L'algèbre étrange de Nicolas Chuquet : une réflexion pour la classe de mathématiques

David Guillemette

Faculté d'éducation, Université d'Ottawa

Histoire et enseignement-apprentissage des mathématiques

L'histoire des mathématiques inspire et passionne autant dilettantes que mathématiciens aguerris. Elle se veut le terreau fertile pour d'abondantes réflexions mathématiques, épistémologiques et didactiques. Dès le début du 20e siècle, des pédagogues, philosophes et mathématiciens tels que, Klein, Bachelard, Pólya (pour ne nommer que ceux-là) s'y sont intéressés.

Comme le souligne Charbonneau (2006), ce champ d'intérêt a connu une hausse importante de popularité à partir des années 70. Cet engouement a donné lieu à de nombreuses recherches concernant l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Ces travaux ont constitué, et continuent aujourd'hui de constituer, entre autres, pour les chercheurs et les enseignants, « à la fois une thérapeutique contre le dogmatisme, ainsi qu'un ensemble de moyens leur permettant de mieux s'approprier et de maîtriser leur savoir » (Barbin, 2012, p. 546). Il s'est alors développé pour la classe de mathématiques de nombreuses situations d'apprentissage, problèmes mathématiques, séquences d'enseignement en lien avec l'histoire. En parallèle, de nombreuses études théoriques et empiriques questionnant le rôle des éléments de nature historique, sociale et culturelle dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques ont émergé[1].

Dans cette veine, je souhaite ici contribuer à l'exploration du potentiel de l'histoire des mathématiques pour l'enseignement-apprentissage des mathématiques en présentant très brièvement les travaux de Nicolas Chuquet, mathématicien peu connu du bas Moyen-Âge. À mon sens, les avancées mathématiques de Chuquet, formulées plus d'un siècle avant Viète et Descartes, pourraient faire émerger des réflexions sur la nature et l'enseignement de l'algèbre, notamment chez les enseignants du secondaire, et possiblement inspirer ces derniers pour la création d'éventuelles situations d'apprentissage.

Nicolas Chuquet : mathématicien du Moyen-Âge

Nicolas Chuquet (1445-1488) est un mathématicien français du bas Moyen-Âge. Né à Paris, Chuquet est parti pour Lyon en 1480 après des études de médecine à la Sorbonne. Il y a pratiqué le métier d'« escripvain », c'est-à-dire qu'il a enseigné aux enfants à écrire, puis est devenu « maistre d'algorisme », c'est-à-dire qu'il a enseigné aux fils de marchands dans les écoles des abacistes.

Son œuvre majeure, écrite en français, est le Triparty en sciences des nombres. Jamais paru de son vivant, le texte aurait été récupéré par son voisin, Estienne de La Roche, qui publiera le livre pour son compte en 1520. Ce n'est qu'en 1880 que le professeur Aristide Marre découvre par hasard l'ouvrage original annoté par de La Roche. La découverte est phénoménale, car il s'agit d'un des plus vieux textes de mathématiques écrits en français. Chuquet y traite d'arithmétique et d'algèbre en reprenant des éléments de l'algèbre arabe, mais en utilisant une notation puissante qui influencera grandement les mathématiciens de la Renaissance, dont Descartes.

Dans son ouvrage, Chuquet présente des algorithmes pour les opérations arithmétiques élémentaires (et extraction de racines nièmes) et une série de « canons » qui sont des procédés de résolution algébrique

1 Le toujours actif International study group on the relation between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM) est une bonne illustration de cet engouement. En France, l'European Summer University on the Epistemology and History in Mathematics Education (ESU) est une initiative plus récente (1993) des anciens Instituts Universitaires de Formation de Maitres (IUFM).

reprenant (sans le support géométrique) les modèles d'al-Khwarizmi. Vient ensuite une série de problèmes d'application qui portent généralement sur des situations comptables permettant aux marchands de s'exercer sur des situations concrètes. En voici un exemple :

Un problème d'association selon Nicolas Chuquet (1484)

« Il est un marchant qui a baillé a ung sien facteur 500 livres pour gouverner et conduire en marchandise par telle convenance que le facteur doit prandre les 2/5 du gaing. Advient que le facteur oultre et par dessus ces paches (accords) et du consentement de son maistre, il a mis 100 livres en compaignie de son maistre. Assavoir moult quelle partie du gaing cellui facteur doit avoir par les paches premières non corrompues. Response : pour le premier par les paches faictes le facteur a cause de son service doit prandre les 2/5 du gaing des 500 livres que a mys son maistre. Or il est ainsi que les 500 livres sont les 5/6 de tout le corps de la compaignie ainsi le facteur a cause de son service doit prandre du gaing les 2/5 de 5/6 qui sont 1/3 de tout le gaing. Et après pour les 100 livres qu'il a mises et qui sont 1/6 de la compaignie il doit prandre la sixième partie de tout le gaing et par ainsi le facteur doit prandre 1/3 et 1/6 du gaing qui sont 1/2. Et doit-on entendre que en ceste maniere de faire (le marchand) ne perd (ni) ne gangne des 100 livres que son facteur met en compaignie. Ainsi veu que le facteur a eu la charge et la peine de tout et que le marchant ne s'en mesle en rien il n'y doit aussi en rien participer. »

Figure 1 : Exemple de problème d'arithmétique (tiré de Benoît, 1989, p. 209)

Dans une seconde partie du livre de Chuquet, on trouve un ensemble de résolutions de problèmes de géométrie. C'est sur ces derniers que je souhaiterais porter une attention particulière, car c'est à l'intérieur de ces résolutions que la puissance des méthodes de Chuquet et de sa notation inédite est fortement illustrée.

Notons que Luca Pacioli, algébriste de la même époque, pouvait écrire des énoncés du genre « un nombre ajouté à son carré valent 12 ». Chuquet possédait déjà un symbolisme qui lui permettait d'échapper à ce langage rhétorique. En effet, pour désigner une quantité inconnue, qu'il appelle un « premier », Chuquet emploie la notation 1^1. Le premier nombre correspond au coefficient du terme algébrique et l'exposant à sa puissance. Ainsi, 1^2 désignait la quantité inconnue au carré, 3^4 désignait le triple de la quantité inconnue à la puissance quatre, $R^2.3^3$ désignait la racine carrée du triple de la quantité inconnue au cube. Notons l'absence de recours aux lettres, ce qui nous éloigne ici d'une conception de l'algèbre comme « ensemble de règles de manipulations de lettres ». Enfin, il n'utilisait pas encore les symboles + ou -, mais utilisait les abréviations $\overline{p}$ et $\overline{m}$ qui acquéraient alors déjà le statut de symbole.

Je propose d'explorer un court exemple (Figure 2) de résolution de problème géométrique effectuée par Chuquet à l'aide de ces outils algébriques.

Le problème proposé par Chuquet est de déterminer la mesure du diamètre d'un de quatre cercles contigus, lesquels sont inscrits dans un cinquième, dont le diamètre est 12 unités.

Il construit d'abord le carré (EFD)[2] formé des segments reliant les centres de chacun des quatre cercles. Il construit ensuite le segment DE, diagonale du carré EFD, qu'il prolonge jusqu'au grand cercle et trouve le segment BC diamètre de ce dernier qui est de 12 unités. Il tire donc que mDE[3] + mCD + mBE = mBC = 12.

Il pose ensuite que mDF = mEF égal à 1^1, soit la quantité inconnue, disons x. Par la relation de Pythagore, il tire que mDE égal à $R^2.2^2$., soit la racine carrée de $2x^2$. Il en tire l'équation suivante : $R^2.2^2$. plus 1^1 est égal à 12.

En élevant au carré chaque membre de l'équation, il obtient : 2^2 égal à $144 – 24^1 + 1^2$, soit $2x^2 = 144 - 24x + x^2$. Il ajoute ensuite 24^1 et enlève 12 à chaque membre de l'équation pour obtenir 1^2 plus 24^1 est égal à 144, soit $x^2 + 24x = 144$.

2 Le quatrième sommet du carré n'est pas nommé.

3 mDE est ici la notation de la longueur du segment DE.

ung cercle duquel son dyametre qui est .b.c. est 12; assavoir moult de combien est le dyametre d'ung des cercles contenuz. Pour contempler ceste matiere je tyre quatre lignes de centre en aultre, ainsi je treuve le quarré .e.f.d. duquel la face comprant deux semy-diametres // comme il appert de .e.f.; et aussi je regarde que le dyametre du quarré qui est .d.e. avec deux semy-diametres .c.d. et .e.b. sont egaulx au dyametre du cercle contenant .c.b., et par ainsi le dyametre du quarré .d.e. avec l'une de ses faces .e.f. est egal a .c.b. qui sont 12; et pourtant je pose que .e.f. soit 1^1, et aussi .d.f.; je multiplie chascun en soy et puis les adjouste, montent 2^2 dont la racine seconde qui est $R^2.2^2$. est le dyametre .d.e., auquel je adjouste .e.f., monte tout $R^2.2^2$. plus 1^1 egaulx a 12 qui sont .c.b.; abrevie tes parties en ostant 1^1 de chascune d'icelles et auras $R^2.2^2$. d'ung costé, et 12 moins 1^1 d'aultre; multiplie ores chascune partie en soy, si auras 2^2 d'une part et 144 $\bar{m}$ 24^1 $\bar{p}$ 1^2; prestes 24^1 a l'une et a l'aultre parties, et d'une chascune d'icelles lyeves 1^2, et auras 1^2 $\bar{p}$ 24^1 d'une part, et 144 de l'aultre; expedie le residu de ce compte selon les canons de la rigle des premiers, si trouveras $R^2.288$. moins 12, et tant monte .e.f., et par consequent chascun dyametre des cercles contenuz. Et pour prouver cest euvre, je multiplie .e.f. en soy, qui est $R^2.288$. $\bar{m}$ 12, et aussi .d.f. en soy, monte chascune multiplicacion 432 moins $R^2.165888$. que je adjouste ensemble, monte tout 864 moins $R^2.663552$., duquel nombre la racine seconde qui est $\underline{R^2.864\ \bar{m}\ R^2.663552.}$ est le dyametre .d.e.; laquelle racine abreviee par extraction d'icelle vient a $R^2.576$. $\bar{m}$ $R^2.288$., laquelle encores abreviee par extraction de R^2 vient a 24 $\bar{m}$ $R^2.288$., a laquelle somme je adjouste les deux semy-diametres .c.d. et .e.b. qui sont eulx deux ensemble $R^2.288$. $\bar{m}$ 12; monte celle addicion 12 qui est la perfection de cest examen.

Figure 2. Exemple de problème géométrique résolu à l'aide d'outils algébriques (tiré de Chuquet, 1484/1979, pp. 305-306)

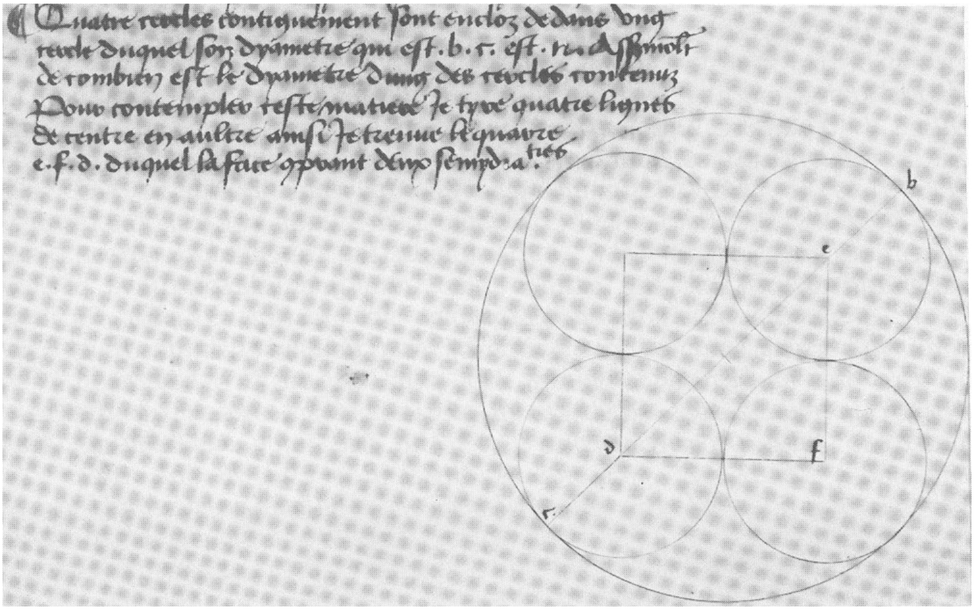

Figure 3 : Extrait de l'ouvrage original de la main de Chuquet (tiré de Flegg, Hay et Moss, 1985, p. 268)

Afin de résoudre l'équation du second degré, il convoque ce qu'il appelle « *les canons de la rigles des premiers* ». Tout porte à croire qu'il s'agit d'un modèle de résolution qui prend sa source dans l'algèbre arabe, notamment les règles de résolution établies par al-Khwarizmi. Il en tire que mDE égal R^2. 288. moins 12, c'est-à-dire la racine carrée de 288 moins 12.

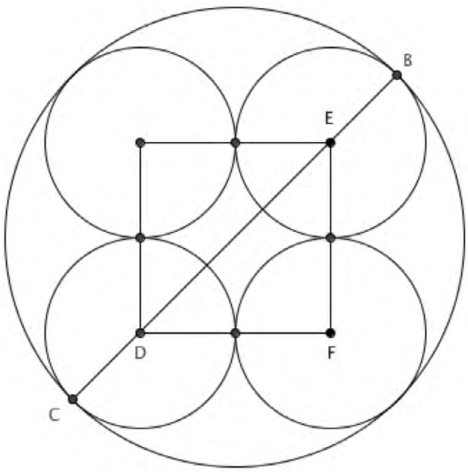

Figure 4 : Éléments du problème énoncé par Chuquet

Chuquet confirme sa solution en vérifiant si l'on obtient bien un diamètre de 12 unités sachant mDE = R^2. 288. moins 12. Il s'en suit une étonnante série de manipulation de radicaux. Notons au passage la notation $R^2.\underline{864\overline{m}R^2.663552}$., où le soulignement incite à penser qu'il faut inclure l'ensemble sous le radical.

Quelques réflexions pour la classe du secondaire

Je ne souhaite pas ici fournir des éléments « clé en main » pour l'utilisation de ces artefacts historiques en classe, mais brièvement formuler mon point de vue sur le potentiel de ceux-ci, en espérant amorcer une réflexion qui pourra inspirer la pratique enseignante.

D'abord, l'exploration du problème de Chuquet nous amène à décloisonner plusieurs notions importantes du secondaire : manipulations algébriques, manipulations des radicaux, géométrie euclidienne élémentaire, résolutionS d'équations du second degré… D'autre part, cette exploration nous place dans une « double » situation problème, c'est-à-dire qu'il nous faut comprendre le problème de Chuquet en termes modernes, mais il nous faut aussi et surtout comprendre les outils déployés, ainsi que les démarches qu'ils rendent possibles. Ce qui a pour effet de rehausser grandement la richesse d'une telle exploration en ajoutant une dimension interprétative fondamentale.

En effet, l'histoire nous plonge d'emblée dans des questions plus larges. Or, ces questions appellent à ce que nous pourrions désigner comme des réflexions « métamathématiques », c'est-à-dire des réflexions qui touchent par exemple l'historicité des notions, de la notation et de la rigueur dans l'activité mathématique, les mécanismes sous-jacents à l'émergence de ces notions et notations, les motivations qui animent les mathématiciens ou encore les liens entre le développement des mathématiques et des sociétés. L'utilisation d'artefacts historiques comme les démarches de Chuquet fournissent de rares occasions d'initier ces réflexions avec les élèves du secondaire.

Pragmatiquement, il est intéressant de se questionner sur le « comment » de l'utilisation de textes historiques comme celui de Chuquet. D'un côté, il apparaît fort difficile de traiter historiquement du texte de Chuquet de manière exhaustive et profonde en classe de mathématiques du secondaire. D'autre part, il semble important d'éviter de traiter et d'expliciter les démarches du mathématicien pour elles-mêmes sans perspective historique, épistémologique ou culturelle. Une piste intéressante pourrait être celle de Fried (2007) qui propose une lecture synchronique et une lecture diachronique des textes historiques en classe de mathématiques, et ce, sans favoriser l'une davantage que l'autre. C'est-à-dire qu'il propose d'articuler une approche « traduction » et une approche « interprétation » de la lecture du texte, en tentant, d'une part, d'extirper les mathématiques en jeu en les traduisant en langage moderne et, d'autre part, de garder vivantes les mathématiques de l'époque et d'éviter de déraciner l'auteur de son contexte historique et mathématique. Ces deux pôles nous apparaissent en effet nécessaires à articuler afin de susciter les réflexions mentionnées précédemment.

Plus fondamentalement, nous pouvons dire que le sens profond attribué aux objets mathématiques est circonscrit aux limites de notre expérience. Or, cette limite ne peut être franchie que par la rencontre avec une forme véritablement « étrangère » de compréhension et de manières de faire. Comme le dit Bakhtine (1986), « le sens ne s'approfondit véritablement que par la rencontre et le contact avec un autre sens, une culture étrangère. Il s'engage alors une forme de dialogue qui surmonte la fermeture et la partialité » (cité dans Radford, Furinghetti et Katz, 2007, p. 108, traduction libre). Autrement dit, il ne nous est possible d'élargir et d'approfondir le sens que nous attribuons à la discipline (en termes épistémologiques, historiques, pratiques et idéologiques) qu'en étant confronté à des manières de faire et d'être en mathématiques profondément éloignées des nôtres.

Dans cette perspective, l'histoire des mathématiques se veut un endroit où il est possible de surmonter la particularité de notre compréhension, un lieu fournissant des « possibilités » de dialogues avec d'autres compréhensions. L'histoire apparait alors comme une toile de fond suscitant l'introspection, la confrontation et la réflexion critique autour de ses propres conceptions et connaissances, en rendant possible, pour les apprenants, et les enseignants qui les accompagnent, la découverte de nouvelles manières de faire et d'être en mathématiques, l'ouverture de l'espace des possibles de l'activité mathématique (Guillemette, 2015).

Dans ce cadre, les quelques artefacts dont il est question plus haut sont intéressants per se pour l'apprentissage. En effet, la réflexion sur leur nature et leur émergence dans le monde mathématique, ainsi que l'expérience de l'altérité que leur exploration comporte, est, d'un point de vue socioculturel, consubstantiel de l'apprentissage de l'algèbre. Autrement dit, du point de vue socioculturel, ces éléments ne sont pas des « satellites » de l'apprentissage, mais constitutifs même du développement des manières d'« être-en-mathématiques » des apprenants.

En effet, cette prise de conscience de la dimension historique et culturelle d'objets comme l'algèbre, ainsi que les efforts déployés pour comprendre la démarche du mathématicien, nous amène à nous percevoir comme des êtres qui font des mathématiques dans notre culture et notre époque. Cela nous force à penser autrement les objets mathématiques, lesquels semblent aller de soi et avoir une forme et un sens définitif et immuable.

Cette prise de conscience importante apparait capitale dans l'optique de nous ouvrir aux autres, à leurs particularités et aux particularités de leur raisonnement en mathématiques.

Références

Bakhtine, M. (1986). *Speech genres and other late essays.* Austin : University of Texas Press.

Barbin, E. (2012). L'histoire des mathématiques dans la formation : une perspective historique (1975-2010). Dans J.-L. Dorier et S. Coutat (Dir.), *Actes du congrès de l'Espace mathématique francophone 2012* (pp. 546–554). Genève : Université de Genève.

Benoit, P. (1989). Calcul, algèbre et marchandise. Dans M. Serre (Dir.). *Éléments d'histoire des sciences.* (pp. 209-230). Paris : Bordas.

Charbonneau, L. (2006). Histoire des mathématiques et les nouveaux programmes au Québec : un défi de taille. Dans N. Bednarz et C. Mary (Dir.). *Actes du colloque de l'Espace mathématique francophone 2006* (pp. 11–21). Sherbrooke : Éditions du CRP et Faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke.

Chuquet, N. (1979). *Triparty en sciences des nombres - La géométrie : première géométrie algébrique en langue française* [H. L'Huillier : Introduction, traduction et notes]. Paris : Vrin. (Oeuvre originalement composée en 1484)

Flegg, G., Hay, C. & Moss, B. (1985). *Nicolas Chuquet : Renaissance Mathematician.* Dordrecht : Reidel Publishing Company.

Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: Knowledge and Self-Knowledge. *Educational Studies in Mathematics,* 66(2), 203–223.

Guillemette, D. (2015). Rôle de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques : le point de vue socioculturel. Dans C. Sabena et B. Di Paola (Dir.). *Actes de la 67e réunion de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM 67) - Enseigner et apprendre les mathématiques : ressources et obstacles* (pp. 607–618), Aosta, Italie : CIEAEM.

Marre, A. (1880). *Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres.* [Extrait du Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, Tomo XIII, 1880] Rome : Imprimerie des sciences mathématiques et physiques.

Radford, L., Furinghetti, F., Katz, V. (2007). Introduction: the topos of meaning or the encounter between past and present. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 107–110.