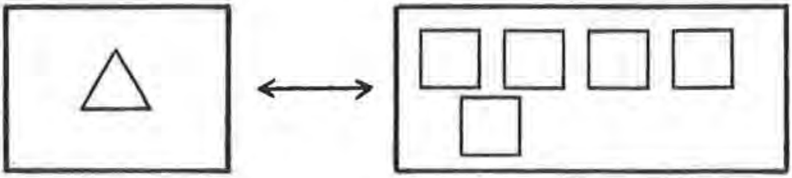
Règle d'échange:



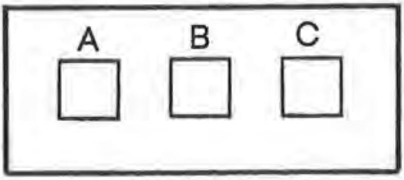
Comment partager l'équivalent d'un triangle en trois parties de même valeur?

Etape I

Etape II

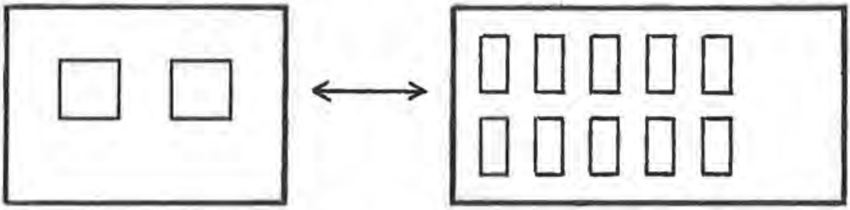


Etape III, premier partage

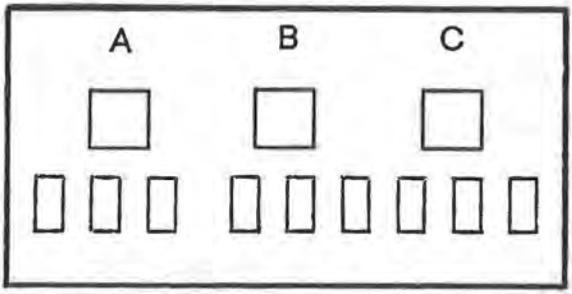


Il reste 2 carrés. Ceux-ci sont échangés contre des rectangles.

Etape IV

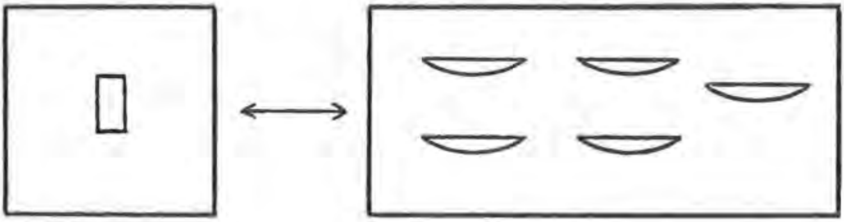


Etape V, suite du partage

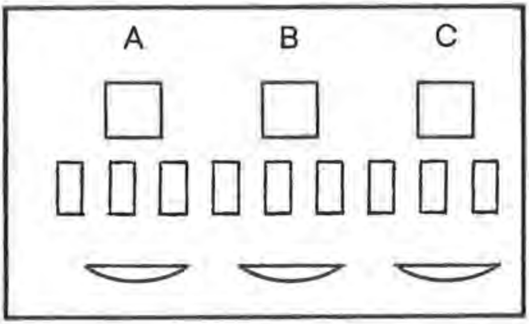


Il reste un rectangle. On effectue un nouvel échange

Etape VI

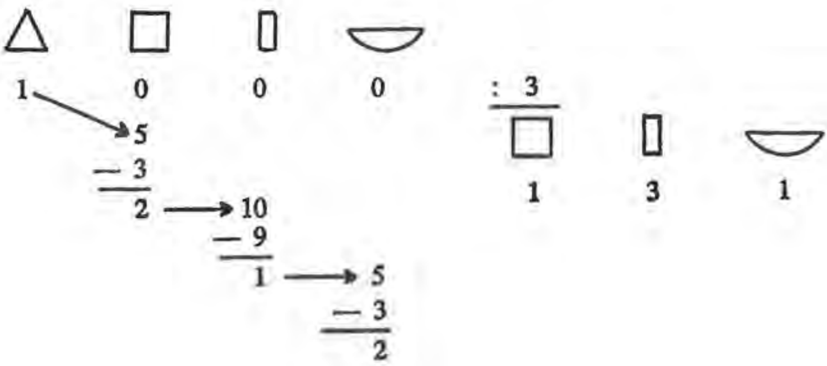


Etape VII, troisième partage



Il reste encore quelque chose qui ne peut être partagé.

Après la manipulation, on pourra aborder une représentation; par exemple:

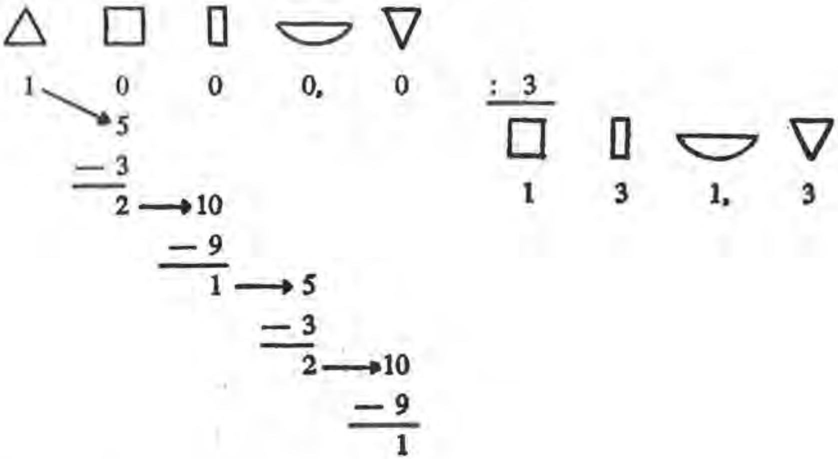


Remarque: Nous avons ici un excellent moyen pour une prise de conscience de la notion de nombre à virgule.

— Il faut «allonger» la règle, propose un élève.

Un nouvel échange est proposé:

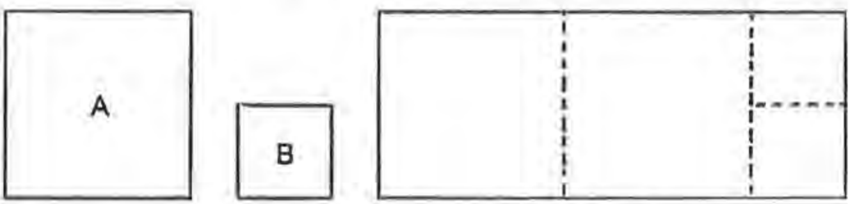
Pour indiquer la limite de ce qui était possible avec l'ancienne règle, on utilise une virgule de séparation soit:



De même, à propos des mesures de surfaces, l'unité de mesure choisie pourra être partagée en fonction de la base pour arriver à une division plus fine.

Exemple:

Une figure rectangulaire a pour mesure:



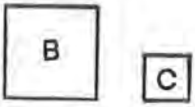
2 A , 2 B

Comment la partager en trois parties égales?

$$
\begin{array}{cc|l}
A & B & \\
2 \searrow & 2 & :3 \\
 & +8 & B \\
 & 10 & 3 \\
 & -9 & \\
 & 1 &
\end{array}
$$

Il reste 1 B

Introduisons une division de B en 4 parties



d'où

$$
\begin{array}{ccc|cc}
A & B & C & & \\
2 \searrow & 2 & 0 & :3 & \\
 & 10 & & B & C \\
 & -9 & & 3 \; , & 1 \\
 & 1 \longrightarrow & 4 & & \\
 & & -3 & & \\
 & & 1 & &
\end{array}
$$

12. Conclusion

La notion d'échange se retrouve ainsi dans de nombreuses situations mathématiques. Les élèves la rencontreront, par la suite, dans d'autres activités, par exemple, les calculs portant sur les heures ou les degrés.

Il convient donc de lui accorder toute l'importance qu'elle mérite en veillant à ne jamais brûler les étapes, en ayant recours aussi longtemps qu'elle est nécessaire à la manipulation d'objets concrets, en liant constamment manipulation, codage, décodage et description verbale de la situation.

Relations et élections

«Un Etat n'est pas une mécanique, c'est un corps vivant, irrigué par des milliers de RELATIONS individuelles qui, s'additionnant, forment des courants forts et profonds.»

Claude Monnier [1]

Outre mes fonctions de maître d'application et de méthodologie, j'ai la chance d'assumer également celles de maître d'instruction civique à l'Ecole normale et à l'Ecole professionnelle commerciale de Porrentruy.

Je dis bien, *la chance*, car je ne connais point d'enseignement où il faille être tout à la fois féru d'actualités, concret, idéaliste — pourquoi pas? —, européen convaincu, onusien si possible et bien entendu compréhensif, tolérant, voire délicat. Les jeunes veulent d'abord tout flanquer par terre, puis, lentement, leur soif de connaître et leur désir de participer à la construction du monde se font pressants, exigeants.

Encore faut-il avoir de bons outils pour un enseignement de ce genre. La projection, les schémas, les diagrammes sont les bienvenus. Dans un numéro de Math-Ecole [2], j'ai relevé combien les *ensembles* facilitaient la compréhension d'un thème aussi important que celui des institutions européennes, pour ne citer que celui-là.

Je voudrais traiter, cette fois, une nouvelle façon d'aborder le fameux «carré magique» des pouvoirs et des autorités. Pierre angulaire de notre système démocratique, tableau au nom poétique de synoptique, fidèle compagnon des écoles complémentaires du soir, avec le «Jeune Citoyen» de sympathique mémoire. Que de bêtises n'avons-nous pas entendues, mes chers collègues! Qui magnifiera un jour la complainte du régent face à la sempiternelle confusion entre le Conseil d'Etat et le Conseil des Etats entraînant, *ipso facto*, celle des pouvoirs? Et chaque année la même chanson: «La politique, à quoi ça sert? On n'y comprend rien. A part les rouges et les noirs!» [3]

Certaines années sont pourtant fastes pour l'éducation civique. 1971 fut assurément de celles-là, notamment dans le Jura, où la campagne pour les élections au Conseil national fut assez vive. A cette occasion, dans toute la Romandie, nos jeunes ont bénéficié des explications des parents, ils se sont familiarisés avec les listes et leurs dénominations; on aura rempli des bulletins de vote en classe, peut-être aura-t-on dépouillé un scrutin. Ils auront même eu leur petite heure de gloire à l'annonce des résultats, ayant fini par être partisans.

Tout cela est bel et bon. Mais la fièvre électorale passée, les retombées en classes sont plutôt radio-passives. Mélangez conseillers nationaux, députés au

Grand Conseil, juges et membres du gouvernement, et l'hésitation reprend ses droits... à vous fendre le cœur du plus fidèle des républicains.

J'ai mis longtemps à comprendre que, par suite de non-participation aux diverses votations et élections [4], nos jeunes voient les choses par le dehors au lieu de les comprendre par le dedans. C'est pourquoi nos théories, classements, comparaisons et autres savantes explications truffées du nécessaire jargon civique, tout cela, c'est du ressassé qui ne porte pas, du figé, du statique. Il y manque une sève, *la vie.*

☆ ☆ ☆

Celle-ci est entrée dans la classe brusquement, à la faveur d'une question que j'ai posée comme ça, presque par hasard, pour renverser la vapeur, parce que je fatiguais de prêcher dans le désert: «Si vous vouliez devenir conseiller national...!» Quelle idée! Après un grand éclat de rire, les langues se sont déliées: «Il faut d'abord militer dans un parti, savoir prononcer un discours, participer à la campagne électorale. Puis le jour des votations arrive. Enfin, on est élu... à telle autorité. Donc, on est au pouvoir... et on fête ça!

— Bravo pour la reconstitution du scénario. Si nous passions maintenant à la bande dessinée non pas de votre rêve, mais des dernières élections par exemple (cf. schéma sagittal ci-contre). Soit E l'ensemble des électeurs des divers partis, C l'ensemble des citoyens élus. Que se passe-t-il entre la séquence E et la séquence C? Quel lien, quelle relation entre les deux?

— Les électeurs démocrates-chrétiens ont élu Monsieur Jean Wilhelm, les radicaux ont élu Monsieur Simon Kohler...[5]

— Pour simplifier les affaires, symbolisons vos phrases par des flèches. Chaque flèche, à elle seule, précise bien la relation entre les deux ensembles. Quelle est leur signification?

— «*...ont élu...*»

— ... que je représente par $\mathscr{E}$ puisqu'il s'agit d'élections (cf. schéma).

☆ ☆ ☆

— Quelle sera la séquence suivante?

— A, soit l'ensemble des autorités (cf. schéma).

— Tracez les flèches nécessaires entre C et A. Comment définir cette nouvelle relation?

— Monsieur Kohler «s'installe au» Conseil d'Etat et au Conseil national (deux flèches), Monsieur Wilhelm «rejoint» le Conseil national (Ah! le mot propre)...

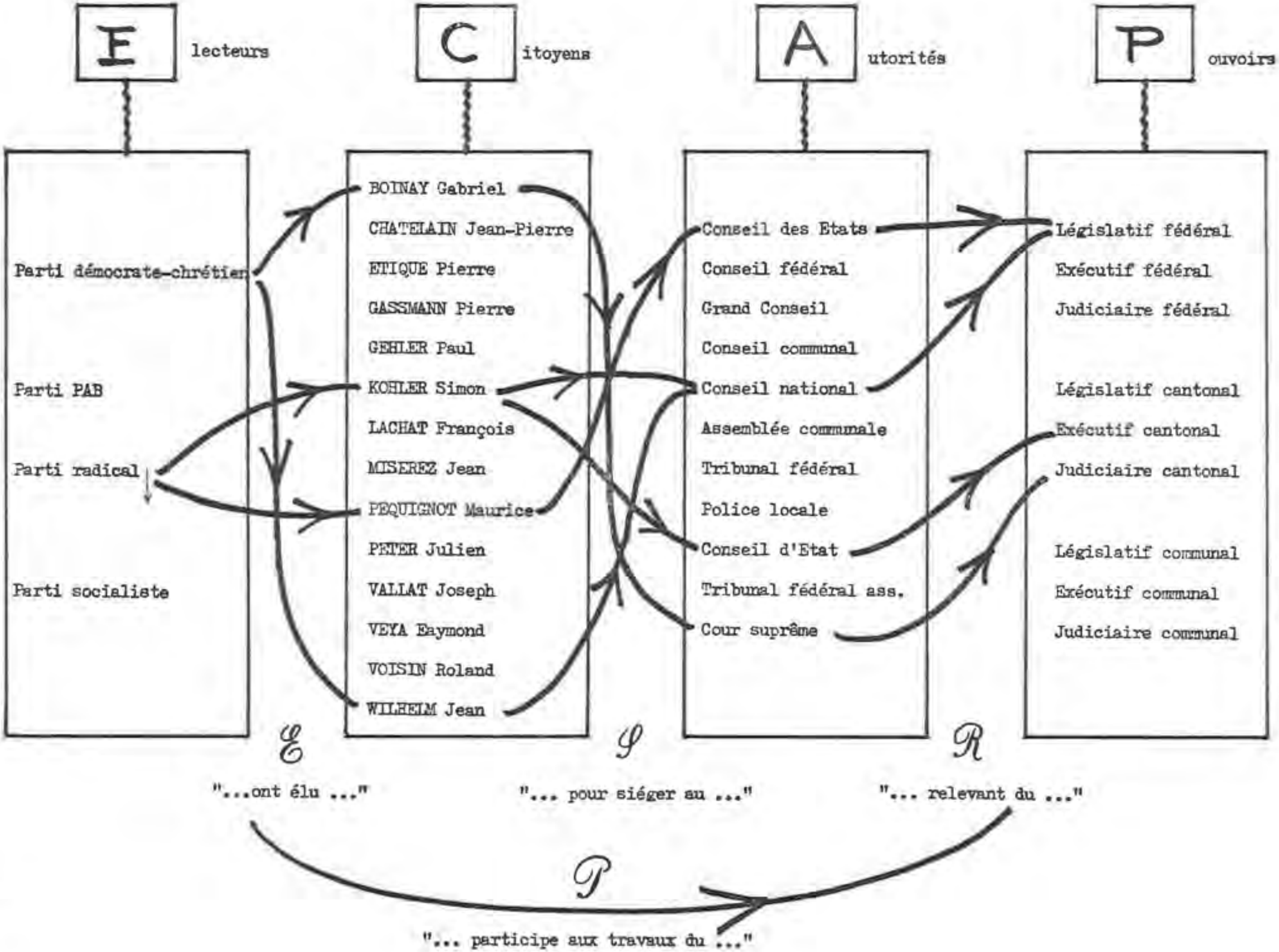
— Attention! La phrase doit être correcte dès le début de votre film. Que devient-elle?

— Les électeurs du parti radical ont élu Monsieur Kohler *pour siéger au* Conseil national...

— Nouvelle relation que j'appellerai $\mathscr{S}$ puisqu'il s'agit de sièges (cf. schéma).

☆ ☆ ☆

Même démarche pour le dernier tableau P, ensemble des pouvoirs et la relation $\mathscr{R}$ «*... relevant de...*» à faire trouver par les élèves. Puis:


E lecteurs
C itoyens
A utorités
P ouvoirs
Parti démocrate-chrétien
Parti PAB
Parti radical
Parti socialiste
BOINAY Gabriel
CHATELAIN Jean-Pierre
ETIQUE Pierre
GASSMANN Pierre
GEHLER Paul
KOHLER Simon
LACHAT François
MISEREZ Jean
PEQUIGNOT Maurice
PETER Julien
VALLAT Joseph
VEYA Raymond
VOISIN Roland
WILHELM Jean
Conseil des Etats
Conseil fédéral
Grand Conseil
Conseil communal
Conseil national
Assemblée communale
Tribunal fédéral
Police locale
Conseil d'Etat
Tribunal fédéral ass.
Cour suprême
Législatif fédéral
Exécutif fédéral
Judiciaire fédéral
Législatif cantonal
Exécutif cantonal
Judiciaire cantonal
Législatif communal
Exécutif communal
Judiciaire communal
𝓔
"...ont élu ..."
𝓢
"... pour siéger au ..."
𝓡
"... relevant du ..."
𝓟
"... participe aux travaux du ..."

— La bande dessinée est complète. Que signifient maintenant trois flèches successives, soit «la-relation- $\mathscr{E}$ -suivie-de-la-relation- $\mathscr{S}$ -suivie-de-la-relation- $\mathscr{R}$»? [6]

— Les Electeurs de tel parti *ont élu* tel Citoyen *pour siéger* à telle Autorité *relevant de* tel Pouvoir.

☆ ☆ ☆

On peut parfaitement passer à la relation composée, traduisant la nécessité des partis politiques:

— en châtiant son langage: tel parti «... participe aux travaux de...» tel pouvoir, soit la relation $\mathscr{P}$(cf. schéma);

— en détendant l'atmosphère: la Constitution peut être comparée à un train; pour qu'elle fonctionne, il faut la mettre sur rail; les partis en sont les wagons, bourrés d'électeurs; alors «... en voiture, s.v.pl.!...», soit la relation $\mathscr{V}$.

☆ ☆ ☆

Définir la relation réciproque est aussi un délice avec les élèves. Essayez plutôt.

☆ ☆ ☆

L'établissement du schéma sagittal ci-contre (liste des citoyens limitée aux seuls élus jurassiens resp. ajoulots en ce qui concerne les députés et les juges à la Cour suprême, a donc constitué nos premières «grandes manœuvres». Expériences faites, son emploi appelle les observations et développements suivants:

— Dans un premier temps, ne traiter que les pouvoirs fédéraux et cantonaux (le schéma est vite surchargé).

— Refaire l'exercice souvent, mais chaque fois avec d'autres élus.

— Pour aborder les trois pouvoirs au niveau communal, ne pas manquer de demander aux élèves si tel conseiller fédéral peut encore voter dans une commune!

— Monsieur Péquignot, conseiller aux Etats, est également maire de Saignelégier. Combien de flèches?

— Introduire progressivement, dans la liste des citoyens, conseillers communaux, juges divers et même des élus locaux spéciaux tels que secrétaires communaux ou receveurs municipaux que les élèves rangent facilement à l'exécutif.

— Je n'ai jamais passé du schéma sagittal au schéma cartésien, le temps me manquant. Cela ajouterait-il à la compréhension des choses? Il est permis d'en douter. Mais, dans une classe de mathématique, que de beaux exercices en perspective.

— Que ce soit au tableau ou sur des feuilles, travailler avec des flèches en couleur à la Papy, ce qui ne peut apparaître sur le schéma ci-contre pour des raisons d'impression. Les élèves auront tôt fait de choisir les couleurs en fonction des partis, soyez sans crainte!

— Enfin, qui dit relations dit clarté et précision du langage, ce qui ne gâte rien.

Conclure m'est facile. Je dois aux RELATIONS de singulières joies pédagogiques. C'est que, comme le souligne Maurice Glaymann, «*ce concept, par sa nature dynamique, permet de présenter très simplement et avec grande efficacité de nombreuses notions*». Il a, par surcroît, «*un caractère essentiellement non numérique*», ce qui a l'heur de plaire aux élèves. Admirable outil, en vérité, qui peut être utilisé très souvent dans nos leçons. Les RELATIONS ne lassent jamais nos jeunes parce qu'elles les rendent très actifs, tout en sollicitant constamment leur raisonnement. J'irais même jusqu'à dire qu'elles les envoûtent quelque peu. Ainsi, une année, comme nous terminions un schéma sagittal au tableau avec force flèches en couleurs — les élections au Grand Conseil et au Conseil d'Etat étaient à l'ordre du jour — j'entendis une jeune fille s'exclamer: «M'sieur, c'est un peu comme si on offrait des guirlandes à nos magistrats!»

Ainsi soit-il! **Gaston Guélat, Porrentruy**

[1] Editorial du «Journal de Genève» du 27.7.71.

[2] Math-Ecole numéro 40 de novembre 1969.

[3] Les avis sont très bien partagés dans le district de Porrentruy!

[4] A quand le droit de vote à 18 ans?

[5] A ce stade de la discussion, nul n'a parlé des suffrages épars!

[6] J'ai opté pour cette notation très simple, et partant très compréhensible pour des jeunes, notation parue dans E. Gallion 6e et chère à Monsieur Glaymann auquel j'envoie un amical salut en souvenir de nos stages parisiens de 1966. Pour les élèves d'Ecole professionnelle, en particulier, la notation $\mathscr{R} \circ \mathscr{S} \circ \mathscr{E}$ m'a paru inadéquate, illogique, puisqu'elle traduit la relation en partant, le plus souvent, de la droite; ils la confondent avec celle de la réciproque. Mais c'est là un point de doctrine que je laisse expliciter par mon ami André Calame, mathématicien.

Note sur la composition des relations

Gaston Guélat n'a pas voulu, et on le comprend, alourdir son texte par un symbolisme trop poussé. En maître averti, il sait que les notations mathématiques sont là pour éclairer et non pour obscurcir. Inutile donc d'en abuser dans un article où le jeu des relations importe plus que leur écriture. Mais Gaston Guélat souhaite que je prolonge ses réflexions par quelques remarques plus techniques. Je me soumets volontiers à ce désir d'un ami dont l'activité pédagogique a depuis longtemps mon admiration.

1. Commençons par la relation $\mathscr{R}$ de l'ensemble A des autorités vers l'ensemble P des pouvoirs. A chaque autorité correspond un seul pouvoir soit législatif, soit exécutif, soit judiciaire. Cette séparation des pouvoirs au niveau des autorités s'exprime graphiquement ainsi: de chaque élément de l'ensemble A part une flèche *unique* vers un élément de l'ensemble P. On reconnaît là la propriété caractéristique d'une application: *La relation* $\mathscr{R}$ *est une application de* A *dans* P.

2. La relation $\mathscr{E}$ de E vers C n'est pas une application, puisque les électeurs d'un même parti ont élu plusieurs candidats.

Comme exemple de la relation $\mathscr{E}$, citons: «Les électeurs du parti radical ont élu M. Simon Kohler».

Mettons cette phrase à la forme passive: «M. Simon a été élu par les électeurs du parti radical».

Sous cette forme, il s'agit d'une relation nouvelle de C vers E que nous noterons $\mathscr{E}'$. C'est la *relation réciproque* ou *inverse* de la relation $\mathscr{E}$. On l'obtient à partir du graphe de $\mathscr{E}$ en changeant le sens de chacune des flèches. Du moment que chaque élu a été proposé par un parti bien déterminé, *la relation* $\mathscr{E}'$ *est une application de* C *dans* E.

3. Venons-en à la composition des relations en commençant par $\mathscr{E}$ suivie de $\mathscr{S}$, notée $\mathscr{E} \circ \mathscr{S}$. Pour cette relation composée, l'ordre adopté par Gaston Guélat se justifie d'autant plus que cet ordre est conforme à la chronologie: élections d'abord, installation des autorités ensuite. Cette manière de noter la composition de gauche à droite reproduit la disposition de lecture du schéma. On la trouve chez plusieurs auteurs dont Nicole Picard [1].

En revanche, Kaufmann et Cullmann [2], Papy et d'autres notent la composition de droite à gauche. Papy [3] illustre la composition par des exemples «favorables» à ses notations:

M:	a comme mère	«Anne a comme mère Josette»
P :	a comme père	«Josette a comme père Robert»

Donc: «Anne a comme grand-père maternel Robert»

Ici, on comprend la notation $P \circ M$ (relation P après la relation M) qui respecte l'ordre des mots dans l'expression «grand-*père maternel*».

On trouvera toujours des exemples concrets en faveur d'une notation ou de l'autre. Concluons donc sur ce point en soulignant que l'ordre de composition peut être choisi arbitrairement, mais qu'il faut alors s'en tenir une fois pour toutes à la décision prise.

4. Sans vouloir compliquer trop, examinons encore quelle est la relation réciproque de $\mathscr{E} \circ \mathscr{S}$ dans le schéma des élections. Nous désignerons cette relation réciproque par $(\mathscr{E} \circ \mathscr{S})'$.

Toute flèche allant de E vers A (par l'intermédiaire de C) doit être remplacée par la flèche de sens contraire allant de A vers E. On constate que la relation réciproque de $\mathscr{E} \circ \mathscr{S}$ est la composition de $\mathscr{S}'$ et de $\mathscr{E}'$. On doit la noter conformément à la convention choisie par $\mathscr{S}' \circ \mathscr{E}'$ ($\mathscr{S}'$ suivie de $\mathscr{E}'$). La relation réciproque est en accord avec la chronologie inverse. On a donc:

$$(\mathscr{E} \circ \mathscr{S})' = \mathscr{S}' \circ \mathscr{E}'$$

Pour trouver la réciproque d'une composition, on compose les réciproques dans l'ordre inverse. Nous insistons sur ce résultat, car il ne s'agit plus d'une convention d'écriture, mais d'une propriété générale sur le plan mathématique.

5. Si on peut hésiter sur la manière de noter la composition des relations, en revanche pour la composition des applications la tradition a imposé un

ordre bien déterminé de droite à gauche. Il faut en chercher la raison dans des exemples classiques bien connus de tous:

«Le sinus de 90° est égal à 1»	On note:	$\sin 90^\circ$	$= 1$
«Le logarithme de 1 est égal à 0»	On note:	$\log 1$	$= 0$
«Le logarithme du sinus de 90° est égal à 0»	On note:	$\log \sin 90^\circ$	$= 1$

Le symbolisme traduit mot à mot l'expression utilisée dans la langue courante. Tout naturellement, cette disposition s'est conservée dans les notations modernes pour toutes les fonctions. Pour deux fonctions f et g on note:

$$f: \quad x \longmapsto f(x)$$
$$g: \quad x \longmapsto g(x)$$
$$y \longmapsto g(y)$$

Composons f et g dans l'ordre «f puis g»:

$$x \xmapsto{f} f(x) = y \xmapsto{g} g(y) = g\,[f(x)]$$

L'écriture obtenue pour l'image g[f(x)] explique que l'on note la composition de f et g sous la forme $g \circ f$. Pour surprenant qu'il soit, l'ordre de composition n'en est pas moins logique.

André Calame, Neuchâtel

[1] N. Picard, *Mathématique et jeux d'enfants*, Casterman/Poche.
[2] Kaufmann, Cullmann, *Mathématiques nouvelles pour le recyclage des parents*, Dunod, Science-poche.
[3] Papy, *Mathématique moderne 1*, Didier.

Un confrère

L'Association Cuisenaire Belgique lance un bulletin «ACB» qui sera l'organe de ce que veut être cette association à savoir un «groupe d'étude et de recherche pour la formation de l'enseignement de la mathématique moderne». Le rédacteur en chef en est le professeur *L. Jeronnez* bien connu des lecteurs de Math-Ecole. Le secrétariat est assuré par un autre de nos amis, Jean de Groef des éditions Calozet à Bruxelles.

Il s'agit essentiellement de *moderniser* l'enseignement. Or, pour l'équipe «ACB», «moderniser l'enseignement ne consiste pas, pour le maître, à introduire artificiellement quelques notions ensemblistes pour être moderne à tout prix. Mais c'est repenser tout son enseignement dans le but de mieux former la pensée de l'enfant et, en ce qui nous concerne plus spécialement, la pensée mathématique.»

Au sommaire du premier numéro:
— l'initiation mathématique en 3e année d'école maternelle;
— exemple d'une exploitation en 3e gardienne;
— analyse indéterminée [1] et programmation linéaire, par L. Jeronnez;
— etc.

[1] Problèmes à solutions multiples.

Nous avons reçu

Math moderne et expérimentation pédagogique

L'enseignement de la mathématique à l'école primaire
Année scolaire 1969-1970.

Par Raymond Hutin, directeur du Service de la recherche pédagogique, 11, r. Sillem, 1207 Genève. Rapport P 71.08.

La recherche pédagogique en général se définit par trois concepts: innovation, recherche et développement. Raymond Hutin, mandaté par la Direction de l'Enseignement primaire de Genève, a, d'abord, innové. Il a, ce faisant, et en accord avec la CIRCE, jeté les bases du renouveau de l'enseignement de la mathématique de l'école enfantine à la fin de l'école primaire (Genève, 6e année, élève de 11-12 ans): programme, méthodes, matériels, formation des enseignants. Il a, ensuite, mis en place un dispositif de contrôle continu permettant de réguler l'expérience et d'en assurer la réussite: il fallait ne pas nuire; il fallait surtout donner aux élèves la solide formation logico-mathématique que requièrent les temps actuels. Raymond Hutin, enfin, a assuré le développement de l'opération en organisant l'extension progressive du nouvel enseignement. Parti, en 1965, avec dix classes de pointe en 1re année, il a conduit ses classes au Cycle d'orientation (1971) tout en élargissant progressivement sa base.

C'est la description de cet important ouvrage qu'on lira dans le rapport sus-mentionné. Il s'agit là d'un prototype de recherche. Il est bien propre à éclairer, à sécuriser et à stimuler.

S. R.

Mathématisation d'une situation: Le Cirque

Nouveau jeu mathématique pour la 1re année par Mmes A. Cullaz et C. Andrès. Dessins de Mme F. Jaquemet. Service de la recherche pédagogique, Genève. Correspondance terme à terme. Présentation du nombre 7. Relation d'équivalence entre ensembles. Les différences. Jeu de négation. Relation d'équivalence entre éléments. Topologie.

Fiches (éditées à titre expérimental) *pour la 1re année.*

Ensembles. Relations. Numération. Espace.

Cours de mathématique destiné au corps enseignant

Lausanne, DIP, 1972.

Machines. Ecole enfantine. 14 pages A 4 avec exercices pour les élèves.
Petites machines. 1re année. 11 pages.

Blocs d'attributs et «Blocs logiques»

Le laboratoire de mathématique de Z. P. Dienes

No	Désignation	Nombre d'éléments	Grandeur	Matière	Présentation	Prix fr.
21000	Blocs logiques originaux de Z. P. Dienes	48	grande	plastique, vide	en boîte avec ravier	44.—
	»	48	grande	plastique, vide	en boîte sans ravier	38.—
21000/a	»	48	moyenne	bois	en boîte avec ravier	19.25
21000/b	»	48	petite	plastique, pleine	en boîte avec ravier	8.40
21005	Blocs d'attributs «Invicta»	60 (48 + 12 hexagones)	grande	plastique, pleine	en boîte avec ravier	44.—
21006	»	60 (48 + 12 hexagones)	moyenne	plastique, pleine	en boîte avec ravier	14.80
21006/a	»	60 (48 + 12 hexagones)	moyenne	plastique, pleine	en sachet	12.—
21007	»	60 (48 + 12 hexagones)	petite	plastique, pleine	en boîte avec ravier	8.40
21007/a	»	60 (48 + 12 hexagones)	petite	plastique, pleine	en sachet	4.60

Franz Schubiger, 8400 Winterthour

Mattenbachstrasse 2

J. A.

Mademoiselle
Madeleine Bräutigam
Ecole Normale

1000 Lausanne