100/101

Pourquoi?
Enseigner la mathématique
Comment?

MATH ECOLE

NOVEMBRE 1981
20e ANNÉE

MATH-ECOLE 100-101
20e ANNÉE Paraît cinq fois par an NOVEMBRE 1981

Editorial

Trois... sept... dix... treize... vingt-cinq... cent.
Nombres magiques, nombres mystiques, nombres anniversaires: depuis la nuit des temps les hommes ont éprouvé le besoin de compter, de poser des jalons. Est-ce parce que, selon Pythagore, «tout est arrangé d'après le nombre» ou bien parce que le livre de la Sagesse de Salomon précise que «Dieu a tout réglé avec les mesures, les nombres et les poids»?
Math-Ecole ne pouvait ignorer la tradition et ne pas marquer, à sa manière, la parution du centième numéro qui marque l'achèvement de 25 années de présence dans la presse pédagogique. C'est l'occasion de rappeler que les vingt-cinq premiers numéros ont paru sous le titre «Les nombres en couleurs» en hommage à Georges Cuisenaire et de saluer les précurseurs du renouveau mathématique, Madeleine Goutard, Nicole Picard, Zoltan Dienes. C'est aussi l'occasion de rappeler tout ce que l'école doit à Samuel Roller, rédacteur infatigable des septante-cinq premiers numéros. Nous ne pouvons, au risque d'en oublier, citer les noms de tous ceux qui, en Suisse romande et à l'étranger ont participé à la réalisation et à la diffusion de Math-Ecole, mais nous ne saurions passer sous silence l'appui constant des autorités scolaires de tous les cantons, particulièrement de celles de Genève et de Neuchâtel sans qui la poursuite de l'action entreprise s'avèrerait impossible.
Ce numéro anniversaire comprend des articles en provenance de tous les pays francophones. Il est, dans sa diversité, un reflet des préoccupations du moment. Notre gratitude s'adresse à tous ceux qui ont répondu à l'appel de la rédaction et nous sommes certains que nos lecteurs trouveront dans les textes qui suivent ample matière à réflexion.
En vingt-cinq ans, le visage de l'école s'est profondément transformé.
Et pourtant, il reste encore bien du travail à accomplir pour que cette école apporte, à chaque élève, la meilleure formation possible. C'est dire que le comité de rédaction est prêt à poursuivre sa tâche avec le fidèle appui de ses abonnés. Mais pour cela, nous avons besoin des réactions des lecteurs. Le vœu du rédacteur, en cette date anniversaire, sera de recevoir un abondant courrier et de publier, dans les années à venir, de nombreux articles émanant de la plume de ceux qui, jour après jour, en ville ou à la campagne, sont ceux qui font réellement l'école.

Raymond Hutin

Apprendre des mathématiques pour s'en servir

par Gilbert Walusinski, St-Cloud

«... Horace a gaspillé tant de temps
à s'instruire qu'il n'a jamais rien appris.»
William Faulkner (*Sartoris*, III,3)

Pourquoi apprendre des mathématiques? Personne [1] n'a l'idée de poser la question aux élèves, trop ignorants, croit-on, pour avoir sur le sujet une opinion fondée sur autre chose que des préjugés. Parents et enseignants, moins ignorants, croit-on toujours, formulent-ils des avis plus circonstanciés?

L'idée la plus commune est qu'un certain apprentissage des mathématiques fait partie de ce bagage minimum qu'on souhaite donner à tout citoyen de notre temps. Formule assez vague qui présente l'avantage de satisfaire le goût avoué ou inavoué du plus grand nombre de personnes pour un enseignement traditionnel; cet enseignement «qui-a-fait-ses-preuves», «qui n'est pas si mauvais que cela puisque c'est lui qui nous a formés» et autres arguments du même tonneau que vous avez entendus mille fois. Moyennant quoi on a vu, tout au moins en France, se perpétuer des méthodes d'enseignement et des programmes de plus en plus éloignés des conceptions de la science en évolution permanente, des idées sur la pédagogie et les méthodes actives, des besoins sociaux et économiques qui, eux aussi, sont rien moins qu'invariants. Dans ces conditions un jour ou l'autre l'écart devait paraître trop criant et on s'est engagé dans une réforme plus ou moins bien préparée.

Deux orientations extrêmes ont été non pas expérimentées mais envisagées.

Il y a celle des *mathématiques utilitaires*. Faire comprendre l'intérêt de l'abstraction, de la déduction, de la démonstration paraît alors requérir un effort excessif. On se résigne à n'enseigner que des recettes et l'apprentissage idéal est alors celui de la répétition. Vous connaissez ces livres d'exercices qui parviennent à aligner 352 énoncés sur la règle de trois et ses variantes. Des générations d'élèves ont appris de cette façon à détester les mathématiques ce qui, dans un sens est une réussite surprenante puisqu'ils ont pris du dégoût de quelque chose qu'ils ignoraient. Certains grands esprits jugeaient, du haut de leurs titres honorifiques, que ces mathématiques-recettes, c'était bien assez bon en particulier pour les élèves des collèges techniques. A une petite, très petite «élite», on réservait les grands secrets du temple, par exemple les théorèmes d'existence des solutions des équations différentielles, quitte à copier plus ou moins bien les démonstrations de l'illustre Cauchy!

En réaction contre cette tendance que je caricature à peine et qui, peu ou

[1] J.-J. Walder l'a eue, cette idée: cf. p. 5 (N.D.L.R.).

prou, contamina tout l'enseignement élémentaire ou secondaire en France, des mathématiciens ont remarqué que les notions ensemblistes d'une part et les méthodes axiomatiques de l'autre modifiaient ou pouvaient modifier fondamentalement l'approche des mathématiques. Il y a, remarquaient-ils, une remarquable parenté entre la genèse des notions chez l'enfant et le travail conceptuel du mathématicien chercheur, compte tenu des niveaux évidemment très différents de leur puissance d'abstraction (je dis différents, j'hésiterais à préciser quel est le niveau supérieur à l'autre). Rien ne s'opposait donc à entreprendre, dès le premier apprentissage une véritable formation mathématique. Autrement dit, le souci de faire comprendre les raisons d'être des concepts, le pourquoi des théorèmes doit passer avant celui d'apprendre des formules magiques. Plutôt tâtonner et réfléchir qu'apprendre et appliquer aveuglément «bédeumoinquatrassez».
Abusivement dénommé «mouvement des mathématiques modernes», cette conception a eu le rare mérite de dresser contre elle une quantité d'amoureux aveugles de la tradition qui se rattachaient plus ou moins à la conception utilitaire. Mais ceux-ci n'avaient pas complètement tort ou, plutôt, l'évolution de l'enseignement finit par leur donner partiellement raison.
En effet, le mouvement des mathématiques modernes suscita des enthousiasmes, entraîna, dans une partie du corps enseignant, des instituteurs aux professeurs du secondaire, un désir de s'informer et de discuter des méthodes didactiques. Tout d'un coup, il devint évident pour ces enthousiastes que la formation d'un enseignant n'est jamais achevée, que remettre en cause son enseignement est une nécessité tout au long d'une carrière si on veut que celle-ci ne soit pas un long et ennuyeux chemin en attendant la retraite. Même pour ceux des enseignants qui ont bénéficié d'une certaine formation initiale (au sujet de laquelle bien des critiques pouvaient être formulées, en particulier qu'elle donnait souvent l'impression d'une formation finale), l'évolution des mathématiques, celle de la société et, ne l'oublions pas, l'expérience pédagogique acquise par la pratique du métier, tout cela remet perpétuellement en cause la conception pratiquée de l'enseignement. Bref, pour ces enthousiastes, la formation continue de l'enseignant est une nécessité et doit, pour les satisfaire, conjuguer enrichissement des connaissances mathématiques et recherche didactique.
En France, ont ainsi été créés, à partir de 1969 des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique); il en existe actuellement 25, environ un par région. Il est évidemment anormal que de tels instituts n'existent que pour les mathématiques. Leur place est à l'intérieur d'Instituts de Recherche sur l'Enseignement (IRE) où se pratiqueraient naturellement les liaisons interdisciplinaires. Une évolution importante de l'enseignement des sciences physiques a montré tous les inconvénients de l'inexistence de tels instituts spécialisés.
Cependant, les IREM n'ont pas suffi à la tâche pour que la réforme de l'enseignement des mathématiques se réalise aussi bien que le voulaient ses promoteurs. La formation continue des enseignants a peu débordé la fraction des enthousiastes. Pour beaucoup d'enseignants, la réforme n'a consis-

té qu'en un changement de programmes. Aucune remise en cause des méthodes, des objectifs pédagogiques ne les a préoccupés. Alors s'est développé un phénomène de mode, on a «fait de l'axiomatique» comme d'autres se sont mises à porter des minijupes. On a même trouvé dans l'axiomatique affichée une occasion magnifique de pratiquer un enseignement encore plus dogmatique que celui qui ne se préoccupait que de mathématiques utilitaires et se fondait sur des axiomatiques floues ou cachées (ce qui valait mieux, car elles n'auraient pas été belles à voir). Des journaux reprenant en les grossissant des critiques formulées par des savants mathématiciens, ont proclamé la faillite des mathématiques modernes! En réalité, si faillite il y a, c'est dans l'organisation de l'enseignement, dans le fait que la formation continue avec activité de recherche didactique n'a pas été considérée par *tous* les enseignants et les administrateurs comme une nécessité heureuse qui donne à la pratique enseignante toute sa portée et, j'oserai le dire, ajoute à son charme.

En fait, rien n'est à renier d'orientations qui ne sont contradictoires qu'en apparence. Faire comprendre aux apprentis comment les connaissances s'organisent et se développent en grandes structures ne signifie pas qu'on néglige les applications pratiques. L'axiomatique qui assure la solidité logique de la théorie n'est pas une construction gratuite ou arbitraire, elle vient de loin; il a fallu des siècles, d'Archimède à Hilbert pour que la méthode prenne sa forme provisoirement définitive.

Dès ses débuts, dès la première initiation, l'enfant peut être aidé à suivre la voie qui, historiquement, a été parcourue, non en une vie d'homme mais en plus de deux mille ans. En se posant des problèmes, en faisant une large part à l'imagination et à l'intuition. Tout en faisant progressivement sentir la nécessité de la précision dans les définitions, d'une organisation (autrement dit d'une axiomatique) et d'une rigueur déductive.

La question de savoir comment se servir des mathématiques apprises ne devrait alors plus se poser puisque tout au long de l'apprentissage, ces mathématiques peu à peu construites auront été opérationnelles, elles auront permis de résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Les dits problèmes ayant permis d'aiguiser les mathématiques apprises, aiguiser comme on le dit d'un couteau. Illustration d'un vieux slogan: les mathématiques ne s'usent pas quand on s'en sert, au contraire!

La pratique de cet enseignement requiert une formation continue des enseignants au moins aussi développée que toute autre méthode. Les problèmes les plus motivants ressortissent des disciplines les plus diverses: physique, astronomie, biologie, linguistique, géographie, etc. D'où l'intérêt du travail en équipe. La genèse des notions exige des connaissances épistémologiques et historiques approfondies qui doivent imprégner l'enseignement: donner une image non trompeuse des mathématiques et persuader les élèves qu'ils ont un rôle à jouer dans cette science vivante.

Enseignement d'autant plus attrayant pour l'enseignant et les enseignés qu'il est plus difficile, qu'il engage davantage toute la personne dans une recherche qui ne finira jamais...

Pourquoi et comment apprendre la mathématique?

Je ne sais si d'autres collègues auront la même idée, mais il m'a semblé intéressant de demander à mes élèves de répondre aux questions ci-dessus. Quelques réflexions m'ont paru dignes d'être publiées. Les voici:

POURQUOI?

- *Parce que, quand on sera grand, on ne pourra pas toujours dire à l'ordinateur: – «Calcule-moi ci, calcule-moi ça!» (Yves)*
- *Parce que c'est mieux de savoir calculer sans ses doigts. (Fabienne)*
- *Parce que c'est utile tous les jours dans la vie. (Didier)*
- *Parce que c'est utile pour tous les métiers. (Michel)*
- *Parce que c'est nécessaire (Tania)... mais pas trop, car sinon on mélange tout et «ça nous bourre la tête dans tous les coins». (Valérie)*
- *Parce que, le soir, on ne pourrait pas compter les moutons qui sautent par-dessus la barrière. (Caroline)*
- *Parce que les gens sont curieux. Nous voulons toujours connaître la longueur, le poids, le prix, le nombre de choses. (Abigaïl)*

COMMENT?

- *En s'amusant, ailleurs que dans la classe. (Caroline)*
- *En jouant. (André)*
- *En jouant aux échecs. (Olivier)*
- *Avec une machine. (Olivier)*
- *En faisant des jeux mathématiques. (Fabienne).*
- *En passant des films sur la mathématique ou en prenant des petits groupes d'élèves dans une autre salle que la classe et en expliquant sur place avec du matériel «exprès pour». (Didier)*
- *En faisant des dessins, ou en travaillant quand on veut dans la semaine et en corrigeant nous-mêmes.*

Certifié exact:
J.-J. Walder, Hermance

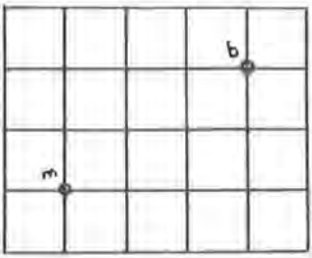
Apprendre ou enseigner, Pourquoi? Comment?

par Marie-Pia Masse, Joliette (Canada)

Apprendre et enseigner, deux faits qui se situent dans un même élan. Quand on apprend, que l'on découvre une idée, si simple soit-elle, on la partage. Quand on enseigne, on partage une idée, on partage ses observations qui se complètent toujours par les critiques et les observations des autres.
Pourquoi apprendre?... pourquoi apprendre les mathématiques?... Mais simplement pour le plaisir: c'est passionnant de se trouver au seuil de la surprise et de l'étonnement.
Le plaisir d'observer la régularité, la magie presque, des nombres et des formes. L'importance de leur unité. Seuls, nombres ou formes sont fort intéressants; ensemble, ils prennent une force et un mouvement d'une ampleur captivante.
Laissons-nous prendre par ce jeu...

Le cinq? pourquoi pas?

Les cinq doigts de la main,
de la fenêtre de mon bureau, je vois cinq arbres,
cinq semaines de vacances,
...
Le cinq te fait sûrement penser à quelque chose...

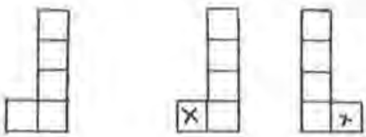


Et si nous sommes 5 amis à se rencontrer. Chacun dit bonjour aux autres en arrivant. Combien de «bonjours» seront dits?...
J'aimerais trouver cinq chemins différents pour me rendre de la maison au bureau; pourrais-tu m'aider?
Y a-t-il des chemins équivalents?
Pourrais-tu en trouver un plus court pour les jours où je suis en retard?

Jouons le jeu avec un «J»

Avec 5 carrés, forme un

En déplaçant un seul carré à la fois, pourrais-tu former d'autres lettres?



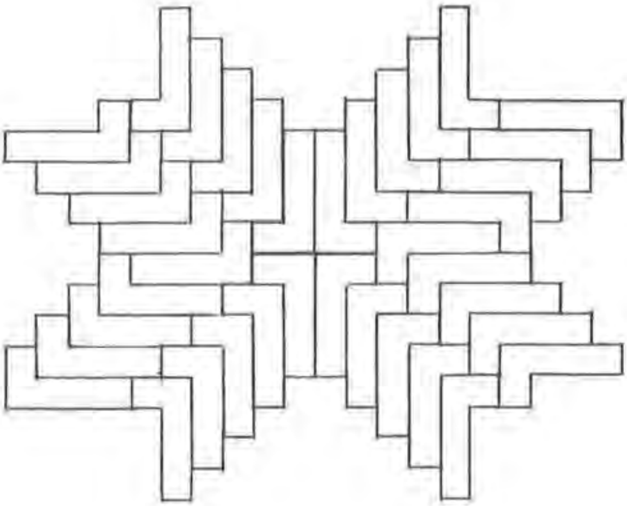
Dessine sur papier quadrillé les lettres que tu trouves; pourrais-tu me dire si l'aire est toujours la même? Y a-t-il des lettres qui ont un même périmètre?
Continue ta recherche en déplaçant plus d'un carré à la fois.
Si on doublait les dimensions des lettres, qu'adviendrait-il de l'aire et du périmètre?

Découpe maintenant dans un papier épais des formes semblables, en plusieurs exemplaires.

Est-il possible de couvrir une surface avec cette forme? Y a-t-il plus d'un modèle possible? Utilise tes pièces pour faire ta recherche et note les modèles que tu trouves sur du papier quadrillé.

Je t'en propose un à mon tour.

Pourrais-tu trouver comment cette mosaïque a été bâtie? Peut-on la continuer? Y retrouve-t-on des symétries, rotations, translations? Tu dois pouvoir faire les mêmes observations sur les modèles que tu as trouvés.
Imagine une autre forme que tu pourrais utiliser pour faire une mosaïque. Peut-être, un jour, pourrais-tu l'utiliser pour décorer une pièce de ta maison!
Autant de questions, autant d'observations. Et si on se laissait aller au plaisir de découvrir, découvrir les nombres, les formes, l'espace...



Mathématiques et éducation au sens critique

par Renato Traversi, Bellinzone

Parmi les objectifs généraux que l'enseignement des mathématiques à l'école primaire cherche à atteindre, un certain nombre se réfère à tout un ensemble d'attitudes et de capacités qui peuvent être incluses dans ce que l'on appelle assez fréquemment le *sens critique*. Je pense en particulier aux objectifs qui concernent la capacité de travailler de manière autonome, de considérer de manière critique les informations, de mettre en évidence des contradictions, d'être cohérents, de prévoir et de vérifier des résultats. Il s'agit sans aucun doute d'objectifs d'une importance fondamentale et qui ne peuvent pas ne pas figurer dans le bagage que nous devons garantir, plus que jamais, aux générations montantes.
Si du niveau des énonciations on passe à un niveau plus opératif, en ce qui concerne la pratique scolaire, les questions suivantes nous viennent tout de suite à l'esprit:

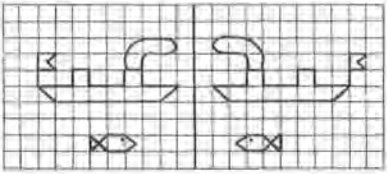
- Concrètement, que signifie développer le sens critique pendant les leçons de mathématiques?
- Comment faire pour atteindre cet objectif? Quelles stratégies didactiques faut-il mettre en œuvre?

Dans cet article, nous essayerons de trouver une réponse à ces questions, en mettant en évidence quelques manifestations importantes de la capacité critique des élèves et en fournissant quelques suggestions didactiques sur la manière de la développer et de la rendre plus efficaces.

● Le sens critique peut se manifester de différentes manières; l'une d'elles consiste à savoir repérer des erreurs, des contradictions dans les contextes les plus variés.

Il est très important que face à une information quelconque, les élèves apprennent à l'examiner attentivement, afin de parvenir à distinguer une affirmation vraie d'une fausse, un raisonnement correct d'un raisonnement incorrect, à repérer des éléments contradictoires, etc. Il s'agit d'une capacité qui peut être éduquée en habituant l'élève à réfléchir sur l'erreur, pour arriver à comprendre pourquoi certains procédés ou certaines réponses ne sont pas appropriés. De la sorte, au lieu d'être perçue de manière négative, l'erreur est utilisée aux fins de l'apprentissage, en cherchant à tirer profit au maximum de sa valeur éducative.
Du point de vue didactique, les activités suivantes sont particulièrement instructives:

a) Découvrir des erreurs dans des calculs, des raisonnements, des problèmes variés



Exemples:
- Y a-t-il des erreurs de réflexion? Ernest voulait faire un dessin symétrique. Contrôle son dessin. Si tu trouves des erreurs, indique-les d'une croix.
- Jean a remarqué dans la ferme de son grand-père un petit animal à la queue longue et touffue. Son grand-père lui a raconté que les écureuils sont de petits animaux à la queue longue et touffue. Jean conclut alors qu'il a vu un écureuil. Que penses-tu de sa conclusion?
- Charles dit que pour dessiner un carré il est suffisant de dessiner un quadrilatère aux angles droits. Qu'en penses-tu?

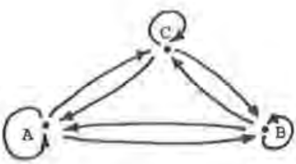
b) Confronter différentes procédures de résolution et découvrir celles qui ne permettent pas d'obtenir une réponse correcte.

Exemple:
- 78 concurrents participent à un slalom spécial. Dans la première manche, 11 skieurs sont éliminés; dans la deuxième, seulement 6. Combien de skieurs terminent la course?
  Rechercher parmi les procédés indiqués, ceux qui ne conduisent pas à la solution correcte.

  $78 - (11 + 6)$ $(78 - 11) + 6$ $(78 - 11) - 6$ $78 - (11 - 6)$

c) Découvrir parmi différentes solutions alternatives celles qui sont erronées

Exemple:
- A, B et C représentent trois automobiles. Un élève a établi une relation entre les trois automobiles mais il a oublié d'indiquer ce que signifient les flèches. A ton avis, que pourraient-elles bien vouloir dire?



En partant d'un certain nombre de solutions fournies par les élèves (ex. «elle est plus puissante que», «elle est de la même couleur que», «elle est de la même marque que», «elle n'est pas de la même année que», etc.), déterminer celles qui sont incorrectes.

● Le sens critique se manifeste aussi dans la capacité des élèves de rechercher les informations nécessaires pour atteindre un objectif.

Dans la vie quotidienne, on est souvent confronté à des situations de ce type où il faut non seulement organiser des informations que l'on possède déjà, mais aussi chercher d'autres renseignements pour pouvoir répondre à une question. La capacité des élèves de discerner, parmi un éventail d'informations, celles qui sont utiles pour parvenir à ce résultat, est donc de première importance. Voici quelques problèmes que l'on peut imaginer pour développer cette dimension du sens critique.

a) *Proposer des problèmes où manquent une ou plusieurs données:* l'élève doit chercher les informations nécessaires pour les résoudre.

Exemple:
- Un marchand de journaux paye les journaux 95 centimes pièce. Samedi dernier, il en a vendu 86. Que dois-tu connaître pour trouver son bénéfice?

b) *Identifier, parmi un certain nombre d'informations, celles qui sont nécessaires à la solution d'un problème*

Exemple:
- Charles doit calculer combien coûtera le billet d'entrée au zoo pour toute sa classe. Cherche parmi les informations données ci-dessous, celles qui lui sont nécessaires.

  ☐ il y a 25 élèves dans la classe.

  ☐ les cartes qui représentent des animaux coûtent 1 franc.

  ☐ la visite du zoo durera deux heures.

  ☐ l'entrée coûte 3 francs par enfant.

  ☐ pour les écoles, il y a une réduction d'un franc par élève.

c) *Rechercher les éléments nécessaires pour fournir une réponse à une question donnée*

Exemple:
- Une famille de Bellinzona désire visiter le zoo de Bâle. Quels renseignements dois-tu posséder pour trouver combien dépense la famille pour acheter les billets du train?

● La capacité d'estimer, de formuler des hypothèses et de vérifier les résultats est un autre aspect caractéristique du sens critique.

Bien que chaque programme insiste sur l'importance de ce point, les résultats des épreuves de contrôle que nous avons effectuées dernièrement enco-

re, font apparaître une certaine carence dans ce secteur. Plusieurs élèves ne sont pas sûrs des résultats qu'ils obtiennent («je ne sais pas si j'ai fait juste ou si je me suis trompé»); d'autres ne savent pas exactement à quoi correspond le résultat obtenu, c'est-à-dire qu'ils ne savent pas s'il s'agit de francs ou de kilogrammes, etc.
Par conséquent, il est extrêmement important d'apprendre aux élèves à estimer et à vérifier les résultats de leurs opérations de manière systématique, à se poser des questions du type: «Le résultat que j'ai obtenu répond-il bien à la question du problème? – Comment puis-je savoir s'il est exact? – Le résultat est-il en accord avec la réalité?»
Voici quelques situations qui nous semblent intéressantes de ce point de vue-là.

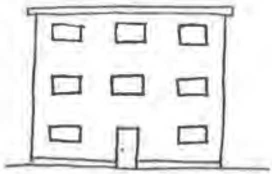
a) Estimer un résultat dans les cas où la situation permet de le faire sans trop de difficultés

Exemples:

- M^me^ Dubois achète 9 pelotes de laine à 5,95 fr. chacune. Elle a dans son porte-monnaie un billet de 50 francs et une pièce de 5 francs. Sans calculer le coût de la dépense, peut-tu dire si elle a assez d'argent pour payer?

- Quelle peut bien être la hauteur réelle d'une maison comme celle qui est représentée par ce croquis. Choisis la réponse appropriée:

  9 m, 20 m, 5 m.



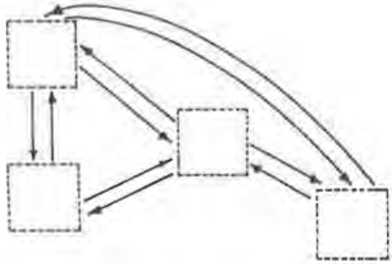
b) Prévoir l'effet de certaines modifications des données ou des conditions d'un problème sur le résultat.

Exemple:

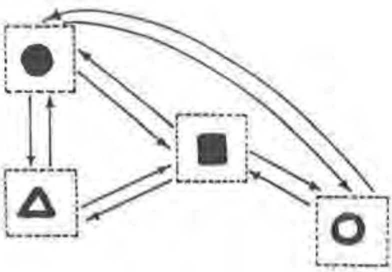
- Charles a mesuré la longueur de sa salle de classe au moyen d'un bâton et il a compté 9 bâtons.
  S'il l'avait fait avec un bâton mesurant la moitié de celui qu'il a utilisé, quelle mesure aurait-il obtenue?
- Si l'on coupe cette feuille de papier suivant la ligne AB, en la dépliant on obtient un triangle isocèle.
  Quelle figure géométrique obtient-on en la coupant suivant la ligne AC?

c) Vérifier si un résultat est correct sur la base du critère de cohérence interne et sur la base du critère de correspondance à la réalité.

Exemple:
Bruno (4ᵉ primaire) fournit la réponse ci-dessous au problème suivant et est convaincu d'avoir trouvé la bonne solution.
Les flèches signifient «n'a pas la même forme que...». Dessine chaque forme dans les carrés représentés en pointillé.



L'élève a travaillé de la manière suivante: disque noir – triangle blanc – carré noir – disque blanc, en faisant bien attention que deux figures voisines n'aient pas la même forme.
L'exemple met en évidence l'absence totale de révision critique en ce qui concerne la cohérence interne de la situation dans son ensemble, ce qui aurait permis à Bruno de se rendre compte de son erreur (par exemple, en contrôlant systématiquement la signification de la présence ou de l'absence de flèches).

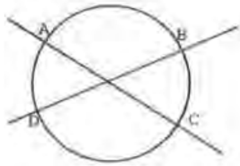


● **Enfin, un dernier aspect sur lequel il me semble important d'attirer l'attention du lecteur, concerne le sens critique considéré comme capacité de poser des questions, d'inventer de manière autonome un problème.**

A la base de cette capacité il y a une attitude fondamentale: celle d'être capable de s'émerveiller, de s'étonner face aux différentes situations vécues. Le climat de la classe en matière de «curiosité cognitive», d'attitude disponible et orientée vers la recherche est déterminant pour pouvoir accéder à la capacité d'une lecture critique de la réalité. Il faut habituer les élèves à ne pas se contenter de constater certains résultats, mais à aller au-delà, en se demandant pourquoi certains faits se produisent.
Il me semble qu'il faudrait faire un effort supplémentaire pour chercher à récupérer, au moins en partie, le temps des pourquoi des enfants. A ce pro-

pos, une technique très simple consiste à inciter les élèves à trouver des pourquoi au cours des leçons sur les questions qui concernent les mathématiques.

Exemples:
- Pourquoi dans la figure ci-contre si l'on joint les points A, B, C, D et A obtient-on un rectangle et pas une autre figure?



- Pourquoi dans une table de multiplication y a-t-il plus de nombres pairs que de nombres impairs?

On peut imaginer d'autres stratégies didactiques, par exemple:

a) Déterminer quelles nouvelles informations on peut déduire d'un certain nombre de renseignements:

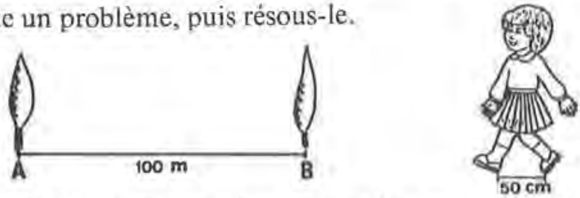
Exemple:
Un négociant a fait arriver 25 groupes de 12 soldats de plomb chacun. Maintenant, il doit vendre encore 36 soldats.

Avec ces renseignements, on peut trouver:
☐ le prix de chaque groupe de soldats
☐ le nombre de soldats qu'il a déjà vendus
☐ le nombre d'enfants qui a acheté les soldats

b) Inventer des problèmes

Exemples:
Quelle question te suggère la vignette ci-contre?

Observe le croquis, invente un problème, puis résous-le.



Ces quelques réflexions sont bien loin de traiter de manière exhaustive le problème de l'éducation au sens critique en mathématiques.
Mon intention était beaucoup plus modeste car j'ai cherché uniquement à mettre en lumière certaines manifestations évidentes de la capacité critique et à suggérer quelques stratégies didactiques aptes à permettre aux élèves d'atteindre cet objectif fondamental de la formation mathématique et de l'éducation de base en général.

A propos de la didactique des mathématiques

par Jean Brun, FPSE, Université de Genève

Si l'on veut bien attacher quelque importance à la variation des vocables utilisés pour désigner un champ d'activité, il n'est pas sans intérêt de noter le renouveau du terme «didactique» à propos des recherches sur l'enseignement des mathématiques. La didactique des mathématiques se définit à la fois par un terrain,, l'école, et par une discipline en train de se constituer. Ainsi la création récente d'une revue spécialisée, «Recherches en Didactique des Mathématiques», témoigne de l'existence d'un secteur de recherche autonome, qui produit des travaux expérimentaux spécifiques dans ce domaine. G. Brousseau (1981) dit de la didactique qu'elle «oblige à réorganiser à la fois les mathématiques, la psychologie et la pédagogie, et se constitue en une activité et un domaine de connaissances propres dont aucune composante ne peut être exclue» (p. 454). Mon propos consistera à essayer de caractériser l'activité de recherche en didactique des mathématiques afin de permettre de la situer dans le découpage actuel des champs théoriques en sciences de l'éducation.
Sans vouloir faire une analyse de l'évolution du mot «didactique» dans l'histoire de la pédagogie, en bref retour en arrière est toutefois nécessaire pour comprendre l'usage actuel qui en est fait. Dans son «Dictionnaire de la langue pédagogique» (1971), Foulquié lui donne les définitions suivantes:

- *«qui concerne ou a pour but l'enseignement;*
- *technique ou art de l'enseignement;*
- *étude des méthodes d'enseignement».*

On retrouve donc là le double aspect de pratiques d'enseignement et de recherche sur ces pratiques. Mais, après avoir distingué la didactique générale, indépendante des contenus d'enseignement, et la didactique spéciale, qui s'occupe des diverses disciplines enseignées, l'auteur inclut une citation de Debesse qui situe bien la connotation attribuée au terme «didactique» dans les années 60-70: «La pédagogie moderne considère la didactique <u>tout au plus comme un pis-aller</u> parce qu'elle s'appuie surtout sur les mécanismes d'enregistrement mnémique, au lieu de favoriser l'assimilation du savoir par le travail de découverte et de création». (M. Debesse, in Traité de Psychologie Appliquée, 817). A* **didactique** *est donc associée une conception répétitive, associationniste de l'apprentissage, par opposition à ce qu'on appelle «la pédagogie moderne» censée valoriser la découverte et la création. Vouloir restaurer la didactique, de plus en mathématiques où des années viennent d'être consacrées à des innovations qui se veulent dans le droit fil de la pédagogie moderne, nécessite assurément quelques expli-*

** Souligné par nous.*

cations et mises au point à défaut desquelles le renouveau d'une didactique des mathématiques risquerait d'être perçu comme un sérieux retour en arrière!...
L'analyse didactique se caractérise principalement par la mise en relation de trois éléments:
- *les contenus de savoir;*
- *la situation didactique et ses différentes composantes;*
- *l'activité cognitive des élèves.*

Les contenus de savoir

Le renouveau du terme **didactique** *en sciences de l'éducation contient une volonté de redonner de l'importance à l'analyse des contenus d'enseignement. Les courants pédagogiques innovateurs ont plutôt mis l'accent sur le développement de l'intelligence et de la personnalité des élèves, opposant même parfois cet objectif à celui de l'acquisition de connaissances, qui se voyait dévalorisé. Dans le cas de l'innovation dans l'enseignement des mathématiques, la réflexion sur les contenus à enseigner a bien été première, et le mouvement réformateur a bien marqué sa volonté d'innover tant à propos des contenus que des méthodes. Mais, avec le recul, il me semble que, si ces deux réflexions étaient bien simultanées dans le temps, elles sont tout de même restées relativement indépendantes sur le fonds. En effet la logique selon laquelle s'effectuait la réflexion sur les contenus à enseigner était fondamentalement celle d'une mise à jour des connaissances constituées, en substituant un découpage du savoir à un autre, sans changer la conception même de ce découpage. Celui-ci était livré d'emblée, comme la nouvelle matière à enseigner, sur laquelle on appliquerait une pédagogie moderne, active, etc. En ce sens on peut parler de relative indépendance des contenus et des méthodes d'enseignement. Or, le projet de la didactique est de mener une réflexion qui articule l'aspect conceptuel avec les situations d'enseignement qui lui donnent une signification. Comment? Tout d'abord, en ne prenant pas tel quel, au premier degré, le découpage des contenus proposé, et en ne limitant pas l'analyse aux contenus des programmes, même de ceux les mieux modernisés. En effet, restreindre l'analyse des contenus d'enseignement à ce cadre c'est réduire sérieusement le champ d'expériences à partir duquel les élèves construisent leurs connaissances. Au nom de quoi pourrait-on affirmer que les contenus des programmes fixent les limites dans lesquelles les élèves élaborent leurs représentations des concepts mathématiques? Ce serait faire fi des expériences que ces élèves possèdent de la réalité, autres que leurs expériences de la salle de classe. Au plan des contenus, un des défis posés à la recherche en didactique consiste précisément à élargir le découpage canonique du discours mathématique pour y intégrer ce qu'on pourrait appeler le discours mathématique de l'élève. Face à la question de savoir quel est le découpage pertinent des contenus mathématiques pour une étude en didactique j'adopterai le point de vue de G. Vergnaud (1980) pour qui « cet objet d'étu-*

de ne doit pas être trop petit, ni émietté en un ensemble non coordonné de savoirs et de savoir-faire, comme c'est malheureusement trop souvent le cas dans les études d'évaluation sur l'enseignement. Il serait vain par exemple d'étudier séparément l'acquisition des notions de fraction, de rapport, de division, de proportion, de fonction linéaire, ou bien dans un autre registre, celles de distance parcourue, de vitesse, de temps, de force et d'accélération. Dans l'étude des contenus une autre exigence consiste à prendre en considération ce que Y. Chevallard (1980) appelle « la transposition didactique». Il la définit en ces termes: « Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi **les objets d'enseignement.** *Le « travail» qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la* **transposition didactique».**

Cette réflexion sur les contenus amène également à situer la place des mathématiques dans la formation des maîtres. Il est important que leur approche des mathématiques ne soit pas simplement le décalque du découpage imposé par le programme. Leur maîtrise des contenus à enseigner passe par une pratique des mathématiques qui déborde la préparation des activités et notions proposées dans les moyens d'enseignement, afin de prendre une distance avec les objectifs parcellisés. Surtout c'est à partir d'une activité mathématique qui leur soit propre qu'ils pourront retrouver ce qui est derrière la forme donnée aux contenus d'enseignement et faire l'envers du parcours de la transposition didactique.

La situation didactique et ses composantes

Un des principaux problèmes de l'enseignement des mathématiques consiste à trouver des situations didactiques qui permettent de faire évoluer les procédures et les représentations des élèves. L'activité de résolution de problème est décisive dans cette évolution et elle est à considérer comme une fin en soi. L'analyse de cette activité prend alors une place centrale dans la recherche en didactique; elle consiste en la description des procédures de résolution et en leur catégorisation. Mais ceci ne suffit pas. Il faut surtout relier ces procédures aux processus qui les déterminent et l'analyse de la situation s'impose, comme condition de la compréhension des productions des élèves. On parlera de situation didactique avec G. Brousseau (1978) dès le moment où il y a «projet, le plus souvent social, de faire approprier à un sujet un savoir constitué ou en voie de constitution» (p. 24). Cette situation didactique au sens large consiste en un ensemble d'interactions entre le maître, les élèves, les contenus de savoir et le milieu. Par milieu, on peut concevoir le système éducatif en général, ou l'organisation très particulière d'une activité choisie par le maître. Cette organisation définit la situation didactique au sens strict, ou «situation-problème». G. Charrière (1980) précise encore davantage cette notion de situation et en fait un moyen didactique qu'il distingue d'autres moyens comme les problèmes, les exer-

cices, les jeux, les centres d'intérêt, les ateliers. Il parle alors de « technique des situations».

Avec les maîtres et les maîtresses de méthodologie du Centre Pédagogique de Geisendorf et du Service de la Recherche Pédagogique, à Genève, nous avons mené une série d'observations, dans ce contexte de la technique des situations conçue par G. Charrière. L'observation en classe est une méthode essentielle de recherche en didactique, principalement pour l'analyse des composantes des situations. Pour que l'observation puisse être fructueuse, il faut avoir effectué une première analyse préalable de la situation et ainsi disposer d'un cadre interprétatif pour observer les conduites des élèves. En nous appuyant sur des travaux menés en psychologie du travail (Leplat, 1976) nous avons adopté une méthode de description des situations afin de mettre de l'ordre dans le grand nombre de variables en jeu, qui frappe tout observateur en didactique. Nous avons choisi quelques éléments-clefs pour caractériser les conditions que les élèves doivent intérioriser pour avancer dans la résolution du problème posé par la situation. Ce sont: la consigne, les règles du jeu, le dispositif matériel, la relance du maître, les modes d'échange entre élèves. La mise au point de ces éléments, l'anticipation, puis la vérification, de la manière dont ils s'articulent lors du déroulement de la situation constituent, selon nous, les principales conditions de la gestion de la situation par le maître et de la compréhension de ce que font les élèves. Cette phase de description fournit, en plus de l'analyse conceptuelle de la tâche, les leviers maîtrisables de la situation avec lesquels on pense pouvoir comprendre les procédures des élèves et intervenir pour les faire évoluer.

A titre d'exemple, prenons la situation suivante: « trouver le nombre de dominos qu'il y a dans une boîte de dominos, sans l'ouvrir.» Dans cet énoncé seule la consigne est explicite. Les « règles du jeu», elles, sont implicites. Une première décision didactique concerne la place à donner à la recherche, par les élèves, de l'information pertinente. Une autre décision aurait été d'expliciter d'emblée les règles du jeu, à savoir qu'un domino est formé de deux parties et que sur chacune d'elles se trouve un chiffre compris entre 0 et 6. Une observation effectuée en sixième année a montré l'intérêt de laisser ces règles du jeu implicites à condition qu'une première étape de l'animation soit consacrée à dégager, lors d'échanges oraux dans la classe, les informations utiles et pertinentes. C'était en l'occurrence une manière de permettre à chaque élève de s'approprier les données du problème, de meilleure façon que par un simple énoncé. Cette description de la situation est à compléter ensuite par l'analyse de l'activité cognitive des élèves. En retour on obtient une meilleure compréhension de la situation et du rôle joué par les éléments qu'on a décrits.

L'activité cognitive des élèves

A cette phase de l'analyse didactique, le but est de voir comment les éléments de la situation qu'on a décrits fonctionnent comme composantes de *l'activité cognitive. Cette activité est constituée par l'interaction entre la situation et les élèves; l'analyse de la situation et celle de l'activité de l'élève sont interdépendantes. En effet la situation est conçue comme le lieu où l'élève actualise ses connaissances par l'intermédiaire des représentations dont il dispose. Il met alors en œuvre des procédures d'action ainsi que de symbolisation. En même temps, il s'approprie de nouvelles représentations à partir des exigences de la situation. Ainsi il enchaîne des procédures soumises à une adaptation constante. Actualiser est donc à comprendre au double sens de rendre manifeste et de réviser, ou mettre à jour, ces représentations, et ces connaissances, à partir des données de la situation. Il ne faut pas entendre par actualisation que tout est déjà là dans la tête des élèves et que la situation n'est qu'un révélateur; bien au contraire, elle offre une confrontation à leurs «modèles implicites» et par là-même peut entraîner leur évolution. Dans cette analyse de l'activité cognitive, le déroulement temporel de la situation constitue un aspect primordial. La question n'est plus celle des schémas ou invariants opératoires que l'on cherche à dégager de l'analyse des conduites observées à travers une situation expérimentale. En didactique la question devient celle du rapport entre les caractéristiques d'une situation construite pour enseigner quelque chose et l'actualisation des représentations des élèves tout au long de la résolution de la situation-problème. Dans ce rapport s'effectue l'appropriation des connaissances mathématiques.*

Reprenons l'exemple de la situation du nombre de dominos à trouver sans qu'on les voie. Nous avons observé, sur une heure de temps, les modifications progressives des procédures des élèves en fonction des relances du maître et des échanges qui ont eu lieu à l'intérieur du petit groupe. Un élève a tout d'abord identifié le problème à une «combinaison», et a effectué le produit $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 0$. Un autre a déclaré: «il faut faire un arbre». Mais lequel? Un troisième a débuté avec un tableau cartésien. La procédure du produit donnant comme résultat un très grand nombre (la multiplication par zéro reste encore un mystère!), elle a été abandonnée la première. Celle de l'arbre, malgré son insuccès, car l'arbre factoriel avait été choisi, est restée très solide, bien que remise en question devant les contradictions qui apparaissent entre la construction de l'arbre et sa lecture. Elle a même résisté au succès obtenu par l'élève qui utilise la procédure du tableau cartésien et qui expliqua comment on parvenait au résultat.

Très souvent nos observations nous ont révélé ce phénomène important: la résistance d'une procédure, qui chemine selon sa propre logique. Les élèves, engagés dans la recherche d'une solution, ne se satisfont pas des modèles des autres ni de celui du maître, même s'ils peuvent les conduire à la réussite, lorsqu'ils ne se les sont pas véritablement appropriés. Les exigences de la situation nécessitent qu'ils investissent leurs propres représentations du problème. Lorsqu'il y a échange ou emprunt de procédures c'est suite à des discussions qui relèvent d'un processus de preuve plutôt que de simple copie. Les composantes de la situation sont décisives dans la mise en œuvre de ce processus.

Dans l'analyse de l'activité des élèves une attention particulière doit être portée aux représentations symboliques. En effet l'introduction de nombreux diagrammes, schémas ou «écritures symboliques» selon le terme de C. Laborde, peut entraîner des confusions sur le statut de ces symbolismes et sur leur place dans l'activité mathématique. G. Vergnaud (1981) précise bien: «Faute de faire suffisamment la distinction entre le concept et sa représentation, c'est-à-dire entre le signifié et le signifiant, il arrive fréquemment qu'on prenne les symboles et les opérations sur ces symboles pour l'essentiel de la connaissance et de l'activité mathématique, alors que cette connaissance et cette activité se situent principalement au plan conceptuel» (p. 13). Une fois précisée la place des représentations symboliques, leur étude reste une question didactique importante car la construction des concepts mathématiques s'explicite et s'objective par des formulations caractéristiques, qui combinent le langage naturel et les «écritures symboliques». La formulation d'une connaissance mathématique n'est pas la simple expression, comme allant de soi, d'une conceptualisation déjà formée. Elle a ses propres règles d'élaboration, en liaison avec la construction conceptuelle. Trop souvent la question didactique est posée en des termes tels que «le passage au symbolisme», et considérée comme découlant naturellement de la maîtrise des notions par simple association des symboles adéquats. Or la question n'est pas si simple, et les maîtres le savent bien. Trois aspects sont à considérer:

– l'aspect cognitif: l'activité de symbolisation est liée au sens attribué aux exigences cognitives de la situation et à l'identification que l'élève est à même de faire de la connaissance en jeu. Ainsi utiliser l'arbre dans la situation des dominos nécessite qu'on se détache du modèle de l'arbre factoriel;

– l'aspect culturel: C. Laborde (1980) a bien montré l'importance de l'analyse historique des systèmes de signes et de leur syntaxe. L'élève qui s'y voit confronté s'en fait sa propre représentation, en fonction de ce qu'il est à même d'y investir et de la situation dans laquelle il se trouve. Il ne peut se l'approprier d'emblée. Ainsi, reconnaître les signes +, −, = ne suffit pas. Par exemple l'élève n'admettra pas que le signe = soit mis au début d'une équation parce que pour lui il veut dire: à la fin. Ou encore il ne pourra accepter 3 + 5 comme équivalent à 5 + 3 parce que dans le premier cas il estime que le signe + n'est pas correct car, dit-il «3 n'est pas plus que 5»;

– l'aspect social des échanges inter-individuels. Dans un contexte où il y a confrontation des points de vue avec d'autres élèves, la mise au point des codes appropriés se développe (Schubauer-Leoni, Perret-Clermont, 1980). Ainsi cherchons-nous des situations où sont réalisées différentes conditions d'interaction et de communication entre enfants pour favoriser la production et l'évolution d'écritures arithmétiques.

Je terminerai cet inventaire de quelques caractéristiques de la recherche en *didactique des mathématiques par une remarque sur les méthodes utilisées. J'ai fait principalement allusion à l'observation et l'expérimentation en classe. C'est une méthode indispensable, mais elle comporte aussi des limites. Comme l'indique G. Vergnaud (1981b) «L'expérimentation en classe n'est pas pour autant la voie royale de la recherche, d'une part parce qu'elle ne permet pas, même avec de bons moyens d'enregistrement d'analyser dans le détail tous les processus en jeu, d'autre part parce qu'elle est d'autant meilleure qu'elle peut s'appuyer sur les résultats obtenus par d'autres méthodes (entretiens individuels, expériences planifiées). En retour elle permet de déceler des phénomènes qu'il serait intéressant de regarder avec la loupe des entretiens individuels. En tout cas on ne voit pas comment la recherche en didactique pourrait faire l'économie de l'expérimentation en classe» (p. 16). Ces observations doivent être préparées par l'analyse de la situation et la mise au point des questions et des anticipations qu'on peut faire à propos des conduites des élèves. Cette préparation est capitale, faute de quoi l'observation reste anecdotique. Nos efforts en méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques doivent tendre à la fois à développer l'observation et l'expérimentation en classe en même temps qu'à utiliser des méthodes diverses et complémentaires, en particulier les entretiens individuels. Une seule méthode ne saurait à elle seule répondre aux exigences que réclame cet objet d'étude extrêmement complexe qu'est l'appropriation des connaissances mathématiques.*

Références

BROUSSEAU G. 1978. *L'observation des activités didactiques.* Enseignement élémentaire des mathématiques. IREM Bordeaux 18, 22-43.

— 1981. *Suggestions pour un programme de didactique pour la formation initiale des professeurs de mathématiques du second cycle du second degré.* Bulletin APMEP – 329, 453-462.

CHARRIERE G. 1980. *Exposé sur la technique des situations.* FPSE.

CHAVALLARD Y. 1980. *Cours sur la transposition didactique.* Première école d'été de didactique des mathématiques. Chamrousse.

CONNE F. 1981. *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire.* Thèse de doctorat. FPSE, Université de Genève.

FOULQUIE P. 1971. *Dictionnaire de la langue pédagogique.* PUF, Paris.

LABORDE C. 1980. *Communication au IVᵉ Congrès ICME.* Berkeley.

LEPLAT J. 1976 *Analyse du travail et genèse des conduites.* Revue internationale de psychologie appliquée. 25,1, 2-14.

SCHUBAUER-LEONI, M.-L. et PERRET-CLERMONT, A.-N. 1980. *Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs.* Recherche en didactique des mathématiques, 1, 3, 297-343.

VERGNAUD G., DURAND C. 1976. *Structures additives et complexité psychogénétique.* Revue française de Pédagogie 36, 28-43.

(voir suite p. 45)

Mathématique moderne? Mais non, pédagogie moderne!

par Jean-Jacques Walder

Je laisse à d'autres, plus qualifiés, la charge de parler des fondements mathématiques, des programmes, des répartitions de notions, des grands principes marquant la mathématique d'aujourd'hui. Puisque ce numéro 100 de Mathécole constitue un rendez-vous, je vais essayer de dresser un bilan personnel de douze ans de rénovation dans cette matière.

Je relèverai tout d'abord ce merveilleux élan pédagogique, provoqué par la mathématique moderne. La majorité des membres du corps enseignant qui se sont penchés sur ce nouveau programme acceptent de remettre en question leur propre situation en classe, que ce soit dans leur enseignement, leur personnalité ou à l'égard des élèves. Les parents, les journaux, les librairies, la radio, la télévision s'interrogent, accordent à l'enseignement une audience inconnue jusqu'alors.

Si on se demande «pourquoi enseigner la mathématique?», on se pose en fait la question «pourquoi l'école?», car, et c'est heureux, la mathématique est devenue la vie même de la classe, des élèves. Sans doute devra-t-on trouver encore bien des aménagements, mais l'essentiel est acquis, le mouvement est irréversible, la mathématique est et sera enseignée d'une façon intelligente, vivante et formative.

La seconde question «comment enseigner la mathématique?» n'est que la répétition de la première! Car, bien sentir pourquoi la mathématique est nécessaire implique qu'on a trouvé comment l'enseigner!

Cette nouvelle pédagogie n'est d'ailleurs par limitée à cette seule branche. Elle entraîne toute la vie scolaire dans une remise en question bénéfique et dynamique. Elle a enfin remis l'élève à sa vraie place, et ce n'est pas sa plus mince victoire. Par la mathématique, ses innovations, ses ambitions, mais aussi ses exagérations et ses outrances, l'école évolue (enfin!). Elle ne sera plus jamais comme avant. On lui a rendu un certain sens de la liberté, de la recherche, de l'adaptation à l'enfant.

Responsable du groupe «campagne», réunissant les maîtres genevois des classes à plusieurs degrés, je suis heureux de constater que, grâce à l'appui de nos autorités, nous avons pu nous réunir et créer un esprit communautaire particulièrement favorable à un renouvellement pédagogique. Je peux donc ajouter aux avantages énumérés ci-dessus un élément remarquable: le travail en commun de collègues réputés pour leur individualisme. Sans rien perdre de notre originalité, de notre personnalité, nous avons pu nous réunir et échanger de nombreuses expériences.

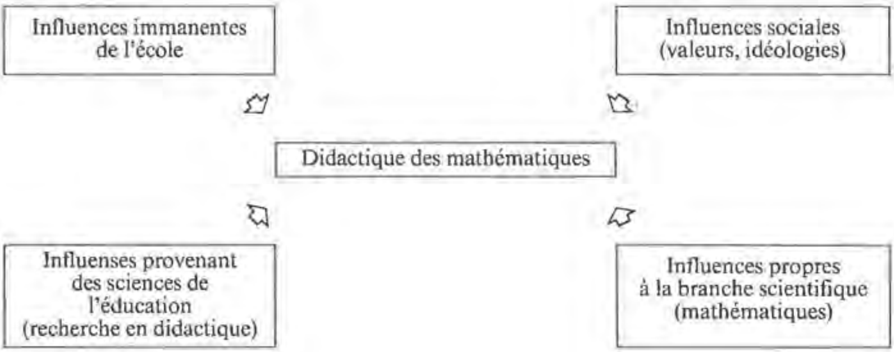
L'enseignement nouveau de la mathématique fut un événement crucial dans l'histoire de l'école, pour cette matière bien sûr, mais aussi pour la pédagogie toute entière.

Le rôle et l'impact de la recherche en didactique dans le domaine de l'enseignement des mathématiques

par Peter Knopf, Aarau

1. Introduction, délimitation du sujet

Afin de définir la recherche en didactique, on fera bien de définir préalablement ce qu'est la didactique – ici la didactique des mathématiques. Selon E. Wittmann (1975) la didactique des mathématiques est la science qui élabore des curricula praticables et qui les évalue de façon empirique. H. Lenné (1969) la définit comme la science qui aide à atteindre des objectifs pédagogiques à l'aide des méthodes et des contenus appropriés et à optimiser des processus d'apprentissage – et ceci en premier lieu avec des méthodes empiriques.
La didactique des mathématiques en tant que science dans le sens décrit ci-dessus est sujette à des influences multiples que nous essayons de représenter dans le schéma qui suit:



Dans cet article il ne sera question que des influences qui proviennent des sciences de l'éducation, ou plus précisément des influences de toute la recherche empirique qui présente un intérêt pour la didactique des mathématiques. De telles recherches peuvent donc avoir trait au curriculum, à l'élève, à l'enseignant, au milieu d'apprentissage, aux processus d'apprentissage ou d'enseignement – un large éventail du point de vue thématique aussi bien que méthodologique.
Si nous parlons de l'«influence» de la recherche en didactique sur l'ensei-

gnement des mathématiques, il y a un tas de questions qui se posent, telles que: qui est influencé? comment? quand? par quoi? pourquoi? Il faudrait distinguer les influences à long terme (par exemple les travaux de Piaget sur le développement cognitif) et les influences à court terme (par exemple l'évaluation d'un curriculum et les modifications qui s'ensuivent dans le manuel scolaire. L'influence de la recherche en didactique peut donc revêtir beaucoup de formes. Afin de tracer de telles influences, il nous paraît opportun de demander d'abord quel est l'état de cette recherche en didactique, si au point de vue thématique elle est conforme aux tendances des réformes dans l'enseignement des mathématiques au cours des dernières années, si les résultats de cette recherche se laissent transférer dans la pratique pédagogique, et finalement: comment la situation se pose-t-elle en Suisse? Pour en savoir davantage nous avons eu une série d'entretiens avec des collègues (que nous tenons à remercier de leurs idées et de leurs suggestions). Ces interlocuteurs sont eux-mêmes les utilisateurs potentiels de la recherche en didactique: se sont des gens actifs dans le domaine de l'élaboration de programmes d'études et de moyens pédagogiques, dans le domaine de la formation et du perfectionnement des enseignants ou qui sont eux-mêmes des chercheurs. Bien que nos interlocuteurs habitent un peu partout en Suisse, il ne s'agit pas d'un échantillon représentatif. En plus cela vaudrait certainement la peine d'avoir de tels entretiens aussi avec des enseignants ou avec des personnes actives dans l'administration de l'instruction publique.

2. La recherche en didactique et les tendances dans l'enseignement des mathématiques

Il n'est évidemment pas possible de résumer de façon exhaustive l'état de la recherche en didactique des mathématiques dans un article court comme celui-ci. Nous nous bornerons à rapporter quelques impressions, basées sur nos propres connaissances de la littérature pertinente et sur des recherches on-line dans des banques de données.

2. 1. Domaine de recherche

Beaucoup d'informations quant aux domaines de recherche sont à trouver dans E. G. Begle (1979) qui résume les recherches en des «variables critiques» de l'enseignement des mathématiques. Nous nous limiterons ici aux plus importantes.
Curriculum. Ici il s'agit par exemple de déterminer les conséquences sur les apprentissages des élèves, de l'explication des objectifs pédagogiques, de la séquence des contenus d'apprentissage, des méthodes proposées, du style langagier des manuels scolaires, du genre de problèmes posés et des straté-

gies de résolution proposées, etc. On peut constater aussi qu'une multitude de travaux visent à introduire de nouveaux contenus dans le programme d'étude (p. ex. calcul des probabilités, statistique), et à élaborer les projets d'évaluation correspondants. Deux tendances sont distinctes: on cherche à rapprocher l'enseignement du vécu quotidien des élèves et à augmenter l'interdisciplinarité de l'enseignement. Ces deux tendances sont partiellement dues à l'apparition de la calculatrice de poche dans les écoles. Ces recherches et développements sont pourtant trop segmentaires et dispersés; il ne sauraient constituer les bases solides pour une amélioration des curricula actuels. La variable «curriculum» est trop complexe et d'ailleurs difficilement séparable des autres.

Enseignants. Ces recherches concernent les conséquences du comportement de l'enseignant, de ses connaissances mathématiques, de ses attitudes envers la matière d'enseignement ou envers les élèves, de la qualité du rapport qu'il a avec ses élèves. Une série de projets posent la question: qui est le «bon enseignant», quelles sont ses caractéristiques?
Ici la recherche paraît avoir fourni quelques résultats fiables qui pourtant vont à l'encontre de certaines idées préconçues! Apparemment il est impossible de distinguer le «bon» du «mauvais» enseignant sur la base de comportements facilement observables, ce qui est étonnant. Autre chose étonnante: l'attitude de l'enseignant envers la matière enseignée et le succès des élèves semblent moins liés l'un à l'autre qu'on ne l'attendait. Les résultats de la recherche dans ce secteur ne donnent surtout pas d'indications sur la manière de concevoir une formation et un perfectionnement des enseignants plus effectifs. Il faudra donc se méfier de tous ceux qui feignent de très bien savoir ce qu'est un bon ou un mauvais enseignant.

Les élèves. Les principaux objets de la recherche dans ce domaine sont les répercussions, sur le succès à l'école, des attitudes de l'élève (de ses anxiétés particulièrement), de ses variables cognitives et de ses stratégies d'apprentissage. Entre autres on a constaté que ces variables cognitives restent inchangées durant de longues périodes, que les attitudes – tout en étant importantes – ont moins de rapports avec le succès que l'on attendait, etc. Mais malgré tous les résultats on est loin de posséder des bases fiables qui permettraient à l'enseignant de réagir, au vu des différences individuelles considérables, avec des méthodes individualisées appropriées.

Le milieu d'apprentissage. Les recherches dans ce domaine touchent par exemple à la différenciation des élèves selon leurs capacités, à l'atmosphère en classe, aux déterminants structurels et organisationnels, à la dimension des classes, à l'origine sociale et aux rapports qu'ont toutes ces variables avec le succès à l'école. Ici on se voit de nouveau confronté à une situation tellement complexe que la généralisabilité des résultats partiels est mise en question. Une constatation pourtant paraît permise: une différenciation des élèves selon leur niveau de capacité apporte peu ou rien à la plupart des élèves – sauf aux plus doués.

Les méthodes d'enseignement. Ici sont visées d'une part les répercussions des méthodes elles-mêmes, telles l'enseignement par situations, par projets, l'apprentissage par la découverte, drill, enseignement individualisé, etc. D'autre part il s'agit d'évaluer les effets d'aides pédagogiques: de la calculatrice de poche, d'unités d'enseignement programmées, de matériels structurés. Dans ce domaine de la recherche il semble exister une multitude de résultats qui pourraient être exploités. Cette exploitation se heurte pourtant à des obstacles auxquels nous vouerons notre attention dans la suite.

La résolution de problèmes. Faire apprendre aux enfants à résoudre des problèmes, voici l'objectif suprême de l'enseignement des mathématiques, comme tout le monde le sait. Il existe un nombre croissant de recherches qui cherchent à approfondir les connaissances sur le processus de la résolution de problèmes, sur les stratégies appropriées, sur le traitement de l'information par l'élève (p. ex. compréhension du texte dans lequel un problème mathématique est enveloppé). L'état des connaissances actuelles ne semble nullement correspondre à l'importance de ces questions pour la pratique de l'enseignement.
Les conclusions qu'impose cette liste sommaire de recherches et de résultats seront résumées sous le point 2. 3.

2. 2. Les tendances actuelles dans la didactique des mathématiques

Nous nous bornerons à quelques remarques sur les tendances internationales, puisqu'il existe une riche littérature à ce sujet. Les tendances actuelles sont très bien résumées dans UNESCO (1979); des détails peuvent aussi être trouvés dans H. Lenné (1969), E. Wittmann (1975) et V. Lindenam/M. Schindler (1978).
Les récentes réformes de l'enseignement des mathématiques sont d'abord caractérisées par un enrichissement (d'autre diraient: un gonflement) des programmes d'études par de nouveaux contenus. Puis on peut noter des tentatives de faciliter les apprentissages par des méthodes appropriées. Quant aux objectifs, l'accent est posé sur le travail mental. On parle d'une intellectualisation de l'enseignement, tandis qu'autrefois c'étaient les techniques du calcul numérique qui dominaient (cf. p. ex. F. Colmez, dans UNESCO, 1979). Après quelques perversités en forme de curricula hautement formels (A. Krygowska, dans UNESCO 1979), influencées par une vue structuraliste des mathématiques, on s'est remis récemment à partir du vécu quotidien des enfants et à accentuer l'aspect de l'application de la mathématique. C'est en accord avec cette tendance que des contenus tels que le calcul des probabilités, la statistique et l'informatique ont été introduits dans les programmes de base. Ces tendances sont renforcées par les développements dans le secteur des calculatrices de poche et des microordinateurs. Dans la crainte d'un gonflement ultérieur des programmes on commence à «essentialiser» l'enseignement des mathématiques en créant

des «programmes-noyau». Une autre tendance sous la bannière «back to the basic skills» restera, on l'espère, une mode confinée aux Etats-Unis. Le trait essentiel des nouvelles tendances nous paraît être l'effort de partir des processus d'apprentissage enfantins, dû à une nette influence de la recherche didactique et psychologique (Piaget, Bruner et autres), même si cette influence reste diffuse. Il convient en tout cas de souligner que les tendances curriculaires ont leurs origines dans un nombre très réduit de personnes et qu'elles ne sont pas fondées sur des connaissances assurées concernant l'apprentissage des mathématiques.

2. 3. L'influence de la recherche sur la didactique des mathématiques

Un rapport entre les objectifs de la recherche et les tendances didactiques existe sans doute. Le problème réside plutôt dans la qualité de ce rapport et dans la recherche elle-même.
A notre avis la recherche est tout à fait disposée à venir à la rencontre des besoins de la pratique; elle s'occupe d'une multitude d'aspects de l'enseignement des mathématiques. Le fait qu'une grande partie de cette recherche a lieu dans le monde anglo-saxon, surtout aux Etats-Unis, trouve son explication probablement dans l'optimisme qui y règne et qui est certain de pouvoir maîtriser même une chose aussi complexe que l'enseignement des mathématiques avec les moyens de la recherche scientifique. De plus cette sorte de recherche a une longue tradition dans le monde anglo-saxon. En URSS on constate également depuis quelque temps un rapport étroit entre la recherche psychologique fondamentale et la didactique des mathématiques. Quant aux pays francophones, à notre connaissance, la recherche en didactique s'y oriente vers l'observation minutieuse de l'enfant durant l'enseignement des mathématiques (cf. p. ex. Vergnaud, 1981, ou les travaux des IREM – instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques). Ces observations sont directement utilisées dans les cours de perfectionnement des enseignants. Dans les pays germanophones la recherche correspondante est quasi inexistante; nous ne saurions en expliquer les raisons.
On pourrait penser que le transfert des résultats de ces recherches, en partie tout de même assez proches de la pratique, à la réalité didactique ne se heurte qu'à un manque de bonne volonté, de compétence d'expectatives réalistes, ou d'information du côté des utilisateurs potentiels. Malheureusement il n'en est pas ainsi. A ce transfert s'opposent des obstacles difficiles à franchir qui sont propres à la recherche en didactique elle-même et que nous allons énumérer ici en forme de thèses.

a) La recherche en didactique est thématiquement fragmentée; en général elle ne concerne qu'un aspect ponctuel de l'enseignement des mathématiques. L'enseignant de son côté, de même que les responsables dans l'administration scolaire, se voient confrontés aux problèmes dans leur totalité et doivent intégrer toutes les facettes de ce domaine complexe.

b) Les recherches en didactique présentent souvent des imperfections au point de vue méthodologique. La généralisabilité des résultats n'est donc souvent pas donnée. En raison de sa complexité, l'objet d'étude se soustrait même à une multitude de variables et aux méthodes multivariées. Qui plus est, les résultats dépendent dans une forte mesure du contexte de l'expérience. A la difficulté de définir précisément l'objet de la recherche s'ajoute celle que la méthodologie de la recherche ne se laisse pas simplement emprunter aux sciences dites exactes. Des conséquences concrètes pour l'enseignement des mathématiques ne sont donc déduisibles qu'avec précaution. En outre, l'enseignement lui-même est sujet à des changements au cours des années, de façon que des résultats vieux de quelques années ne sont peut-être plus valables et qu'il est presqu'impossible d'accumuler du savoir.

c) Les échelles temporelles de la recherche (y compris de délai jusqu'à ce qu'elle devienne effective) et des réformes de l'enseignement des mathématiques sont similaires en ce qui concerne la réalisation (10 à 20 ans). Elles diffèrent pourtant en tant que la recherche est rarement là quand on a besoin d'elle; ou bien elle est là, mais on ne l'écoute pas parce que les utilisateurs potentiels ne voient pas le problème ou le voient différemment.

d) La production de savoir va croissant, tandis que la capacité d'assimilation des utilisateurs reste la même. La forme ainsi que le langage dans lesquels les résultats sont présentés rendent difficile ou impossible cette assimilation aux généralités (enseignants, politiciens). En outre les canaux de communication existants ne suffisent nullement à ces besoins – une constatation qui vaut pour la Suisse tout particulièrement.

3. Le rôle et l'impact de la recherche en didactique des mathématiques en Suisse

Dans ce qui suit, nous essayons de résumer quelques impressions, propositions, problèmes communs, mais aussi des différences qui se sont dégagés au cours de nos entretiens. Le catalogue de questions, envoyés préalablement aux interlocuteurs, touchait aux problèmes suivants:

- impact de la recherche en didactique dans les propres activités professionnelles
- difficultés dans l'application des résultats de cette recherche
- mesures possibles afin de minimiser ces difficultés, dans l'ordre de priorité
- priorités aux points de vue thématique, organisationnel et méthodologique quant à la recherche en didactique.

Les résultats de ces entretiens sont contenus dans les points 3.2 à 3.4.

3. 1. La recherche en didactique des mathématiques en Suisse

La liste des projets entrepris en Suisse dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques n'est pas longue. A l'exception des travaux dans le secteur de la psychologie cognitive de H. Aebli (Université de Berne), ces recherches sont le privilège de la Suisse romande. Le projet le mieux connu, c'est le vaste programme d'évaluation de l'enseignement renouvelé des mathématiques pour les degrés 1 à 6 de l'IRDP (Institut romand de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel) qui poursuit quelques autres études et travaux de développement dans ce même contexte. En outre il faut mentionner les recherches qui ont lieu à l'Université de Genève et que l'on pourrait qualifier, un peu sommairement peut-être, de «piagétiennes» (J. Brun, A.-N. Perret; Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, FPSE), de même que les travaux relatifs à la genèse du concept des nombres naturels (R. Droz, Université de Lausanne). Ces recherches qui toutes se groupent autour des théories piagétiennes sur le développement cognitif – c'est aussi le cas pour les activités de A. Suarez, de l'EPFZ – appartiennent à la sphère de la recherche fondamentale et ont par conséquent peu d'impact direct pour la pratique de l'enseignement.
A une catégorie de recherche plus proche de la pratique, qui tend plutôt vers le côté «développement» et qui s'occupe par exemple de l'enseignement par situations, appartient ce qui se passe dans des institutions telles que le Service de la recherche pédagogique (SRP; Genève), le Centre de recherches psychopédagogiques (CRPP; Genève également), le Centre vaudois pour l'enseignement mathématique (CVEM) et l'IRDP. Signes distinctifs de ces travaux de développement dans le domaine de la didactique des mathématiques: un rapport souvent étroit avec la formation continue des enseignants, une approche plutôt pragmatique de la théorie et de la recherche fondamentale des universités, et une coopération informelle et pragmatique entre ces institutions et avec l'université (surtout la FPSE genevoise).
La différence principale entre les approches de la didactique en Suisse romande et en Suisse alémanique est qu'en Romandie les rapports entre la recherche et le développement s'appuient sur une tradition (p. ex. Vergnaud). En Suisse alémanique la recherche en didactique des mathématiques n'a jamais existé (cf. 2.3 et J. H. Lorenz, 1980). Par conséquent on ne s'y est jamais habitué à évaluer scientifiquement les aides pédagogiques, à faire les recherches correspondantes et à intégrer les enseignants dans de tels projets. La raison principale en est probablement un écart qui existe en Suisse alémanique entre la formation des enseignants et l'université. Ces facteurs ont des retombées sur la manière d'introduire des réformes en Romandie et en Suisse alémanique respectivement (cf. P. Knopf, 1980).

3. 2. L'impact de la recherche en didactique dans les activités professionnelles de nos interlocuteurs

Ce qui nous a paru le plus intéressant dans les réponses à la question y relative, c'est que tous (exception faite des collègues pour qui la recherche fait partie du métier) ont nié l'existence d'un impact direct. Les raisons en sont:

- on n'est pas informé sur cette sorte de recherche;
- on n'a pas le temps de s'occuper de toute cette littérature, ou on a des difficultés à se la procurer;
- les résultats de recherche ne sont pas jugés importants pour ce qu'on fait;
- d'autres aspects du processus de réforme sont plus importants que la recherche (p. ex. le perfectionnement des enseignants).

De plus ont été mentionnées des raisons qui correspondent aux obstacles qui s'opposent au transfert recherche/pratique, décrits sous 2.3.
D'autre part, des influences indirectes sont franchement avouées, p. ex. par Piaget, Bruner, etc. Les travaux de ces derniers sont considérés comme des lignes directrices et comme des sources d'inspiration, aidant à imaginer ce que devrait être un enseignement des mathématiques qui part de l'enfant (et non de l'enseignant ou des manuels disponibles).

3. 3 Difficultés dans l'application des résultats de recherche

Pour tous ceux de nos interlocuteurs qui sont engagés dans des réformes, c'est la mise en pratique des idées de réforme qui est prioritaire, et non le transfert résultats de recherche/pratique. La réalisation d'idées de réforme se heurte pourtant à des obstacles similaires. Des problèmes essentiels sont cernés au niveau de l'administration et de la politique. Il paraît que là la dimension temporelle est mal jugée et qu'on ne comprend pas que des idées de réformes peuvent seulement être réalisées par de longs efforts dans le secteur de la formation continue des enseignants. Ceci a pour conséquence par exemple qu'une réforme est évaluée avec des efforts massifs, il est vrai, mais une fois seulement, au lieu de faire une étude longitudinale qui tienne compte de la dimension temporelle d'une réforme.
D'autres conséquences sont que l'observation de l'enseignement comme méthode d'évaluation qualitative n'est pas prise au sérieux (ce qui relève aussi parfois de raisons financières), ou que le perfectionnement des enseignants s'oriente vers de nouveaux moyens d'enseignement, vers les contenus donc, au lieu de thématiser les comportements – ce qui fait que l'enseignement reste à peu près ce qu'il était. Ces remarques ne veulent pas nier l'utilité d'évaluations scientifiques des réformes de l'enseignement des mathématiques; celles-ci peuvent fournir de précieuses indications pour la révision des manuels et des programmes d'études (exemple: IRDP). Mais

une telle évaluation ne suffit pas pour réaliser une réforme, de même qu'elle ne prouve pas que la réforme a été introduite.
Mais les raisons des difficultés qu'on a à appliquer les résultats de recherche se situent aussi du côté de la recherche elle-même. Des curricula par trop détaillés, par exemple, peuvent se transformer en un terrorisme pédagogique, si scientifiquement construits qu'ils soient, réduisant la liberté nécessaire de l'enseignant et détruisant l'unité des contenus, des méthodes et des activités des élèves. Autres reproches que nos interlocuteurs ont adressés à la recherche: la recherche pratique «l'art pour l'art»; les chercheurs ne font aucun effort de communiquer avec les enseignants; la recherche est trop élitaire, elle ne tient pas compte de tous ces élèves de l'école obligatoire qui «en ont jusque-là»; elle se moque de la praticabilité de ses résultats; elle ne tient pas compte des besoins réels des utilisateurs potentiels.
Finalement il faut aussi énumérer les obstacles qui existent du côté des praticiens: les enseignants n'aiment pas la théorie; résistance générale contre des réformes et de nouvelles idées; les contenus sont déterminés selon des points de vue propres aux mathématiques et non selon ceux des processus d'apprentissage ou du développement cognitif de l'élève ou même de ses besoins affectifs; formation lacunaire des enseignants, etc.
On doit conclure que l'impact de la recherche en didactique sur l'enseignement des mathématiques est marginal en Suisse (comme autre part) et que même là où l'on use (ou abuse) d'elle pour soutenir une réforme, son rôle est minime et se perd dans les rapports complexes et les jeux d'intérêts entre les différents groupes concernés (enseignants, administration, public, ... les élèves aussi doivent être mentionnés).
Pour une série de raisons, surtout à cause de son niveau de développement et de son manque de prestige, elle n'est pas non plus capable de jouer son rôle d'instance de réflexion critique de ce qui se passe dans l'enseignement. Il s'en suit que seulement peu d'impulsions aptes à contribuer à une amélioration de l'enseignement (sans vouloir préciser ce que cela signifie) sont le fait de la recherche en didactique.

3. 4 Mesures prioritaires aptes à augmenter l'utilité de la recherche pour la pratique

Les entretiens que nous avons eus ont apporté une multitude de propositions. Elles se réfèrent à l'organisation de la recherche par rapport à la pratique, à la thématique et à la méthodologie, ces trois domaines étant pourtant interdépendants.

Organisation de la recherche
Si l'on accepte la fonction critique de la recherche en didactique et même qu'on la considère souhaitable, il y a toute une série de mesures qui s'imposent.

Afin surtout de nouer des liens plus étroits entre la recherche et la pratique, les mesures suivantes seraient efficaces:

- Création d'institutions interdisciplinaires qui intègrent la recherche et le développement en didactique et la formation de base aussi bien que la formation continue des enseignants. Des modèles qui fonctionnent existent à l'étranger. Toutefois, des formes rudimentaires sont à signaler aussi en Suisse (SRP, CRPP et FPSE à Genève). Des modèles possibles sont les Teacher Centers, tels qu'ils existent en Angleterre, au Canada et aux Etats-Unis, ou les IREM français. De telles institutions devraient faire partie des universités ou présenter un caractère universitaire (et avec elles toute la formation des enseignants – aussi celle des enseignants primaires – sans pourtant adopter des attitudes élitaires ni la rigidité des conditions d'admission et des formes d'enseignement. Ces institutions devraient réaliser la formation des formateurs et des enseignants dans des groupes hétérogènes et intensifier les contacts entre la recherche et la pratique. Une autre tâche de ces institutions serait de recueillir des résultats de recherche, de les rendre compréhensibles (de les vulgariser) et, à travers la formation continue, de les transformer en réalité dans l'enseignement.
- Pour les enseignants, pour leurs formateurs et pour les producteurs de moyens d'enseignement, une formation continue en forme de congés, utilisés pour des activités de recherche, devrait aller de soi.
- Ce qui devrait aussi aller de soi, c'est que le chercheur ait accès aux classes et à des activités d'enseignement.
- Pour la réalisation de réformes, c'est probablement des groupes de recherche à l'intérieur de l'école (exemple: au CRPP genevois) qui seraient importants aussi. Ces groupes devraient être représentés dans la direction de l'école. Et vraisemblablement on ne pourra se passer de classes expérimentales (en tenant compte de toutes les précautions nécessaires).
- Les mesures institutionnelles appropriées devraient garantir la liberté de la recherche et de la réflexion sur l'enseignement.

Thèmes et méthodes de la recherche

Nos interlocuteurs ont constaté à l'unanimité quasi totale que c'est la recherche qui doit se rapprocher de l'enseignement et de la formation des enseignants. Les thèmes de recherche abondent:

- Comment jouent les interactions entre l'enseignant et l'élève?
- Quel est le rôle du succès ou de l'échec pour le développement de la personnalité de l'enfant?
- Quelles corrélations peut-on déceler entre l'attitude de l'enseignant et les contenus de l'enseignement, et quelles conséquences ont-elles dans son comportement?
- Analyse des pré-requis cognitifs et des réseaux conceptuels nécessaires à la maîtrise de concepts mathématiques donnés; analyse des activités ma-

thématiques correspondantes de l'élève et coordination des contenus de l'enseignement selon les aspects de l'apprentissage.
- Développement de méthodes d'enseignement individualisées afin de faire face aux différences individuelles énormes entre les enfants (il n'y a pas d'enfants conformes à Piaget).
- Développement de méthodes d'appréciation du travail des élèves orientées vers les objectifs pédagogiques et dont l'abus pour des processus de sélection soit impossible.
- Quels sont les comportements erronnés les plus fréquents du côté des enseignants? Du côté des enfants, quelles sont les principales difficultés d'apprentissage?

Cette liste pourrait naturellement être prolongée à volonté. Quant aux méthodes de recherche, il serait prioritaire de développer les instruments d'observation avec lesquels les problèmes mentionnés pourraient être traités. Ces instruments devraient aussi être utilisables par les enseignants. Tout en rapprochant la théorie et la pratique, des critères de scientificité (p. ex. reproductibilité des résultats) doivent rester en vigueur. Que ce jeu d'équilibre entre praticabilité et sciencificité puisse réussir et produire à la fois un enseignement amélioré comme aussi des enseignants et enfants plus heureux, cela dépend d'un grand nombre de facteurs. Il est pourtant permis d'espérer.

(Traduit par W. Bauhofer)
Centre suisse de coordination pour la recherche en matière d'éducation

Bibliographie

BEGLE E.G. 1979. *«Critical variables in mathematics education»*. Mathematical Association of America.

KANTOWSKI M.G. et al. 197 . *«Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics»*. Chicago University, Stanford University.

KNOPF P. 1980. *«Der Taschenrechner in der Schule»*. Schweizerische Koordinationsstelle für Bildungsforschung 80: 01, Aarau.

LENNÉ H. 1969. *«Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland»*. Klett, Stuttgart.

LINDENAM V. et SCHINDLER M. 1975. *«Neuorientierung des Mathematikunterrichts»*. Vieweg, Braunschweig.

LORENZ J.H. 1980. *«Empirische Forschung in der Mathematikdidaktik»*. In Journal für Mathematikdidaktik, Jg. 1, Heft 1/2, Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn.

NISBET J. et BROADFOOT P. 1980. *«The impact of research on policy and practice in education»*. Aberdeen University Press (UK).

UNESCO. 1979. *«Tendances nouvelles dans l'enseignement des mathématiques»*. Paris.

VERGNAUD G. 1981. *«L'enfant, la mathématique et la réalité»*. Collection Exploration Recherches en sciences de l'éducation, P. Lang, Bern.

WITTMANN E. 1978. *«Grundfragen des Mathematikunterrichts»*. Verlag Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn.

Jeux pédagogiques dans l'enseignement de la mathématique à l'école primaire *

par Linda Allal, faculté de psychologie et des sciences
de l'Education de Genève
avec la collaboration
d'Edith Baeriswil, Gianreto Pini et Tra Bach Mai

Si dans les domaines de l'éducation préscolaire et de l'éducation spécialisée la valeur pédagogique des jeux est reconnue depuis près d'un siècle (1), c'est beaucoup plus récemment – lors des rénovations de curriculum des années 60-70 – que les jeux acquièrent un statut didactique «officiel» dans l'enseignement des branches principales à l'école primaire et secondaire. Lorsque le nouveau programme d'enseignement de la mathématique est introduit en Suisse romande en 1972, les brochures méthodologiques accordent au jeu une place à la fois privilégiée (toutes les propositions d'activités didactiques sont dénommées «jeux») et mal définie (faut-il appeler jeu toute situation qui comporte des manipulations de matériel concret et des échanges entre élèves?). En ré-éditant les brochures méthodologiques des degrés 1P (1979) et 2P (1980), c'est par le terme «activité», plutôt que celui de «jeu», qu'on désigne les «scénarios» d'animation proposés aux maîtres. Chaque activité est suivie, cependant, d'une série de «suggestions» indiquant divers types de jeux (de cartes, de dés, de dominos, de constructions géométriques...) susceptibles d'être exploités en classe. Dans un commentaire sur la signification de ces changements, Samuel Roller (1980, p. 13) a relevé le risque d'une «sorte de bannissement du jeu au profit de plus sérieux, l'activité» car «dans notre pays de labeur on joue **après** *le travail...». Ce risque, sans doute réel, nous paraît cependant moindre que celui présent dans les éditions initiales: à savoir, la banalisation de l'idée même de jeu. Si l'on peut regretter que le jeu n'intervienne dans les nouvelles brochures qu'à titre de suggestion, après l'activité animée par le maître, il faut noter que les jeux suggérés ont au moins le mérite d'être authentiquement «jouables» par des groupes d'élèves, ce qui n'était pas le cas des activités dites jeux des brochures initiales. Notons aussi que si le maître veut développer une approche pédagogique s'appuyant sur le jeu, il trouvera dans la revue Math-Ecole de nombreux articles décrivant des dispositifs de jeu, anciens (échecs, yat...) et nouveaux («Le compte est bon...»), qui se prêtent à plusieurs niveaux d'exploitation sur le plan des contenus mathématiques et des interactions entre joueurs.*
Selon les enquêtes menées par l'IRDP (cf., entre autres, Perret, 1978), la vaste majorité des enseignants romands pratiquent régulièrement les «jeux» proposés par la méthodologie et, dans un grand nombre de cas, utilisent également du matériel de jeu préparé par eux-mêmes ou apporté par

* *Cette recherche est réalisée grâce à la subvention N° 1.242.0.80 du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.*

les élèves. Les résultats d'un sondage récent (2) suggèrent toutefois qu'au delà d'une adhésion de principe à l'idée, voire à l'idéologie, de la valeur pédagogique du jeu, il existe des pratiques et des conceptions du jeu très diverses, et parfois antinomiques. Pour certains enseignants interrogés, «tout jeu est éducatif» et, réciproquement, d'après les exemples qu'ils citent, toute activité à but éducatif est un jeu. D'autres enseignants ne partagent pas cette conception «fourre-tout» du jeu et, à divers degrés, s'inquiètent de ses conséquences: «les élèves appellent jeu ce que le maître appelle jeu»; l'école envahit «un espace privilégié qui appartient à l'enfant».

Etant donné la diversité des significations du terme jeu, non seulement chez les praticiens de l'éducation mais aussi dans le discours scientifique, il convient de préciser le sens du mot jeu dans le cadre de notre recherche, ainsi que les points de repère que nous adoptons pour distinguer les jeux de deux autres dispositifs pédagogiques – exercices et situations-problème –présents dans l'enseignement de la mathématique.

Jeux, exercices et situations-problème

Le terme jeu a une multitude de significations, quotidiennes et scientifiques, d'autant plus nombreuses en français qu'il n'existe pas de distinction lexicale semblable à celle faite en anglais entre «play» et «game». Sans retracer ici les différentes interprétations théoriques de la fonction du jeu sur le plan psychologique et social, on peut noter deux tendances contrastées dans le traitement du jeu.

L'une va dans le sens d'une extension du concept jeu (sinon littéralement, au moins métaphoriquement) à la quasi-totalité de la vie sociale et culturelle de l'espèce humaine. Ainsi, par exemple, dans l'éventail des formes (et déformations) du jeu définies par Caillois (1967, p. 122), sont mentionnés non seulement loteries, sports, théâtre..., mais aussi examens, cérémonial..., et enfin superstition, alcoolisme, drogues...

D'autres ouvrages tendent plutôt vers une restriction du concept jeu à l'une de ses dimensions qui serait privilégiée selon l'orientation théorique adoptée par l'auteur. Ainsi, par exemple, dans la perspective psychanalytique formulée par Lecoultre-Cifali (1977), où il s'agit «d'approcher le jouer... comme espace ludique d'une création par le sujet» (p. 41), les jeux de règles proposés aux élèves à l'école – mais aussi un grand nombre de jeux réglés, voire ritualisés, transmis de génération en génération au sein de la culture enfantine – se situent en dehors, ou en tout cas en marge, de l'aire du «jouer créateur» dont «l'essence... réside dans la production de l'imprévu, de l'insolite...» (p. 48).

Dans les analyses postulant un lien étroit entre des manifestations successives du jeu et des mécanismes généraux du développement psychologique, le «jeu de règles» (game) apparaît soit comme une transformation socialisée du «jeu symbolique» (play) plus primitif (cf. Piaget, 1945, pp. 149-153), *soit comme un «travestissement codifié, organisé du «play» créateur» (Lecoultre-Cifali, 1977, p. 58). En analysant cette opposition, Lecoultre-Cifali conclut que l'apparition de la règle ne conduit pas forcément à la répression du jouer créateur, car «le ludique relève d'une langue de désir qui n'a pas d'âge» (p. 61). Les recherches de Bruner et Sherwood (1976) et de Garvey (1977) montrent, par ailleurs, que si l'une des caractéristiques dominantes du «play» de l'enfant est le plaisir pris dans la violation ou la transformation d'une «règle» (convention, habitude, attente), il y a également émergence très précoce de conduites de jeu social («games») où le plaisir de jouer vient du respect mutuel de certaines «règles»: régularités de procédure dans les jeux de «Peekaboo» entre mère et enfant, conventions établies entre enfants («cette boîte est le lit d'Annabelle») dans le contexte du jeu symbolique, codes suivis dans des échanges ritualisés de paroles et de gestes.*

Lorsqu'on parle de jeux dans l'enseignement de la mathématique à l'école primaire, il s'agit avant tout du jeu au sens «game». Cette priorité accordée au jeu-game est probablement inévitable car l'essentiel de la sphère du «play» échapperait de toute manière à une prise en charge institutionnalisée par l'école. Il serait souhaitable, cependant, que les situations de jeu proposées en classe relèvent au moins du «game» authentique – où le «play» insolite peut toujours surgir – où le contrôle du jeu est exercé en co-animation par les élèves-joueurs, et non pas par l'enseignant-animateur, autorité externe au jeu.

Un jeu-game est toujours caractérisé par un ensemble de règles ayant un statut propre, en tant que dispositif, dissociable des conduites des individus qui y jouent. Ce dispositif est constitué par deux types de règles:

1) règles définissant le cadre («frame») du jeu:
– la disposition du matériel,
– les limites (début, fin) d'une partie,
– l'alternance des tours à l'intérieur d'une partie,
– les démarches de jeu requises, permises et interdites à chaque tour,

2) règles définissant la structure d'interdépendance entre joueurs:
– les rapports de compétition et/ou de coopération en cours de jeu,
– les critères de réussite (individuelle, collective) en fin de partie.

La plupart des jeux de groupe utilisés à l'école (cf. Kamii et DeVries, 1980), comme la plupart des jeux dits «de société», se basent sur des règles de compétition interindividuelle. Il est possible, cependant, de proposer aux élèves des situations de jeu (inventées par le maître, ou adaptées de jeux existants) où les règles prévoient d'autres structures d'interdépendance:
– compétition entre équipes, avec collaboration au sein de chaque équipe,
– coopération entre joueurs pour atteindre un but commun (critère de réussite fixe, ou dépassement du score de la partie précédente),
– dispositifs de jeu parallèle où chaque joueur cherche à atteindre un critère de réussite, ou à battre son score précédent.

Dans toutes ces situations de jeu, y compris les jeux basés sur la compétition interindividuelle, la signification de la réussite et de l'échec est différente de celle que l'élève rencontre habituellement dans des situations de non jeu à l'école. La différence principale réside dans le fait que la réussite ou l'échec d'un joueur s'inscrit dans une **partie** *(unité conventionnelle d'une suite de parties en principe sans limite); le résultat d'un jeu n'est donc jamais définitif, il peut toujours changer à l'issue d'une nouvelle partie. Par ailleurs, lorsque des jeux comportent, comme c'est souvent le cas, des aspects aléatoires (introduits par le tirage de cartes, le jet de dés, etc.), le résultat d'une partie ne dépend pas uniquement de la compétence du joueur. La relation compétence-réussite – si souvent inexorable dans les activités scolaires – se trouve ainsi atténuée: l'élève «faible» en mathématique peut parfois gagner au jeu face à un adversaire plus doué, ou en collaboration avec d'autres élèves.*
Selon la définition proposée ci-dessus, des dispositifs de jeu se distinguent assez nettement des leçons, ou activités semblables, animées et contrôlées par le maître (cf. aussi, à ce propos, Kamii & DeVries, 1980, p. 2). Il est plus difficile, par contre, d'identifier des points de repère adéquats pour distinguer des jeux de deux autres dispositifs pédagogiques:

- *des exercices, outil d'enseignement classique présenté habituellement sous forme de fiche écrite,*
- *des situations-problème, dispositif plus dynamique – de recherche, de découverte, d'invention, de construction – mis en valeur sous plusieurs dénominations (Dienes (1974, p. 19) parle de «situations problématiques», le Groupe mathématique du SRP (1978, p. 3) de «situations de mathématisation») dans l'enseignement rénové de la mathématique.*

Selon le schéma proposé dans la figure 1, il existerait un continuum d'activités didactiques susceptibles d'être prises en charge par les élèves, individuellement ou en petits groupes. A un pôle du continuum, il y aurait l'exercice très restreint, centré sur l'exécution d'une seule opération entièrement désignée par une consigne, à l'autre la situation-problème très ouverte où l'élève s'engage dans l'exploration libre des possibilités offertes par un matériel (de type concret ou abstrait) avant de poursuivre plus systématiquement l'une ou l'autre des pistes qu'il aura identifiées comme problème. Des jeux sont constitués dans ce schéma par la projection des conventions typiques du «game» sur les dimensions du continuum entre exercices et situations-problème. Les conventions de jeu représentent donc une sorte «d'habillage de la tâche» (Brun, 1979, pp. 17-18) qui fait intervenir dans le traitement des contenus mathématiques de la tâche des contraintes extra-mathématiques, propres au jeu.
Certains jeux très simples (p. ex. le jeu de cartes «bataille»), comportant une seule opération à effectuer à chaque tour (comparaison des valeurs numériques de deux cartes), se rapprochent de l'exercice, mais en raison de leur habillage en conventions de jeu, peuvent être investis d'un aspect ludi-

	SITUATION-PROBLEME		EXERCICE
CONSIGNE/ MATERIEL	question ouverte ou indication d'un but général/ matériel porteur de plusieurs "problèmes" potentiels		spécification, par consigne ou mise en forme du matériel, du problème à résoudre, d'opération(s) à effectuer
DEMARCHE(S) DE SOLUTION	multiples (avec degré d'optimalité variable); de type heuristique et/ou algorithmique	J E U X	unique, de type algorithmique
ACTIVITE DE L'ELEVE	identifier et formuler des problèmes à résoudre; organiser et coordoner une séquence de procédures		résoudre le problème posé; effectuer l'(es) opération(s) désignée(s)

CONVENTIONS DU JEU

règles définissant :
. le cadre du jeu
. la structure d'interdépendance entre joueurs

Figure 1. Jeux, exercices et situations-problème.

que par des enfants de 5-7 ans. La plupart des jeux, plus complexes et plus ouverts, se situent nettement dans la zone de la situation-problème. Les règles-consignes et le matériel prévus par ces jeux sont porteurs de plusieurs «problèmes» potentiels que le joueur doit identifier, formuler et reformuler en cours de jeu. A l'intérieur des contraintes liées au cadre du jeu, le joueur peut élaborer des stratégies plus ou moins complexes, combinant des procédures heuristiques et algorithmiques, qui relèvent de sa représentation des enjeux – conceptuels et interpersonnels – à chaque étape du jeu.

Orientation de notre recherche

Dans sa phase actuelle, notre recherche s'oriente vers l'étude des modes de fonctionnement des élèves des degrés 1P à 3P dans des situations de jeu qui se déroulent en petits groupes (2 à 4 joueurs), sans l'intervention directe du maître. Les dispositifs de jeu créés pour cette recherche se rapportent aux objectifs de l'avenue «Opérations» du programme romand de mathématique. Plusieurs variantes de chaque jeu seront expérimentées afin de préciser les effets de différentes structures d'interdépendance sur les conduites des élèves. Les données seront recueillies par l'observation des élèves pendant le déroulement de plusieurs parties de jeu et par des entretiens avec les élèves en fin de partie. L'analyse des données portera sur trois dimensions des démarches de jeu et des interactions entre joueurs:

a) leurs conduites face aux contenus du jeu (compréhension et exploitation des concepts mathématiques impliqués par le jeu),
b) leurs conduites face à la structure du jeu (exploitation des possibilités stratégiques du jeu, transformations des règles du jeu),
c) leurs conduites de régulation interactive (auto-évaluation, évaluation mutuelle), en rapport avec a) et b).

Dans cette analyse, nous essayerons de mettre en évidence les processus de «co-animation» et de «co-évaluation» qui caractérisent la transposition du jeu dispositif, défini par des règles, en jeu-situation, entretenue par la dynamique des conduites des joueurs. Par notre étude de cette transposition, nous espérons éclairer les apports et les limites des jeux de groupe dans la pratique d'une pédagogie différenciée où les élèves prennent en charge des activités diverses pendant que le maître s'adresse à un sous-groupe particulier, voire à un enfant individuellement.

Essais pilote d'un jeu de décomposition du nombre

Afin de préparer les procédures d'expérimentation qui seront entreprises pendant la prochaine année scolaire, nous avons réalisé une série d'essais pilote au printemps 1981 avec des élèves des classes 1P, 2P et 3P de deux *écoles publiques du canton de Genève. Ces essais ont porté sur un total de 43 parties de jeu (7 parties avec 2 groupes de 1P, 23 avec 6 groupes de 2P, 13 avec 3 groupes de 3P).*

DESCRIPTION DU JEU

Etant donné l'importance accordée au concept de décomposition du nombre dans les nouvelles brochures méthodologiques des degrés 1P et 2P, il nous a semblé intéressant de développer un dispositif de jeu où les élèves pourraient **exploiter** *ce concept dans un cadre plus ouvert et dynamique que celui des exercices proposés par les fiches de la méthodologie.*

Le matériel du jeu est constitué:
- *d'une planche divisée en deux parties, une pour chaque joueur (voir Fig. 2),*
- *d'un ensemble de 10 cartons verts comportant chacun un nombre compris entre 1 et 20,*
- *d'un sac contenant 160 petits cartons carrés: la plupart des carrés comportent un nombre de 0 à 9, mais 10% d'entre eux sont blancs.*

Au début d'une partie, les 10 cartons verts sont posés à l'envers devant la planche et 10 petits cartons carrés sont fournis à chaque joueur. A tour de rôle, chaque joueur tire un carton vert et le place dans le cadre au milieu de la planche. Il doit poser ensuite, de son côté de la planche, des petits carrés comportant des nombres dont la somme est égale au nombre inscrit sur le carton vert. S'il dispose de carrés blancs, il peut les utiliser en y inscrivant un nombre de 0 à 9. Lorsqu'il ne peut pas effectuer ces démarches avec les carrés à dispositions, il tire, un par un, de nouveaux carrés jusqu'à ce qu'il obtenne des nombres utilisables. En cas d'erreur repérée par l'autre joueur, il doit reprendre les carrés mis sur la planche et le carton vert est retourné pour indiquer le tour «perdu». Le but du jeu, tel qu'énoncé aux élèves, est de «mettre le plus de carrés possible sur la planche et d'en avoir le moins possible qui restent à la fin». Le score final d'un joueur est le nombre de carrés posés sur la planche moins le nombre de carrés restants.
La plupart des essais pilote ont porté sur une première version du jeu basée sur la compétition interindividuelle entre deux joueurs (l'élève avec le score le plus élevé «gagne» la partie). A quelques séances nous avons essayé deux versions alternatives du jeu, l'une impliquant la coopération entre deux joueurs pour atteindre le meilleur score commun possible, l'autre étant basée sur la compétition entre deux équipes de deux joueurs qui collaborent au sein de leurs équipes respectives.

GRILLES D'OBSERVATION

Les premiers essais ont démontré la nécessité d'établir deux types de grilles, remplies par deux observateurs, pour pouvoir enregistrer avec précision

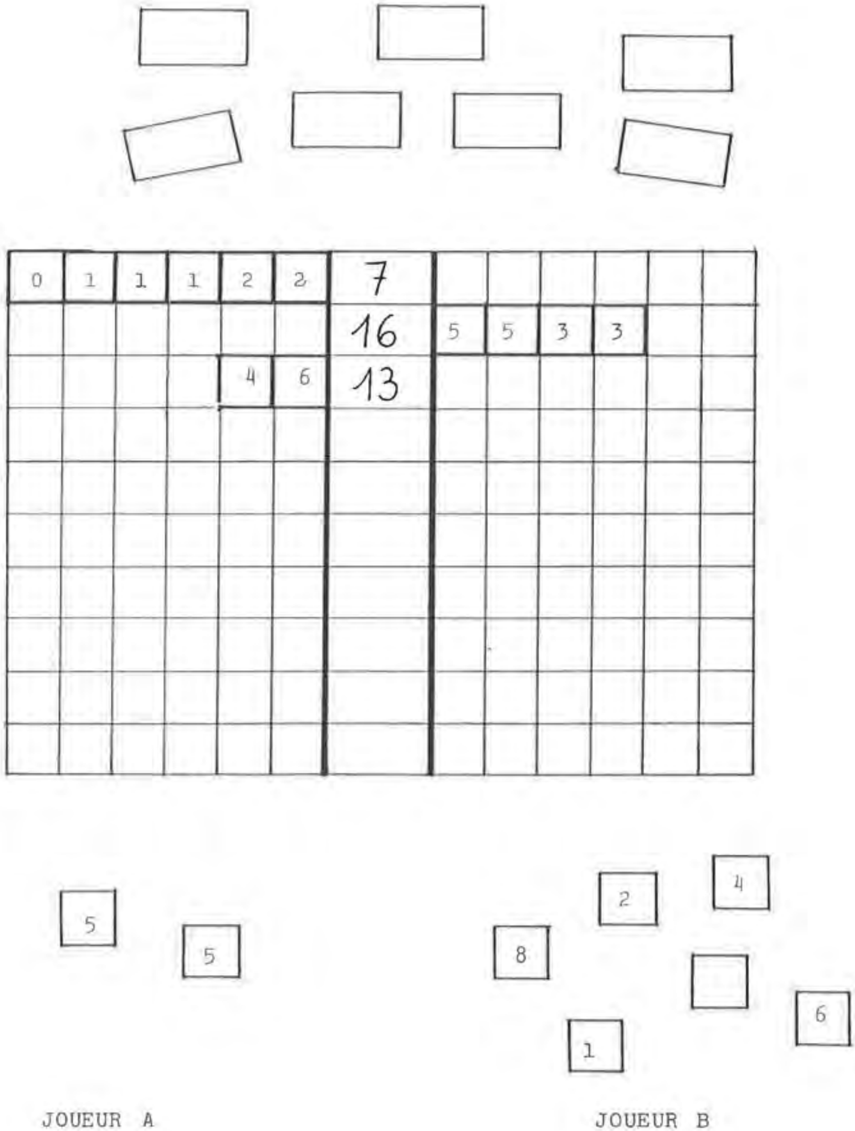


Figure 2. Disposition du jeu au milieu du 2ᵉ tour du joueur A (élèves de 2P).

les conduites des élèves pendant le déroulement du jeu. On se limitera ici à une brève présentation des grilles utilisées avec la version 1 du jeu.
Sur une première grille, on inscrit les nombres reçus par les joueurs au début de la partie et les démarches du joueur «actif» lors de chaque tour: nombre sur le carton vert tiré au début du tour, nombres inscrits sur des carrés blancs ou tirés pendant le tour, nombres posés sur la planche; comportements caractéristiques tels que comptage verbal ou sur les doigts; remarques relatives à sa démarche (ex. annonce du nombre qu'il souhaite tirer).
La deuxième grille est conçue pour enregistrer plusieurs types d'observations liées en général aux interactions verbales entre les joueurs:

1) conduites du joueur «observateur»:
- *remarques adressées au joueur actif: sollicitations «positives» d'ordre général (ex. «Tu peux mettre encore plus...»), suggestions précises (ex. «Tu peux mettre ton 3»), sollicitations «négatives» reflétant une attitude d'agacement ou d'impatience (ex. «T'es trop lent»),*
- *indices d'attention ou d'inattention aux démarches du joueur actif: comptage verbal ou sur les doigts en suivant les nombres posés sur la planche; activité étrangère au jeu,*

2) conduites de contrôle ou de régulation de la part des deux joueurs:
- *rappels des règles de base du jeu (ex. «Tu ne peux pas écrire un 10 sur ton carré blanc»),*
- *remarques reflétant une attitude de compétition (ex. «C'est moi qui va gagner»),*
- *contrôles du résultat des démarches du joueur actif: contrôles effectués par le joueur observateur (comptage, remarques telles que «C'est juste», ou «Ça fait 12 pas 11»);*
  auto-contrôles par le joueur actif («4 et 3 et 2, ça fait 9») ou demandes de contrôle adressées au joueur observateur («C'est juste?»),

3) conduites des deux joueurs en fin de partie: démarches pour déterminer qui a gagné, échanges verbaux.

Quelques observations des conduites des élèves en deuxième année primaire

Pour les élèves de deuxième primaire, nous disposons d'un ensemble de données suffisant (observations de 6 groupes pendant 3-4 parties de jeu par groupe) pour formuler une première esquisse de leur modes de fonctionnement dans le cadre du jeu. Cette esquisse sera essentiellement une synthèse qualitative de nos observations, mais s'appuyera parfois sur des indications quantitatives, exprimées en termes de pourcentage de tours (sur un total de 230) où une conduite a été observée.

1) OBSERVATIONS RELATIVES AUX DEMARCHES DE JEU

En parlant des démarches des joueurs, nous utilisons le terme « décomposition » pour désigner l'opération de base du jeu lorsque le joueur pose une série de nombres sur la planche à côté du nombre – « à décomposer » – tiré au début de son tour. Il est évident, cependant, que cette opération de « décomposition » peut se fonder sur plusieurs procédures: (re)-compositions successives à partir d'un élément choisi, décompositions successives à partir du total visé, ou la coordination des deux. Si les données recueillies jusqu'à présent ne permettent pas d'appréhender la nature spécifique des procédures suivies par chaque élève, elles fournissent néanmoins plusieurs indications générales concernant les niveaux d'élaboration des démarches des joueurs.

Presque tous les élèves montrent qu'ils comprennent le but du jeu, c'est-à-dire l'idée de placer autant de carrés que possible sur la planche. Certains élèves arrivent, cependant, à orienter leurs démarches en fonction de ce but d'une façon plus systématique que d'autres élèves. Au premier tour du joueur B dans la Figure 2, on voit un exemple assez typique d'une démarche intermédiaire (décomposition de 16 en 5, 5, 3, 3) entre une utilisation minimale (ex. 5, 5, 6) et une exploitation optimale (4, 1, 5, 3, 3) ou (5, 5, 3, 2, 1), des nombres à dispositions.

Les démarches des élèves conduisent rarement à une décomposition erronée (seulement 6% des tours se terminent avec une série de nombres incorrecte laissée sur la planche). On observe assez souvent, cependant, des conduites qui ne correspondent pas aux démarches « optimales » du point de vue des règles du jeu: 60% des tours avec tirage de nombres supplémentaires comportent des tirages « superflus », qui ne sont pas nécessaires pour effectuer la décomposition du nombre en question; à 32% des tours, les nombres posés sur la planche représentent une exploitation « minimale » ou « intermédiaire » des nombres à disposition.

Les élèves ont souvent recours (52% des tours) au comptage verbal et/ou sur leurs doigts pour contrôler les sous-totaux et la somme finale des nombres posés sur la planche. Certains élèves sont capables de retenir un sous-total « dans la tête » en comptant sur les doigts seulement le complément à ajouter. D'autres recommencent toujours un comptage complet, pour chaque essai d'une nouvelle combinaison ou après chaque tirage d'un nouveau nombre.

La plupart des élèves comprennent qu'on peut « toujours ajouter zéro » à n'importe quelle série de nombres mise sur la planche. En revanche, on constate des variations importantes dans l'utilisation des carrés blancs: certains élèves s'en servent tout de suite (attrait de pouvoir écrire le nombre qu'on veut?), tandis que d'autres les gardent soigneusement (pensant qu'ils en auront besoin plus tard?).

Il faut noter que même les élèves qui saisissent très bien le principe de base du jeu ont de la peine à ré-orienter leur démarche initiale pour tenir compte de nouvelles combinaisons rendues possibles par le tirage d'un nombre supplémentaire. Cette difficulté peut être illustrée en se référant au deuxiè-

me tour du joueur A dans la Fig. 2. Ayant mis 4 et 6 sur la planche, l'élève indique qu'il souhaite tirer un 3 pour compléter la somme. Il tire 4 mais apparemment ne se rend pas compte qu'il pourrait l'utiliser en remplaçant le 6 par 5 pour former la combinaison (4, 4, 5). Il tire encore et obtient 2. Ne voyant pas la possibilité de l'utiliser en remplaçant le 4 par le 5 (résultat: 2, 5, 6), il continue à tirer. Lorsqu'il obtient finalement 3, il le pose sur la planche, sans remarquer par ailleurs qu'il aurait pu également remplacer le 6 par le 4 et le 2 qu'il venait de tirer (résultat: 3, 4, 4, 2).
Les conduites de cet élève ne peuvent pas s'expliquer, à notre avis, par un manque de compréhension du but du jeu (à son premier tour il a su effectuer une décomposition «maximale» de 7 en 0, 1, 1, 1, 2, 2), ou par des difficultés au niveau des opérations de calcul en elles-mêmes. L'explication de ses conduites tiendrait, nous semble-t-il, à son action de **conférer** *aux nombres mis sur la planche, et plus particulièrement à leur somme (10), un statut de référentiel fixe par rapport auquel seulement le tirage d'un 3 (ou de nombres totalisant 3) pouvait entrer en ligne de compte comme solution au problème. Autrement dit, en fonction des «contraintes» que le joueur s'est données en cours de jeu, il y a eu réduction (provisoire) de sa représentation de «l'espace du problème»: au problème initial (trouver une décomposition du nombre 13 en utilisant un maximum de nombres à disposition) s'est substitué un problème plus restreint (combler l'écart entre 10 et 13). L'une des conséquences de cette réduction serait son incapacité d'exploiter un principe élémentaire de compensation qu'il aurait probablement su appliquer, par ailleurs, s'il était confronté à un problème* **déjà** *posé tel que:*

$$3 + 4 + 6 =$$
$$4 + 4 + \square =$$
$$2 + \square + 6.$$

Après ce relevé des types de difficultés rencontrées par les élèves de deuxième primaire dans l'élaboration d'une stratégie de jeu pour la décomposition de nombres jusqu'à 20, il faut rappeler que dans le travail effectué en classe avec les fiches OP de la méthodologie, les élèves ont déjà abordé des opérations bien plus complexes: additions et soustractions portant sur des nombres jusqu'à 100. Nos observations mettent donc en évidence un décalage important entre les opérations que l'élève serait capable d'effectuer face à un problème «fermé», posé par un exercice, et sa capacité de **mobiliser** *sa connaissance de ces opérations dans une situation plus ouverte de jeu où il doit* **poser** *les problèmes à résoudre.*

2) OBSERVATION DES INTERACTIONS ENTRE ELEVES

On peut noter tout d'abord qu'il y a des variations importantes dans les taux d'interaction d'un groupe de joueurs à l'autre. Certaines parties se déroulent presqu'en silence (coupé par des remarques seulement si l'un des joueurs pose une combinaison incorrecte sur la planche), tandis que d'autres sont très animées, avec des échanges entre élèves à presque chaque

tour. La majorité des élèves manifeste par des gestes (comptage oral ou sur les doigts) ou par des remarques pendant ou à la fin d'un tour, sa compréhension du principe de contrôle mutuel. Dans un certain nombre de cas, cependant, on constate une transformation de la situation d'interdépendance prévue par les règles du jeu en situation de «jeu parallèle», chaque élève étant centré sur «son» action face à «ses» nombres, sans s'intéresser aux démarches de l'autre.
Quelques élèves se montrent sensibles à la dimension de compétition interindividuelle qu'implique la règle de comparaison des performances à la fin de la partie. Cette sensibilité se manifeste par des remarques au début du jeu («C'est moi qui va gagner») et par des réactions lors du tirage des cartons verts («Veinard!», lorsque l'autre joueur a tiré un carton avec un grand nombre; «Pas de chance...», en tirant lui-même un petit nombre). La plupart des remarques ne reflètent cependant pas une prise en compte **prioritaire** *de la dimension de compétition du jeu. Au contraire, les sollicitations positives et les suggestions susceptibles d'aider l'adversaire sont relativement fréquentes (environ 30% des tours comprennent une ou plusieurs remarques de ce type, cf. exemples cités p. 8). L'interprétation de ces remarques n'est toutefois pas aisée. Dans quelle mesure reflètent-elles:*

- *une volonté d'aider l'autre joueur?*
- *ou, au contraire, un désir de montrer que «je sais» mieux que lui ou plus vite que lui, trouver une solution au problème?*
- *ou encore, plus simplement, un désir que l'autre avance plus rapidement afin d'arriver à son propre tour?*

Quelle que soit l'interprétation des conduites de sollicitation, elles nous rendent attentifs au fait que les règles du jeu joué par les élèves ne sont pas forcément les mêmes que les règles de jeu prévues et énoncées au départ par l'expérimentateur (ou par l'enseignant).

☆

Par une analyse plus fine des données recueillies lors de la prochaine phase d'expérimentation, nous espérons dégager des bases plus solides pour étayer ou ajuster les interprétations émises – sous forme de question ou d'hypothèse – dans cet article. Nos analyses futures porteront également sur les variations des conduites des élèves selon la structure du dispositif du jeu et l'âge des joueurs.

[1] *Dans un article traçant l'histoire des matériels éducatifs dans l'enseignement préscolaire et spécialisé en France, Michelet (1981) cite des textes législatifs et décrets qui, dès 1887, reconnaissent la valeur des jeux et jouets comme outils pédagogiques. Cette reconnaissance s'accompagne, toutefois, d'une codification précise et limitative du matériel de jeu qui, selon la théorie pédagogique en vogue à chaque époque, pouvait être considéré comme «éducatif».*

[3] *Une analyse approfondie des résultats de ce sondage, basé sur des interviews de 44 enseignants primaires, paraîtra dans un article ultérieur (Allal & Von der Weid, en préparation).*

Références

BRUN, J. 1979. Pédagogie des mathématiques et psychologie: analyse de quelques rapports. In J. Brun & F. Conne, *Approches en psychopédagogie des mathématiques.* Genève: Cahiers de la section des sciences de l'éducation, «Pratiques et théorie», N° 12.

BRUNER, J. et SHERWOOD, V. 1976. Peekaboo and the learning of rule structures. In J. Bruner, A. Jolley & K. Sylva (Eds.), *Play: Its role in development and evolution.* Harmondsworth: Penguin.

CAILLOIS, R. 1967. *Les jeux et les hommes.* Paris: Gallimard.

DIENES, Z. 1974. L'acte mathématique. *Math-Ecole,* N° 61/62, 19-23

GARVEY, C. 1977. *Play.* London: Fontana/Open Books.

Groupe mathématique du SRP. 1978. *Mathématiser.* Genève: Service de la recherche pédagogique, cahier N° 17.

KAMII, C. et DEVRIES, R. 1980. *Group games in early education: Implications of Piaget's theory.* Washington, D.C.: National Association for the Education of Young Children.

LECOULTRE-CIFALI, M. 1977. L'hors-jeu de la pédagogie. *Séminaire sur les ludothèques: Rapport final.* Berne: Commission National Suisse pour l'UNESCO.

Mathématique: Méthodologie-Commentaires. Martigny: Office romand des éditions et du matériel scolaire, première année 1979, deuxième année 1980.

MICHELET, A. 1981. Le matériel éducatif et la pédagogie de l'apprentissage. *L'école maternelle française,* N° 9, 17-24.

PERRET, J.-F. 1978. *Enquête romande auprès du corps enseignant de troisième année primaire sur l'enseignement de la mathématique, rapport 1: Description des résultats.* Neuchâtel: Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques, N° R 78.26.

PIAGET, J. 1945. *La formation du symbole chez l'enfant.* Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

ROLLER, S. 1980. Libres propos. *Math-Ecole, N° 91, 12-14.*

Suite de la page 20

VERGNAUD G., ROUCHIER A. et al. 1979. *Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré.* IREM d'Orléans.

VERGNAUD G. 1980. *Didactique et psychologie. Problèmes et méthodes.* Actes des Journées sur l'Education Scientifique II. Chamonix, 183-198.

— 1981a. *L'enfant, la mathématique et la réalité.* P. Lang, Berne.

— 1981b. *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.* Conférence in *Actes du Colloque PME.* Grenoble, 7-17.

Expérience à La Ricamarie

par René Dimier, professeur à St-Etienne

Après une longue gestation commencée vers les années 70 et qui a vu la mise en œuvre de nombreux groupes de travail disciplinaires auxquels ont participé plusieurs dizaines de professeurs de la région, le collège expérimental de La Ricamarie a ouvert ses portes au cours de l'année scolaire 77-78.
Sans entrer dans le détail, avant de décrire comment l'équipe des enseignants de mathématiques y a conçu son fonctionnement, voyons d'abord dans quel cadre se situe ce collège et les grandes lignes de l'hypothèse pédagogique qui en fut à l'origine et qui a été conçue au sein de la section départementale de la Loire de l'Office Central de Coopération à l'Ecole (OCCE).
La commune de La Ricamarie compte un peu plus de 10 000 habitants. Elle jouxte St-Etienne au sud ouest, quand on s'engage dans la vallée industrielle de l'Ondaine qui, après avoir traversé les villes du Chambon Feugerolles puis Firminy, ouvre la voie vers la Haute Loire.
Ville essentiellement ouvrière, La Ricamarie compte parmi ses industries le dernier puits de mine encore en activité du bassin minier de la région. Elle est actuellement particulièrement touchée par la crise économique et ce d'autant plus que la proportion des ouvriers dans la population est particulièrement élevée conduisant à 90 % de fils d'ouvriers parmi les élèves du collège et parmi eux on peut encore noter que 20% sont des enfants de population immigrée, maghrebine en majorité.
S'il vous arrive un jour de quitter St-Etienne par l'autoroute A 47 en direction de Firminy-Le Puy vous apercevrez immédiatement en bordure du viaduc de La Ricamarie, sur la gauche, l'ensemble des bâtiments du Centre Educatif et Coopératif au sein duquel se trouve le collège expérimental, tandis que la ville s'étend essentiellement de l'autre côté de l'autoroute avec le puits de mine en toile de fond.
Après cette description du cadre géographique et social voyons brièvement les structures de l'établissement. Les élèves appartenant aux quatre niveaux de 6e-5e-4e et 3e sont répartis en unités d'une centaine d'élèves regroupant soit des élèves de 6e et 5e soit des élèves de 4e et 3e.
C'est au sein de leur propre unité que les élèves sont réunis suivant les moments en différents groupes. La constitution de ces groupes est effectuée par le conseil des professeurs, de l'unité ou par les professeurs d'une même discipline enseignant dans l'unité.

Les groupes auquel l'enfant peut donc être attaché sont:

– *le groupe d'enseignement: (GE)*

C'est, disons, le plus classique des groupes en ce sens qu'il correspond un peu au groupe classe, et qu'il est associé à l'enseignement d'une discipline. Néanmoins, et nous le verrons pour les mathématiques, sa composition varie suivant divers critères et suivant les disciplines en fonction du choix des élèves, des thèmes étudiés, du niveau... C'est un groupe mobile.

– *le groupe d'intérêt: (GI)*

Si des élèves manifestent le désir d'aborder et d'étudier un sujet donné que le cadre habituel des programmes ne leur propose pas, que ce sujet soit un prolongement à un thème disciplinaire ou au contraire tout à fait extérieur mais correspondant à une motivation et à un intérêt personnels des élèves, alors après entente et concertation entre eux et avec un adulte qui prend la responsabilité de ce groupe (et ce parfois indépendamment de sa spécialité s'il s'agit d'un enseignant) des plages horaires permettent au groupe d'intérêt de centrer son activité sur le thème qu'il a choisi. Ce groupe est évidemment lui aussi un groupe mobile.

– *Le groupe de vie: (GV)*

Ce groupe, le seul qui soit stable au cours de l'année scolaire joue un rôle important dans le fonctionnement mis en place, en mathématiques en particulier.
Constitué de dix à douze enfants qui sont donc soit en 6e et 5e soit en 4e et 3e il est animé par un adulte et a plusieurs fonctions.
C'est d'une part un lieu d'écoute, de partage où sont évoqués non seulement les problèmes matériels de fonctionnement de l'établissement (informations administratives emploi du temps...) mais aussi le type de relations qu'implique la vie d'un groupe dans un même lieu. C'est un apprentissage de la vie en société où peuvent s'élaborer des règles de vie, où peuvent se conduire des réflexions sur les attitudes et comportements à avoir ou à ne pas avoir, où peuvent se régler certains conflits.
C'est également le lieu où peuvent s'exprimer les désirs et les préoccupations des enfants, ce qui peut ainsi conduire à la mise en œuvre de groupes d'intérêt après proposition à toute l'unité par le biais d'un conseil d'unité réunissant professeurs, ou plutôt animateurs de groupes de vie, et délégués élèves de groupes de vie de l'unité.
Le groupe de vie est encore la cellule de base de la vie coopérative de l'établissement au sein de chaque unité.

Enfin le groupe de vie a une autre fonction par laquelle nous terminerons car elle assure le lien avec l'enseignement des mathématiques: il est le lieu privilégié du suivi scolaire, du travail mutuel, et de l'organisation du travail dans la mesure où l'adulte assume un rôle efficace en ce domaine. Cette fonction du groupe de vie est facilitée par le fait qu'il est constitué de petits sous-groupes d'élèves qui se retrouvent en général ensemble dans les groupes disciplinaires d'enseignement.

L'animateur du groupe de vie a donc pour tâche d'aider les élèves à organiser leur travail (organisation du temps, planning, avec qui travailler, avec quels documents, recours au centre de documentation...), à mettre en œuvre l'aide mutuelle (entre élèves d'un même niveau ou de deux niveaux différents 6e, 5e ou 4e, 3e). Il n'est pas rare de voir dans un même groupe de vie des enfants travailler en français tandis que d'autres font de l'anglais et d'autres des mathématiques ou de l'histoire.

Enfin l'animateur assure le suivi scolaire en prenant connaissance de tous les résultats des élèves de son groupe dans toutes les matières.

Venons-en, après cette description de la structure du collège dans ses grandes lignes, à l'organisation de l'enseignement des mathématiques que nous avons mise en place.

Tout d'abord abordons la question des programmes. Après les avoir tous mis en pratique au moins un an nous avons établi un organigramme basé sur une progression en deux fois deux ans: 6e, 5e d'une part, 4e, 3e d'autre part, que nous avons d'ailleurs préféré désigner par A, B, C, D respectivement, car sans avoir éliminé le moindre point du programme nous n'avons parfois pas hésité à effectuer quelques transferts d'une année sur l'autre, certaines notions facilement assimilées par les élèves passant du programme officiel de 5e à ce que nous avons appelé le niveau A. Inversement certains points difficiles que les élèves de 6e ne parvenaient à assimiler en totalité étaient, tout ou partie, transférés au niveau B. Il nous a paru aussi utile d'associer dans le temps des notions telles que surfaces et nombre au carré, volume et exposant trois.

Ainsi constitué ce document fournit un organigramme de tous les thèmes à aborder en 1er cycle de l'enseignement secondaire. L'élève sur les conseils du professeur doit, avec ses camarades organiser sa progression pour pouvoir aborder successivement chacun d'eux. Comment cela est-il prévu?

A l'heure actuelle, le système que nous avons utilisé est le suivant:

L'équipe des enseignants de mathématiques a découpé la progression annuelle de chaque niveau en thèmes d'une durée d'étude approximative de quatre semaines, soit environ neuf thèmes par an. Mais au lieu d'établir une progression linéaire de ces thèmes, nous avons constitué des sous-ensembles qui permettent à chaque début de trimestre de proposer aux élèves l'étude de trois thèmes sur lesquels une brève information leur est donnée soit par les professeurs soit par leurs

camarades de groupe de vie qui les ont étudiés l'année précédente. Chaque petit groupe de travail de trois à quatre élèves se concerte en groupe de vie et établit l'ordre dans lequel il souhaite aborder ces thèmes. Les choix proposés permettent en général soit de grouper les sujets à dominante calculs, nombres... ou les sujets plutôt basés sur la géométrie ou au contraire pour éviter que certains élèves ne soient saturés par un même sujet d'alterner par exemple étude des nombres et géométrie et de «digérer» par plus petites doses certains points importants faisant l'objet de plusieurs thèmes.
Lorsque le groupe de travail a fait son choix, ce qui est en général très rapide, il le porte sur une fiche de liaison transmise par l'animateur du groupe de vie aux enseignants de mathématiques. Les fiches ainsi regroupées permettent aux enseignants d'établir alors les listes de constitution des groupes d'enseignement en essayant de prendre en compte dans la mesure du possible l'ordre de choix établi par les élèves.
En prenant connaissance de ces listes les enfants savent ainsi quel sera le thème qu'ils vont aborder pour la période des trois à quatre semaines à venir.
A l'aide d'un document que nous avons appelé «toile de progression» les élèves peuvent alors plus en détail connaître le travail qu'ils auront à faire.
Ce document contient en effet pour chaque thème la liste des fiches élaborées par l'équipe des professeurs ou des chapitres du livre utilisé, ou autres outils que l'élève devra ou pourra étudier au cours de la période prévue. Cette liste comporte en effet deux parties: d'une part les documents de travail de base, le «minimum» vital en quelque sorte, d'autre part des documents complémentaires qui ne sont pas indispensables à l'étude.
A ce point de l'organisation du travail plus long à être décrit qu'à être mis en œuvre par les élèves, intervient pour chacun d'eux l'élaboration de son plan de travail qui se fait soit en groupe de vie soit en groupe d'enseignement. Ce plan comporte une première partie qui indique la période de mise en application, le titre du thème et le groupe de travail auquel appartient l'élève c'est-à-dire trois, quatre, éventuellement cinq élèves, ainsi que le professeur avec qui est étudié le thème.
Suit la liste des titres de «chapitres» en prenant ce terme dans un sens très large avec pour chacun deux indications à apporter ultérieurement: la date à laquelle il a été abordé et une case à colorier en vert lorsque l'élève estime son étude terminée.
Dans une deuxième partie apparaît la liste des tests de contrôle prévus, avec les sujets sur lesquels ils porteront et la date à laquelle ils auront lieu.
Enfin une troisième partie est consacrée aux bilans. D'abord bilan de l'élève sur son travail, sur sa compréhension du thème, les difficultés rencontrées, ensuite bilan du professeur qui est établi à deux niveaux.

Il s'agit d'une part d'un bilan individuel et d'un bilan au sein du groupe de travail.
Le bilan individuel est établi à partir bien sûr de l'observation de l'élève au cours des séances, de ses résultats aux épreuves de contrôle qui sont communes, soit dit en passant à tous les élèves d'un même niveau, et corrigées avec le même barème par tous les professeurs. Mais à ce bilan individuel assez classique s'ajoute une évaluation du comportement de l'élève au sein du groupe de travail: comment a-t-il participé au travail de groupe, comment s'y est-il associé, quel rôle, quelle attitude a-t-il eus? Certes il n'est pas question de remplir pour chacun une grille d'observation. Le professeur ne peut à la fois enseigner et être observateur fidèle du groupe classe tant il est sollicité par les élèves. Néanmoins nous pensons que le bilan que nous faisons n'est pas seulement un bilan basé sur les résultats des tests de contrôle, qui n'est qu'un bilan à posteriori sur un produit fini (... si mal fini qu'il soit!) mais doit être un bilan portant aussi sur la phase d'acquisition des connaissances sur l'organisation par l'élève de cette phase, sur son apprentissage, sur son attitude pendant l'apprentissage. L'élève est-il actif, cherche-t-il par lui-même à comprendre, se pose-t-il des questions, essaie-t-il de surmonter les obstacles, les blocages qui se présentent? Quand il pense avoir une solution comment la propose-t-il à ses camarades, la justifie-t-il? Essaie-t-il d'expliquer aux camarades de son groupe en difficulté...?
Voilà quelques unes des questions que nous nous posons au cours de notre pratique et auxquelles nous nous efforçons de répondre au moment du bilan. Ce sont ces questions qui expliquent aussi que notre fonctionnement qui peut paraître complexe a priori est en fait l'aboutissement d'une réflexion importante au niveau didactique.
Le plan de travail ainsi complété, accompagné de tout ce que l'élève a fait au cours du thème et que nous avons contrôlé est alors retransmis à l'élève en groupe de vie pour l'animateur du groupe de vie qui peut ainsi en prendre connaissance, comme il a pu prendre connaissance des résultats aux tests de contrôle qui se présentent sous la forme d'un niveau global (échelle: lettres A-B-C-D ou E, de très satisfaisant à très insuffisant) accompagné de trois ou quatre autres appréciations suivant les cas sur le calcul numérique, les connaissances, le raisonnement et le tracé géométrique, appréciation qui sont faites en termes de satisfaisant (s) moyen (m) ou insuffisant (i), qui sont aussi les niveaux retenus sur les plan de travail pour évaluer le travail sous les trois aspects: soin, orthographe – travail en groupe – persévérance.
Au cours de chaque thème l'enfant a donc une évaluation basée sur au moins deux tests de contrôle et un bilan global sur le thème se décomposant en un bilan circonstancié et l'évaluation plus codifiée des trois aspects que nous venons de citer. La totalité de ces appréciations et bilan est reportée dans ce que nous appelons le Cahier d'Observation

Continue (COC) qui est un peu le carnet de notes mais dans un sens plus large.
Voici brièvement décrite notre organisation «technique» dirons-nous. Elle peut paraître assez complexe mais en réalité sa mise en œuvre se révèle extrêmement simple et bien assimilée par les élèves.
Nous n'entrerons pas dans le détail des analyses didactiques qui ont pu nous conduire à cette pratique, pas plus que dans celui des phénomènes du travail de groupe et de l'aide mutuelle qui ont été à la base de l'hypothèse du collège basée sur les principes coopératifs. D'ailleurs en ce domaine nous avons été beaucoup aidés par les travaux des spécialistes que sont Jean Brun, Guy Brousseau et Gérard Vergnaud en particulier.
Nous dirons simplement qu'après plusieurs années de pratique donc de tâtonnements, d'essais, de réflexion et compte tenu des contraintes extérieures (car nous ne sommes pas seuls dans le collège et il n'est pas toujours facile d'expliquer le bien fondé de nos idées à certains autres adultes de la maison) cette façon de faire, qui d'ailleurs évolue encore, nous permet de mettre en pratique du mieux possible un certains nombre de principes de base.
Le choix de l'ordre des thèmes étudiés, l'élaboration d'un plan de travail individuel mais dans le cadre d'un objectif à atteindre à travers un travail de groupe, l'évaluation du travail de l'élève non seulement à travers ses performances individuelles mais aussi à travers son rôle, sa participation au groupe, ajoutés au fait que dans le quotidien nous faison vivre les groupes d'enseignement non comme une juxtaposition d'individus mais comme un ensemble de petits groupes de travail, sont un premier volet.
A travers cela nous pouvons davantage impliquer l'élève dans *son* travail tout comme il l'est par les camarades de son groupe dont il est solidaire. Il y a en quelque sorte un engagement, un contrat de tout le groupe pour réaliser une tâche donnée.
Cela permet donc une meilleure cohésion du groupe autour de sa tâche, permettant aux élèves en difficulté d'être plus pris en charge par leurs camarades qui ont compris ou pensent avoir compris quitte à ce que, en voulant expliquer leur solution ils n'en découvrent l'incohérence ou que celle-ci ne soit mise en évidence par leurs camarades. Pour l'élève qui a effectivement compris et résolu le problème posé, devoir ou pouvoir en verbaliser la solution à ses camarades avant que ce ne soit éventuellement au professeur, est un atout considérable dans son appropriation du savoir. Bien sûr l'enseignant reste disponible à tout moment pour guider, réactiver la recherche, peut-être sécuriser les élèves engagés dans une démarche correcte mais dont ils ne voient pas l'aboutissement, poser une question qui débloquera une situation... Mais il n'est plus celui qui apporte tout le savoir, le construisant lui-même dans un ordre qui n'admet aucune discussion.
L'autre volet de ce fonctionnement concerne l'équipe des enseignants

de mathématiques. Si les élèves travaillent en groupe les professeurs aussi car c'est bien d'équipe qu'il faut parler.
Et si cela impose quelques contraintes cela présente aussi beaucoup d'avantages.
Tout d'abord nous maîtrisons beaucoup mieux les programmes de 1er cycle dans leur globalité. Nous pouvons, tout en modifiant les groupes d'enseignement auxquels nous nous adressons, être assurés que tous les élèves auront abordé tous les thèmes et de façon cohérente.
En outre nous pouvons bénéficier d'une mobilité extrême d'un groupe à l'autre, nous remplacer avec une très grande souplesse sans que cela crée de «flottement» dans le groupe d'enseignement qui d'une part connaît les professeurs de mathématiques comme une équipe et d'autre part entend chez chacun le même langage. Cela ne signifie cependant pas que les élèves voient sans cesse changer l'adulte qu'ils ont en face d'eux, cela serait néfaste, mais lorsque cela se produit cela ne provoque pas les perturbations habituelles.
Il ne faut pas croire cependant que pour en arriver là les enseignants doivent perdre toute personnalité. Non, chacun garde encore son caractère, certainement ses habitudes ou ses manies mais sur le fond nous avons au préalable débattu de la ou des façons de présenter, aborder, faire découvrir tel ou tel aspect du programme afin que nous ayons tous un langage cohérent.
En outre dans la mesure où nous utilisons non seulement un manuel mais aussi des documents de travail que nous élaborons nous-mêmes, la concertation préalable nous permet de nous répartir les tâches, de discuter des projets avant de les mettre en pratique puis, de rediscuter des documents après que chacun les ait expérimentés.
Et je conclurai cet article non sur les élèves mais sur les enseignants, en disant que c'est certainement grâce à la qualité des échanges qui peuvent se faire dans l'équipe, au plaisir qu'il y a à travailler non plus individuellement et côte à côte mais ensemble en pouvant échanger sur notre pratique, sur les élèves et, ce, non pas de façon furtive, superficielle, entre deux portes, mais de façon continue, qui nous a permis de mettre sur pied notre méthode de travail et tous les documents qui s'y rattachent.
Il est indéniable que, seul, aucun d'entre nous n'aurait pu réaliser une pareille tâche et que ce n'est que grâce à la solidité de l'équipe que nous avons pu surmonter obstacles, difficultés, oppositions, réticences ou... découragement.
Il nous serait bien difficile de nous retrouver aujourd'hui seul face à une classe. Pourtant nous n'avons pas choisi pour ce genre d'expérience les élèves les plus faciles, tant s'en faut. Mais une certaine qualité du travail compense largement parfois la facilité avec laquelle on souhaiterait le faire.

Apprendre les mathématiques à l'école aujourd'hui?

par Jacques Colomb, Institut National de Recherche Pédagogique, Paris

Une dizaine d'années après le début du grand mouvement de réforme de l'enseignement des Mathématiques qui s'est étendu à la plupart des pays en mobilisant une énergie souvent considérable, différentes enquêtes permettent de faire un premier bilan.

Nous nous attacherons à deux de celles-ci:
- l'enquête (1) effectuée par l'Institut National de la Recherche Pédagogique en France sur un échantillon de 4000 élèves du cycle moyen (5e année primaire) à l'aide de tests papier-crayon.
- l'enquête (2) effectuée par le service de la Recherche Pédagogique de Genève sur une population de 900 élèves de 5e année primaire à l'aide de tests individuels.

Ces deux enquêtes, conduites sur des populations comparables et utilisant deux approches complémentaires au plan méthodologique, nous fournissent de précieuses indications sur le «niveau» des élèves en fin de scolarité primaire. Les conclusions obtenues sont remarquablement convergentes: «si les élèves ont une bonne maîtrise des savoir-faire techniques, ils ont beaucoup de difficultés à les réinvestir dans des situations où ils sont pertinents» (1); «le développement d'une attitude de recherche en vue de la résolution d'un problème... ne paraît pas être pris en compte» (2); «les connaissances acquises ne semblent pas opérationnelles» (2); «beaucoup d'élèves tentent de retrouver, dans leur mémoire, la réponse correcte dont ils ont besoin» (2)...
Parmi les diverses causes qui peuvent être à l'origine de ces conclusions passablement pessimistes il en est une qui nous paraît être fondamentale, c'est que les élèves ne sont que très rarement mis en situations d'avoir une *réelle activité mathématique* mais d'appliquer des «recettes» dont ils n'ont ressenti ni la nécessité ni l'utilité. C'est ce que résume très bien Raymond Hutin (2): «L'abondance de la matière... ne paraît laisser qu'une part congrue aux activités au cours desquelles l'enfant est amené à résoudre un véritable problème, c'est-à-dire à choisir lui même le modèle mathématique, l'algorithme, les représentations qui conviennent le mieux à une situation donnée».
Ainsi ce qui devrait être la première et principale finalité de l'enseignement des Mathématiques: Savoir résoudre des problèmes, semble se révéler un objectif loin d'être atteint par la grande majorité des enfants.
La clef de cette difficulté se trouve bien évidemment au niveau de la formation des maîtres; ainsi (2): «la mise en œuvre des options retenues pour le nouvel enseignement de la mathématique, qui implique un autre regard sur

l'enfant, est-elle rendue difficile parce que la mathématique enseignée a évolué ou parce que la formation et le recyclage des maîtres sont basés sur les notions mathématiques au lieu d'être centrées sur les apprentissages de ces notions par les élèves?»

Toutefois, si nous avons mis en lumière quelques aspects négatifs, les recherches en didactique des Mathématiques qui se sont développées ces dernières années nous permettent d'envisager d'ores et déjà quelques solutions, ou amorces de solutions, aux difficultés évoquées ci-dessus. Pour illustrer notre propos prenons l'exemple de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire tel qu'il apparaît dans les nouveaux programmes français (3) rédigés à partir des travaux de recherche de ces dix dernières années. On distinguera, pour la commodité de l'exposé, la construction des connaissances et le réinvestissement de ces connaissances tels que nous les avons longuement développés dans une série d'ouvrages (4) à l'intention des maîtres de l'école élémentaire.

Au plan de la construction des connaissances mathématiques s'il est bien clair que, comme l'écrit André Revuz (5) «on ne peut comprendre les mathématiques qu'en les faisant soi-même... L'acte d'enseigner à autrui doit donc tendre à se rendre inutile...» ou le conseillent les Instructions Officielles «on privilégiera les démarches pédagogiques qui placent les élèves dans des situations où les notions et techniques à introduire ou à réinvestir leur apparaissent comme réponse à des problèmes», le rôle du maître reste essentiel dans une telle perspective. C'est lui qui, par le choix d'une situation et par le déroulement pédagogique mis en œuvre, pourra favoriser ou, au contraire empêcher, une «bonne» construction des connaissances chez ses élèves. A ce niveau interviennent de très nombreux paramètres, citons-en quelques uns dont le rôle paraît être déterminant:

– *La place du matériel didactique:* s'il peut apporter un très utile point de départ dans de nombreux apprentissages, combien d'obstacles didactiques a-t-il créés du fait d'une utilisation trop exclusive et trop longue en bloquant l'accès à l'abstraction donc à l'activité mathématique proprement dite.

– *La complexité de la situation:* si une situation trop simple ne justifiera en aucun cas la construction d'une nouvelle connaissance par l'élève pour résoudre le problème, une situation trop complexe sur laquelle il n'aura aucune «prise» bloquera définitivement son activité. Ainsi, par exemple, un élève de 7-8 ans ne percevra pas la nécessité d'introduire le produit pour désigner le nombre de carreaux d'un quadrillage 3 × 5, ce qu'il sait très bien faire à l'aide d'autres procédures (comptage, addition...), pas plus que pour celui d'un quadrillage 362 × 265 dont il n'a pas de représentation.

– *Le rôle de la communication:* trop souvent sous-estimée par les maîtres c'est un excellent moyen d'amener les enfants à la production d'écritures, de preuves... toutes choses fondamentales dans une activité mathématique.

Si les activités de communication sont habilement organisées par le maître, les différentes productions des enfants seront alors intrinséquement motivées. Il y a là mise en œuvre d'un nouveau type de contrat didactique (cf. les travaux de Guy Brousseau) dont l'efficacité est incontestablement supérieure à un contrat de type traditionnel dans lequel les productions des enfants sont motivées par la demande du maître exclusivement.

Ces trois facteurs, artificiellement isolés, se retrouveront bien évidemment dans ce qui suit.
Au plan du réinvestissement des connaissances les difficultés sont beaucoup plus considérables car toutes les causes des échecs importants signalés plus haut sont loin d'être élucidées. S'il est clair qu'une «bonne» construction des connaissances ne peut que faciliter leur réinvestissement ultérieur, ceci n'est pas suffisant. Il est clair qu'il ne suffit pas de demander aux enfants de résoudre des problèmes pour qu'il y réussissent, aussi tentons-nous de développer un apprentissage à la résolution des problèmes dont nous allons envisager les principaux objectifs tels qu'ils apparaissent (pour la première fois) dans les programmes du cycle moyen (3) et dont on trouvera un large développement dans (4).

1. Savoir rechercher, sélectionner et organiser l'information.

On touche là à un domaine qui n'est pratiquement jamais pris en compte par le problème au sens traditionnel dans lequel tout ce travail est déjà fait par celui qui pose le problème.
Et pourtant, mis à part le fait que les problèmes de la vie courante ne se présentent jamais sous cette forme déjà «prédigérée», il y a dans tout ce travail préliminaire de problématisation une excellente occasion pour l'enfant de s'approprier la situation et de s'en construire une représentation indispensable à la mise en œuvre d'une procédure de résolution pertinente.
Les supports de telles activités sont multiples: textes, documentations, photos, films, graphiques...

2. Savoir résoudre des problèmes

C'est incontestablement à ce niveau que le plus gros travail reste à faire au plan de la didactique, il est néanmoins possible de dégager quelques pistes de réflexion «en vrac»:
- modifier l'image traditionnelle que se fait l'enfant de l'attente du maître dans la résolution d'un problème: une seule réponse, toujours numérique à une question perçue comme une devinette... Ce qui peut conduire à des résolutions aberrantes et cocasses sur «l'âge du capitaine» (6).
- alléger, dans certaines situations, la charge de travail de l'enfant par exemple en utilisant des calculatrices pour se libérer de la tâche de cal-

cul et se consacrer essentiellement à la tâche de résolution (cf. Jean-François Richard (7)
- prendre mieux en compte le rôle de la mémoire et exercer celle-ci en conséquence (cf. Jean-François Richard (8-9), direction très peu explorée à l'heure actuelle.
- rechercher, au lieu de refuser comme c'est souvent le cas, une diversité de procédure de résolution et travailler sur la comparaison de ces procédudres pour faciliter l'explication des algorithmes mis en œuvre.

3. Savoir valider les solutions

Il y a là une part essentielle de l'activité de résolution de problèmes, qui est souvent totalement absente des activités. En effet, la sanction de l'exactitude de la réponse de l'élève au lieu de venir du maître qui dit «c'est juste» ou «c'est faux» devrait venir
- soit d'un retour à la situation par une validation interne,
- soit d'une discussion entre enfants, ou groupes d'enfants (ou avec le maître...), dans laquelle les enfants doivent *prouver* à leur(s) interlocuteur(s) l'exactitude de leur solution. Les enfants de l'école élémentaire sont tout à fait à même de conduire des démarches de preuves satisfaisantes pour peu qu'ils y soient entraînés.

4. Savoir communiquer les démarches et les résultats

L'importance de la communication, tant au niveau des procédures de résolution que de la présentation de la solution, est également une direction de travail qui n'occupe pas la place qui devrait être la sienne dans les activités de résolution de problèmes. En effet combien de fois se contente-t-on d'une production stéréotypée d'une solution qui ne fait que répondre à l'attente du maître, alors que les contraintes imposées par l'organisation d'une communication entre élèves, ou groupes d'élèves, au niveau de la démarche et du résultat sont une excellente façon d'explication et de formulation, par les élèves, des modèles utilisés. De plus, à ce niveau, les exigences propres à la communication mathématique pourront être justifiées au lieu d'être, comme c'est souvent le cas, imposées.

Ces quelques idées (très résumées) n'ont en aucun cas, la prétention de résoudre les difficultés auxquelles se heurte l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire mais très simplement d'amorcer quelques pistes de réflexion (parmi d'autres) pour les maîtres qui souhaitent modifier les rapports qu'entretiennent les enfants avec le «savoir mathématique» ainsi que, dans ce cas, de leur donner envie de lire les ouvrages cités... pour en savoir plus. Que l'on nous excuse d'avoir mis essentiellement en exergue les problèmes non encore résolus, ils ne permettent que mieux de mesurer l'important chemin parcouru et... ce qui nous reste à faire.

(1) *Enquête sur l'enseignement des mathémathiques à l'école élémentaire.* 1. Comportement des élèves, 2. Opinion des maîtres. I.N.R.P. Paris 1978-79.

(2) *Mathématique 4 P.* S.R.P. Genève 1981.

(3) *Contenus de formation à l'école élémentaire.* Cycle préparatoire 1977, Cycle élémentaire 1978, Cycle moyen 1980. C.N.D.P. Paris.

(4) ERMEL. *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire.* Cycle préparatoire 1977, Cycle élémentaire 1978-1979 (tomes 1 et 2), Cycle moyen tome 1 1981, tome 2 à paraître 1982. Hatiers, Paris.

(5) REVUZ, A. *Est-il possible d'enseigner les mathématiques?* Editions PUF (l'Educateur) 1980.

(6) IREM de Grenoble in Bulletin de l'APMEP n° 323 (1980).

(7) RICHARD, J.F. *L'attention.* Paris, PUF (le Psychologue) 1980.

(8) RICHARD, J.F. *Mémoire et résolution de problèmes.* A paraître: Revue Française de Pédagogie. I.N.R.P. SEVPEN, Paris.

(9) RICHARD, J.F. *Les activités de fonctionnement mnésiques dans la résolution de problèmes.* in «Actes du 5e colloque P.M.E.». Grenoble 1981.

Suite de la page 66

HUTIN, R. 1974. *L'enseignement de la mathématique.* Vevey, Editions Delta.

— 1980.*Mathématique 4P.* Genève, Service de la recherche pédagogique n° 21.

JAULIN-MANNOWI, F. 1975. *Le pourquoi en mathématique.* Paris, Editions E.S.F.

PERRET-CLERMONT, A.N. 1979.*La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale.* Berne, Editions Peter Lang.

PERRET, J.F., THEURILLAT M., JEANNERET H., LORIMIER M. & SCHWAERZEL J. 1980. Numération: compter ou coder: *«Le jeu de l'oie».* Neuchâtel, I.R.D.P.

PIAGET, J. 1947. *La psychologie de l'intelligence.* Paris, Colin.

— 1975. *L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement.* Etudes d'Epistémologie génétique, vol. XXXIII, Paris, P.U.F.

ROSENSHINE, B. 1973. *Teaching behaviours and student achievements.* London, N.F.E.R.

VANDENPLAS-HOLDER, C. 1979 a. *Vers une pédagogie du processus de socialisation.* in Ministère de l'Education Nationale: L'année internationale de l'enfant. Acte du Colloque d'Esneux, 77-110.

— 1979 b.*Education et développement social de l'enfant.* Paris, P.U.F.

VERGNAUD, G. 1981.*L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne, Peter Lang.

Dix principes méthodologiques particulièrement importants pour l'enseignement de la mathématique

par Jean-Marie de Ketele, Université de Louvain-la-Neuve

Dans de nombreux écrits, on a voulu opposer des conceptions divergentes comme s'il fallait choisir entre l'approche développementaliste de Piaget (1947, 1975), l'apprentissage par la découverte comme Bruner (1961, 1966) l'a préconisé, l'apprentissage systématiquement orienté par paliers successifs comme le veut Gagne (1965), l'apprentissage verbal significatif prôné par Ausubel (1963, 1968) et la pédagogie de maîtrise selon la conception de Bloom (1971).
Faut-il vraiment se rallier à l'un de ces auteurs? Ne faut-il pas plutôt concevoir ces différentes approches comme des apports fondamentaux mais complémentaires? Nous le croyons. Et c'est dans cet esprit que nous développerons dix principes méthodologiques que nous considérons comme particulièrement importants pour l'enseignement de la mathématique.
Les deux premiers principes seront généraux; ils mettent en évidence la nécessité **et** *des objectifs de maîtrise* **et** *des objectifs de développement. Les principes suivants se pencheront sur la façon de concevoir l'acquisition de notions nouvelles fondamentales.*

Principe N° 1

> *L'apprentissage doit être guidé par la maîtrise d'Objectifs terminaux globaux qui* **intègrent** *les notions et les capacités, objets des apprentissages successifs.*

C'est ainsi que l'on peut imaginer qu'au terme de l'enseignement fondamental, l'élève sera capable, si on lui donne le plan à une échelle réduite d'un jardin public et une liste de prix des «produits» nécessaires pour le concevoir, de calculer les **dimensions** *et les* **aires** *des composantes du plan, le* **nombre** *de composantes comprises dans une aire déterminée, le* **volume** *de certaines composantes (exprimé dans une mesure réaliste), le* **prix** *sans et avec T.V.A. de certaines matières et de certains travaux...*
Faisons remarquer qu'une telle activité ne demande pas la juxtaposition de micro-compétences mais leur intégration: l'élève devra reconnaître les différentes formes géométriques, prendre des mesures précises, utiliser des unités correctes et réalistes, calculer des surfaces et des volumes, établir le coefficient de réduction du plan, utiliser les règles de l'homothétie, etc. Et,

comme dans toute situation naturelle, le problème est d'abord de faire le tri entre l'information pertinente et l'information parasite.

Comme nous l'avons établi dans un ouvrage précédent (de Ketele, 1980), c'est uniquement sur de tels objectifs terminaux globaux que doit partir **l'évaluation-certification.**

Malheureusement, l'évaluation terminale porte encore trop souvent sur un ensemble plus ou moins aléatoire et représentatif de micro-objectifs.

Dans la perspective que nous défendons, il importe évidemment que l'enseignant songe à introduire régulièrement dans les apprentissages des activités d'intégration: intégrer s'apprend; ce n'est pas le résultat automatique d'une juxtaposition de micro-compétences.

Une telle acception s'accommode bien d'une approche particulièrement prisée à l'heure actuelle, à savoir «la pédagogie du projet». Mais d'autres pédagogies peuvent tout aussi bien convenir.

Principe n° 2

> *Pour être efficace, l'apprentissage comportera des «arpèges pédagogiques».*

Par là, nous entendons d'une part des **activités très systématisées** *qui ont pour fonction d'asseoir ou de maintenir les acquis, d'installer des automatismes économiques, de développer une plus grande rapidité en finesse, en précision des processus... et d'autre part, des* **activités de développement** *qui ont pour fonction l'exercice des aptitudes et des attitudes: on proposera aux élèves des jeux de raisonnement (Hutin, 1974; Perret et Allis, 1980), on leur fera passer des «tests individuels» qui tentent de mettre en évidence les démarches de pensée et d'action (voir par exemple les travaux du «Service de la Recherche Pédagogique» de Genève et de l'«Institut romand de Recherche et de Documentation Pédagogiques» de Neuchâtel), on aménagera l'environnement de telle sorte que l'élève apprenne par lui-même (nous pensons ici aux propositions récentes de Cardinet, 1981)...*

Ces «arpèges» sont nécessaires mais ce ne sont que des arpèges: ce sont des activités qui donnent l'impression d'être gratuites, de tourner à vide, de se juxtaposer.

Aussi, ne sommes-nous pas d'accord avec ceux qui brûlant maintenant la «pédagogie par objectifs» qu'ils ont adorée, se réfugient vers une pédagogie exclusivement de type développemental. Certes, il faut dénoncer vivement la déviation dangereuse qui consiste à dresser de longues listes de micro-objectifs et à vouloir tout opérationnaliser. Mais n'oublions pas de voir aussi les effets heureux d'un tel mouvement.

Objectifs terminaux globaux ou objectifs d'intégration et arpèges pédagogiques nous semblent faire une synthèse harmonieuse et nécessaire des deux points de vue aussi fondamentaux l'un que l'autre. Les objectifs terminaux globaux finalisent l'apprentissage, le rendent significatif (voir les travaux d'Ausubel, 1963 et 1968), permettent l'évaluation-certification, favorisent la capacité d'intégrer si importante pour le développement de l'autonomie, suscitent l'exercice des aptitudes de base, facilitent le développement...
Les arpèges pédagogiques permettent la réalisation de ce processus finalisé [1] s'ils s'y inscrivent au bon moment et à la bonne place. Que ce soit pour aboutir à une maîtrise plus efficiente des outils par des activités très systématisées; que ce soit pour faciliter l'émergence de notions ou de structures nouvelles par des activités de développement.
Ce dernier aspect nous semble particulièrement important. Les principes suivants s'y attachent.

Principe N° 3

> *Pour l'acquisition de notions nouvelles importantes, on respectera autant que possible dans l'apprentissage la séquence: manipulation, représentation, formalisation.*

Inspiré des travaux piagétiens, ce principe nous semble d'autant plus fondamental que le niveau des élèves est faible et que la notion est nouvelle.
Des observations faites sur des enfants handicapés nous ont d'ailleurs permis de constater qu'il fallait parfois encore subdiviser chacune des étapes. Ainsi, pour les activités d'orientation sur des réseaux, il est avantageux de suivre avec eux la séquence suivante:

- *exercices sur le sol quadrillé de la salle de gymnastique (étape psychomotrice globale),*
- *collage de grains de maïs (ou d'autres objets) sur de grands cartons quadrillés (étape de manipulation d'objets concrets),*
- *tracé des parcours faits sur du papier quadrillé ordinaire (pour cette étape de représentation, on peut d'ailleurs concevoir deux étapes intermédiaires: on représente les objets concrets manipulés; on les représente par des signes abstraits),*
- *formalisations des tracés effectués, par exemple par une suite de flèches verticales et horizontales...*

Des observations du même type ont aussi montré que parfois, des distinctions complémentaires devaient être opérées. Ainsi, l'étape de représenta-

[1] *Il ne faut pas oublier que l'apprentissage est par définition un processus systématiquement et intentionellement orienté!*

tion pouvait s'opérer plus facilement si les objets auparavant manipulés par l'enfant restaient présents au moment de la représentation. De même, on a pu montrer que dans certains cas, le degré de difficulté variait avec le type d'objets: objets concrets, objets représentés (sur des cartes, par exemple), objets semi-concrets (couleurs, formes...), objets abstraits (symboles).
De telles distinctions sont parfois importantes pour guider certains apprentissages. C'est pourquoi, nous soulignons avec Vergnaud (1981) l'importance de l'analyse des réussites, des erreurs et des procédures. Et cela non seulement chez des enfants normalement doués mais aussi chez les enfants avancés et retardés. Ces analyses comparatives permettent souvent de mieux comprendre les processus en cause.

Principe N° 4

Les diverses étapes de l'apprentissage sont verbalisées.

L'élève rappellera éventuellement la succession des étapes qu'il a suivies (ce rappel peut parfois provoquer des «insights») mais surtout, il tentera de dire pourquoi il a fait ainsi, pourquoi il a telle certitude, pourquoi cela est ainsi...
Ce type de verbalisation se justifie selon Jaulin-Mannoni (cité par Comiti & Laborde, 1980, p. 146) par la priorité accordée à la compréhension: «il importe plus de comprendre que de savoir». Et ceci est vrai, que l'on se place du point de vue de l'enfant ou de l'enseignant ou du chercheur.
Il se justifie aussi par les liens fonctionnels qui existent entre raisonnement et langage (Caouette, 1973-1974; Bruner, 1966).

Principe N° 5

Dans l'acquisition de notions ou de structures nouvelles, le conflit socio-cognitif peut jouer un rôle fondamental.

Dans de nombreux écrits, Piaget a montré le rôle joué par le conflit cognitif dans le développement: lorsque l'enfant ne peut plus rendre compte d'une situation par sa structure actuelle de pensée, il cherche activement à dépasser son état de déséquilibre (Piaget, 1975).
Des travaux récents comme ceux de Doise, Mugny et Perret-Clermont (1975) ou ceux de Vandenplas-Holper (1979) ont élargi la notion en parlant de conflit socio-cognitif: «Si l'imitation en tant que processus d'assimila-

tion peut éventuellement rendre compte de certains moments de l'évolution, il est important de souligner que l'intégration sociale n'offre pas seulement une «nourriture intellectuelle» à assimiler mais surtout qu'elle suscite une activité d'accommodation qui est, elle, créatrice de nouveauté (Perret-Clermont, 1979, p. 202.).
Faire travailler les enfants par groupes de trois, c'est-à-dire par triades, est une technique particulièrement efficace pour faire jouer optimalement le conflit socio-cognitif. En effet, si l'enfant travaille seul, il ne peut évidemment s'agir d'un conflit socio-cognitif, mais au plus, d'un simple conflit cognitif provoqué par une situation qui créerait un état de déséquilibre par rapport au schéma actuel de pensée de l'enfant. Si l'on fait travailler deux enfants ensemble, le conflit socio-cognitif peut apparaître, mais le risque est assez grand de voir un enfant dominer l'autre ou de voir les enfants tenir des discours parallèles sans souvent s'en apercevoir d'ailleurs. L'introduction d'un troisième larron va permettre à un enfant de jouer le rôle d'observateur pendant que les deux autres parlent: il peut mettre en évidence les points communs et les divergences explicites ou implicites, orienter vers une troisième voie... L'analyse d'expériences ayant utilisé des triades montre que leur rôle est optimal lorsque celles-ci sont hétérogènes mais à condition que le décalage entre le niveau des trois membres ne soit pas trop grand (Vandenplas-Holper, 1979, a et b).

Principe Nº 6

> *Pour favoriser une meilleure compréhension des notions et de leurs relations avec les notions voisines, on recourra régulièrement à des activités qui demandent de faire l'inventaire et l'analyse des possibles.*

A titre d'exemple, on peut donner aux enfants 4 cubes identiques et leur demander de réaliser et d'analyser toutes les formes possibles (l'enfant doit utiliser les 4 cubes).
Cet exercice fait appel à de nombreuses notions en relation: volume invariant, cube, parallélipipède rectangle, formes régulières et irrégulières, surface, unité, multiple, bases, hauteur, arêtes, etc.
Régulièrement effectuées, ces activités permettent d'éviter plus facilement les généralisations abusives, de découvrir la «profondeur» d'une notion (cas ordinaires et extrêmes), de déceler les paramètres d'une situation, d'établir les rapports d'inclusion, ...

Principe N° 7

> *Si l'on veut éviter que les activités mathématiques soient perçues indépendamment les unes des autres, et si l'on veut promouvoir de véritables processus de mathématisation (faire découvrir et jouer les invariants), on recourra régulièrement à des exercices d'anticipation.*

Après avoir résolu un problème, il est bon de demander à l'élève ce qui se passerait si l'on modifiait un ou plusieurs paramètres de la situation. Jaulin-Mannoni (1975, p. 65) a montré l'intérêt de telles techniques. « Une prévision juste résulte tout naturellement d'une démarche juste. Une prévision fausse témoigne d'une erreur dans la démarche. »
A ce sujet, une querelle est née à propos de l'attitude pédagogique à suivre en cas d'erreur. Certains diront qu'il faut faire agir l'enfant pour qu'il constate que son résultat est en contradiction avec sa prévision. Selon eux, on fait ainsi marcher les principes de l'activité de l'élève, du conflit cognitif et de l'attitude expérimentale (vérification par les faits). Jaulin-Mannoni s'oppose radicalement à cette position. « Le problème pédagogique se pose en ces termes: que faut-il transmettre à l'enfant? La démarche ou son résultat? La construction ou le savoir auquel elle a permis d'accéder? (...) A quoi sert alors de montrer le résultat à l'enfant? Cela ne peut guère corriger son erreur, laquelle est à chercher quelque part dans une faute de raisonnement (...). Le piège est grave et nous y reviendrons à plusieurs reprises: une suite de constatations, même variées, ne saurait en aucun cas conduire à une certitude logique (...). Devant une erreur de l'enfant, il y a lieu de rechercher une autre voie, peut-être de le guider dans sa réflexion, mais jamais de lui « montrer » quelque chose qu'il aurait dû prévoir, car s'il ne l'a pas prévu, c'est qu'il n'a pas les structures qui lui auraient permis de le faire. A lui faire constater les choses, on lui apprend peut-être quelque chose mais comme cela ne saurait suffire à élaborer ces structures, cet apprentissage porte en fait sur la constatation d'un « ici et maintenant » étendue à un « toujours » dans une généralisation abusive, sur laquelle le pédagogue se leurre car elle conduit à donner par une démarche fausse des réponses justes qui font illusion » (Jaulin-Mannoni, 1975, p. 65 à 67).
La position est radicale. De ce fait, nous nous en méfions et nous ne pensons pas pouvoir suivre son raisonnement jusqu'au bout. L'erreur de prévision est une erreur de raisonnement et la démonstration par un résultat peut leurrer ou conduire à une généralisation abusive: jusque là, nous sommes d'accord. Par contre, nous pensons que faire constater des résultats, suite aux diverses modifications d'une situation, peut amener l'enfant à revoir et à ajuster sa démarche de prévision. En cela, nous rejoignons la position de Comiti & Laborde (1980, p. 148): « Il nous semble que cette conception a un aspect réducteur, l'intérêt d'une situation pédagogique ne

pouvant, à nos yeux, se trouver uniquement dans sa «force démonstrative» mais résidant également dans la façon dont elle permet à l'élève l'extension ou le rejet de ses connaissances antérieures. Néanmoins, nous tenons à souligner le caractère positif des intentions qui président à la conception des situations: à partir d'actions réellement effectuées sur des objets, amener l'enfant à anticiper, à prévoir, à inventer des situations nouvelles, à découvrir des impossibilités...»

Principe N° 8

> *Une manière particulièrement efficace d'évaluer ou de consolider la capacité d'utiliser certains invariants est de demander aux élèves d'inventer de nouvelles situations qui font appel à ceux-ci.*

On peut demander aux élèves d'habiller un invariant (comme la structure $X + Y = Z$) en énonçant des problèmes de vie qui y font appel.
Par une telle activité, ils prennent davantage conscience du permanent et du contingent et seront ultérieurement plus sensibilisés à faire cette distinction lorsque autrui leur présentera de tels problèmes.
Pour automatiser les mécanismes de calcul mental, on peut organiser des jeux par équipe où chaque élève d'une équipe pose à un élève d'une autre équipe un calcul de forme $X + Y = Z$. Très vite, les élèves prendront conscience des facteurs qui élèvent le niveau de difficulté des différentes formes.
Pour favoriser l'intégration des notions et des structures déjà acquises, on peut demander aux élèves d'inventer des situations qui font appel à un maximum d'entre elles (Cf. principe N° 1). Cette dernière approche a été essayée avec succès par le G.E.D.E.O.P. (1979).
Inutile d'insister sur l'intérêt d'une telle démarche qui part de l'enfant, si fréquemment réclamée dans les écrits théoriques et si rarement mise en œuvre.

Principe N° 9

> *Toute activité accomplie dans un sens doit pouvoir aussi l'être dans le sens inverse.*

Si, à titre d'exemple, on prend l'objectif terminal global énoncé dans le cadre du principe n° 1, on doit pouvoir demander aussi à l'élève de partir d'une situation réelle (jardin public, complexe scolaire...), de la représenter

sur une feuille de papier, dans une échelle réduite réaliste et d'effectuer les différents calculs sur plan.
L'analyse de nombreux manuels montre que ce principe n'est pas souvent mis en application. Ainsi, ils demanderont souvent aux enfants de représenter une situation par un diagramme sagittal, mais leur demanderont rarement le passage inverse. Et cependant, une meilleure maîtrise de la première activité passe par une bonne maîtrise de la seconde.

Principe N° 10

> *Tout apprentissage qui vise la compréhension et le transfert des acquis doit se fonder sur la loi de la variété des approches.*

Tant chez les enseignants que chez les chercheurs, on constate souvent une tendance néfaste à vouloir considérer comme unique ou seule bonne une démarche d'apprentissage qu'ils ont pu expérimenter eux-mêmes comme satisfaisante. Et cependant, l'histoire **des** *didactiques devrait nous rendre plus circonspects; un article récent de Brousseau (1980) est particulièrement éloquent à ce sujet.*
Nous croyons, de notre côté, qu'une notion ou une structure sera d'autant mieux acquise qu'elle aura fait l'objet d'approches très variées. De nombreux arguments plaident en faveur de cette position.
Que l'on pense, par exemple, aux travaux de Vergnaud (1981) qui a montré les formes extrêmement variées que pouvait prendre une structure apparemment aussi simple que la structure additive $X + Y = Z$.
Que l'on pense aussi aux résultats d'une recension critique particulièrement vaste opérée par Rosenshine (1971) sur l'efficacité de l'enseignement: la variété des approches didactiques se révèle être un des facteurs les plus significatifs.
Faut-il aussi rappeler les nombreux travaux sur les styles cognitifs, sur la fatigabilité, sur la motivation...

En guise de conclusion

Nous ne prétendons évidemment pas avoir été exhaustif, loin s'en faut, mais nous pensons avoir énoncé quelques principes méthodologiques qui, à la lumière des travaux actuels, apparaissent particulièrement importants.
La plupart de nos principes sont formulés dans une perspective constructiviste, à l'image de la formulation de Brousseau (1980, p. 51-52) qui résume bien la position de nombreux spécialistes actuels: « Nous nous proposons ici d'essayer une autre approche: l'apprentissage est une adaptation de

l'élève à une situation – problème nouvelle. Les difficultés qu'il rencontre sont donc fondamentales pour provoquer cette adaptation. De plus, elles peuvent être constitutives du nouveau savoir, c'est-à-dire être indispensables à sa compréhension. Ces difficultés sont celles que porte en elle la conception antérieure de l'élève, et la situation-problème choisie les a seulement révélées. La nouvelle conception apparaît parce qu'elle a une solution à ces difficultés. Elle est une rééquilibration des systèmes de réponse de l'élève, soit qu'elle lève les contradictions portées par les anciennes conceptions, soit qu'elle apporte des simplifications substantielles.»
Tout en étant d'accord avec cette conception, nous avons cependant une crainte: de même qu'une pédagogie par objectifs mal comprise a conduit aux pièges de la micro-objectivation, cette approche peut facilement dévier vers la juxtaposition de situations-problèmes dont les spécialistes disent qu'elles favorisent le développement, mais qui ne seront pas nécessairement perçues comme telles par l'élève, voire l'enseignant.
Et à force de faire des choses qui, apparemment du moins, tournent à vide, les enfants n'apprennent pas à transférer et à intégrer dans la vie les invariants qu'ils ont appris. Le transfert et l'intégration s'apprennent par l'exercice.
C'est la raison d'être de nos objectifs terminaux globaux qui, à nos yeux, évitent les dangers de la micro-objectivation et s'appuient au niveau des apprentissages sur une perspective constructiviste ou développementaliste.

Bibliographie

AUSUBEL, D.P. 1963. *The psychology of meeningful verbal learning.* New York, Grune & Stratton.

BLOM, B.S. 1971. *Affective consequences of school achievement,* in Block J. H. (Ed.): *Mastery learning.* New york, Holt.

BRUNNER, J.S. 1961. *The act of discovery.* Harvard Educationeel Review 31, 21-32.

— 1966. *Toward a theory of instruction.* Cambridge (Mass.): Belknalp Press of Harvard Univ.

CAOUETTE, C.E. 1973-1974. *Etude longitudinale du développement mental d'enfants sourds.* Bulletin de Psychologie 27, 262-274.

CARDINET, J. 1981. *L'évaluation formative à l'école primaire.* Neuchâtel, I.R.D.P.

COMITI C. et LABORDE C. 1980.Recension critique de «Recherches sur les fondements d'une pédagogie authentique» de Francine Mannoni, *Recherche en Didactique des Mathématiques* 1, 143-149.

DE KETELE, J.M. 1980. *Observer pour éduquer.*Berne, Ed. Peter Lang.

DOISE, W., MUGNY G. & PERRET-CLERMONT A.N. 1975. *Social interaction and the development of cognitive operations.* European Journal of Social Psychology 5 (3), 367-383.

GAGNE, R.M. 1965. *The conditions of learning.* New York, Holt.

G.E.D.E.O.P. 1979. *Actes du Colloque inter-I.R.E.M.–C.E.D.E.O.P.* Limoge.

(Voir suite p. 57)

Un test
de fin de première année secondaire

par R. Bex, G. Noël, Y. Noël-Roch, Université d l'Etat à Mons

1. Introduction

En 1978-79, un programme expérimental de mathématique a été mis en application dans un certain nombre de classes de première année de l'enseignement secondaire belge. (En Belgique, l'enseignement primaire comporte 6 années et s'adresse aux enfants de 6 à 11 ans. L'âge normal à la fin de la première année du secondaire est donc 13 ans.)
Du point de vue de la matière, le nouveau programme se distingue de l'ancien par la part plus grande attribuée à une approche intuitive de la géométrie, y compris de la géométrie de l'espace. Par contre, les ensembles, relations et fonctions sont présentés de manière moins formelle et moins systématique qu'auparavant.
Du point de vue méthodologique, il est demandé aux professeurs d'introduire la matière en présentant aux élèves des situations pédagogiques susceptibles de provoquer leur activité. Le texte complet du programme appliqué en 1978-79 a été reproduit dans «Mathématique et Pédagogie», [1]. (On trouvera dans les fascicules ultérieurs de cette revue les aménagements apportés par la suite à ce programme.)
A l'issue de la première année d'expérimentation, le premier auteur estima nécessaire d'évaluer les résultats de la réforme effectuée. Aidé par les professeurs des classes expérimentales de son ressort, il rédigea un test (comprenant deux parties administrées séparément) destiné tout à la fois à servir d'examen de fin d'année et à comparer les résultats des classes expérimentales à ceux de quelques classes témoins.
Un premier aperçu des résultats de ce test a été publié précédemment [2]. On trouvera ci-dessous une analyse plus détaillée des réponses fournies aux questions de géométrie. Comme d'habitude, dans une étude de ce type, il faut se garder d'énoncer des vérités définitives. Trop de paramètres, difficiles à contrôler, sont susceptibles d'influencer les résultats. Toutefois, certains écarts sont suffisamment importants pour qu'il soit indiqué de les signaler. On retiendra en particulier que certains exercices sont mieux réussis par les enfants ayant du retard dans leurs études que par ceux qui sont à l'âge normal. Il ne peut s'agir que de sujets dont l'étude nécessite un développement intellectuel non encore généralement atteint par les élèves de première année. Il ne faut apparemment pas espérer que ces notions soient parfaitement assimilées par la majorité des élèves de première. Il conviendra donc de les reprendre ultérieurement.

Le test a été administré à 316 élèves, se répartissant en 194 élèves de classes expérimentales et 122 de classes témoins. Signalons d'emblée que les résultats du groupe expérimental sont systématiquement meilleurs que ceux du groupe témoin. Il serait hasardeux d'en déduire que le changement de programmes est bénéfique, pour deux raisons:

- Les questions étaient conçues en fonction du nouveau programme; certains exercices portaient sur des notions ne figurant pas à l'ancien. Toutefois la supériorité du groupe expérimental se marque aussi dans les questions figurant aux deux programmes.
- Les écoles où était appliqué le nouveau programme n'avaient pas été choisies aléatoirement, mais sur base du volontariat. Ceci introduit un biais important.

Pour ces raisons, nous ne ferons pas dans la suite de comparaison entre les deux groupes.

Indiquons la répartition des élèves par âge et sexe:

Age	12	13	14	15	16	Inconnu
	7	167	85	43	3	11

Sexe	M	F	Inconnu
	164	139	13

On trouvera en annexe les textes des questions de géométrie. Nous désignerons les questions par deux numéros; le premier est celui du questionnaire, le second celui de la question dans le questionnaire.

2. Questions de géométrie de l'espace

L'examen des résultats à ces questions nous amène à distinguer celles qui ne nécessitent que l'observation d'une situation géométrique (questions I.12, II.1 et II.6) de celle qui met en œuvre des transformations géométriques (question I.6).
Les premières semblent à la portée des élèves de première année, avec toutefois une difficulté concernant la notion de droites non coplanaires. Voici en effet les taux de réussite à ces questions.

Question I.12

L'élève devait fournir quatre réponses:
1.) le sommet e; 2.) les faces abcd et abfe; 3.) deux arêtes de la face bcgf; 4.) une arête non coplanaire à bf.

	1°)	2°)	3°)	4°)
Taux de réussite (en %)	70,6	72,5	64,9	37,0

Au 4.), l'erreur la plus fréquente consiste à fournir une arête parallèle à bf (38%).

Question II.1

La première sous-question est réussie par 95% des élèves, ce qui tendrait à montrer que la situation est bien perçue. Mais le taux de réussite à la deuxième sous-question tombe à 56,6% (43,2% pour les filles, 66,5% pour les garçons: la différence est significative au seuil 0,01). Une erreur très fréquente à cette sous-question est la réponse 31 : il s'agit du nombre de faces (extérieures) non vues (et non du nombre de casiers dont on ne voit aucune face).
La sous-question 3 portait sur le système métrique et est assez mal réussie (38,9%). 14,2% des erreurs sont dues à un mauvais positionnement de la virgule. De plus, la sous-question 2 a joué un rôle perturbateur car beaucoup d'élèves qui avaient répondu 31 à cette sous-question ont proposé 9920 dm3 comme volume ($9920 = 31 \times 2 \times 160$) !
Cette question II.1 met ainsi en évidence l'importance de la connaissance de la langue maternelle pour la réussite en mathématique.

Question I.6

Cette question demande trois réponses: images du point m, du segment [bq], du rectangle amqb. Nous avons également recherché les réponses qui conservent la longueur de [bq], la direction de [bq] et la direction du plan amqb.

Taux de réussite :

	Filles	Garçons	Tous élèves	Elèves de 13 ans
1. Image de m	74,1	74,4	75,4	71,9
2. Image de [bq]	30,9	43,3	38,3	35,3
3. Longueur de [bq] conservée	82	81,7	82	76,6
4. Direction de [bq] conservée	82,7	82,9	82,9	77,8
5. Image de amqb	28,8	43,9	37,0	32,3
6. Direction de amqp conservée	66,9	68,9	68,0	64,7

Ce tableau montre clairement que l'invariance de la longueur et de la

direction par une translation est assimilée par une grosse majorité d'élèves, même si le positionnement de l'image (d'un segment ou d'un rectangle) est généralement incorrect.
Les garçons positionnent mieux les images que les filles: à la ligne 2 du tableau, la différence filles-garçons est significative au seuil 0,05 et à la ligne 5 au seuil 0,01.
Bien que les différences soient peu significatives, les élèves de 13 ans (âge normal en fin de première année) ont des résultats inférieurs à la moyenne. Sans doute la perception spatiale s'améliore-t-elle encore avec l'âge.

Question II.6

Elle est réussie par 58,3% des filles et 69,5% des garçons (différence significative au seuil 0,05). Les erreurs constatées sont fort diverses. Parfois le contour dessiné est gauche; parfois on constate des erreurs de perspective.

Il apparaît ainsi que les objectifs fixés à l'étude de la géométrie de l'espace en première année doivent être limités et l'étude reprise dans les années suivantes.

3. Questions de géométrie plane

Il s'agit des questions I.4, II.3, I.9 et II.10. Les conclusions à tirer de l'examen de ces questions rejoignent celles qui viennent d'être énoncées pour la géométrie de l'espace: on ne peut considérer que les élèves dominent la notion de translation à la fin de la première année, surtout quand elle s'applique à des figures non bornées comme c'était le cas dans les questions I.9 et II.10. Ainsi il semble que la distinction entre segment et droite n'est pas encore fermement établie vers 13 ans. (Elle relève incontestablement du stade des opérations formelles.) Les questions faisant intervenir les symétries axiale ou centrale donnent de meilleurs résultats. Il est vrai qu'elles ne s'appliquaient qu'à des figures bornées. Au fait, la notion intuitive de translation ne renferme-t-elle pas en elle-même le caractère non borné du plan? On notera à nouveau une différence entre garçons et filles dans toutes les questions nécessitant une vision globale de la situation.

Question II.3

Taux de réussite:

Filles	Garçons	Tous élèves
44,6 %	57,9 %	51,9 %

Il n'est guère possible de dire quelles sont les parties de la figure dont l'image est la plus difficile à trouver car une erreur sur un segment entraîne presque automatiquement une erreur sur les segments voisins, la figure est perçue comme un tout. On notera toutefois que plus d'un quart des élèves n'attribuent pas d'image au segment [a,b].

Question I.4

On demandait les symétriques de a, [b,c] et [b,d]:

	Filles	Garçons	Tous élèves	Elèves de 13 ans
a	62,6	64,0	63,0	59,9
[b, c]	59,7	65,9	63,0	62,3
[b, d]	23,7	35,4	29,7	33,5

Pour les deux premières sous-questions, le résultat moins bon des élèves de 13 ans montre la nécessité de revenir ultérieurement sur la notion étudiée. Trouver l'image de [b,d] est nettement plus difficile: les élèves ont de la peine à concevoir qu'un segment puisse être sa propre image (à rapprocher du phénomène analogue pour le segment [a,b] à la question II.3). En fait, la réponse la plus fréquente à cette sous-question est la seconde diagonale: [a,c]. On retrouve là un « souci d'équilibre » qui provoque des erreurs. Mais ici, les élèves de 13 ans réussissent mieux que la moyenne: même sans bien posséder une notion, il y a des erreurs qu'ils ont moins tendance à commettre.

Questions I.9 et II.10

Ces questions sont très semblables: elles demandent une réponse nécessitant une vue globale d'une frise, comme illimitée dans les deux directions. On n'a considéré comme bonnes réponses que celles où la

	Filles	Garçons	Tous élèves
I.9	12,9	34,8	24,7
II.10 global	12,9	38,4	26,6
II.10 local	45,3	64,6	55,4

frise image s'étendait jusqu'aux bords de la figure, à gauche comme à droite. En II.10, on demandait de plus des images de points particuliers. C'est là un aspect local a priori plus simple à appréhender que l'aspect global. La ligne «II.10 local» indique le pourcentage d'élèves ayant fourni correctement les trois images demandées.

Les résultats confirment les impressions a priori: la question «globale» est plus difficile que la question «locale». A la fin de la première année du secondaire, la notion de translation conserve donc un aspect ponctuel très marqué. Cela se marque aussi par le fait qu'à la question I.9 environ 34% d'élèves (46,8% de filles, 23,8% de garçons) éprouvent le besoin de porter sur la figure des flèches indiquant des images de points particuliers, alors qu'on ne le leur demandait pas. Dans le tableau ci-dessus, toutes les différences entre garçons et filles sont significatives au seuil 0,01.

4. En guise de conclusion

Selon son tempérament, chacun peut estimer plus ou moins satisfaisants les pourcentages de réussite mentionnés ci-dessus. Par delà cette (importante) question, nous avons voulu faire apparaître l'impossibilité de considérer certaines notions comme définitivement acquises vers 13 ans. A cet âge, l'intelligence se forme encore. Il importe donc de revenir à plusieurs reprises sur les mêmes sujets, suivant le principe de l'enseignement en spirale. Des différences entre garçons et filles semblent aussi apparaître. Il reste, si elles sont confirmées par d'autres études, à les préciser et les interpréter, ce qui ne sera guère facile!

Bibliographie

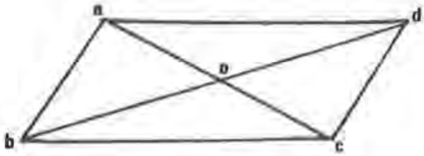
[1] Le programme de mathématique pour la première année secondaire, *Mathématique et Pédagogie,* 18, 24-48, (1978).

[2] R. Bex, Bilan de fin d'année, *Mathématique et Pédagogie,* 26, 21-35, (1980).

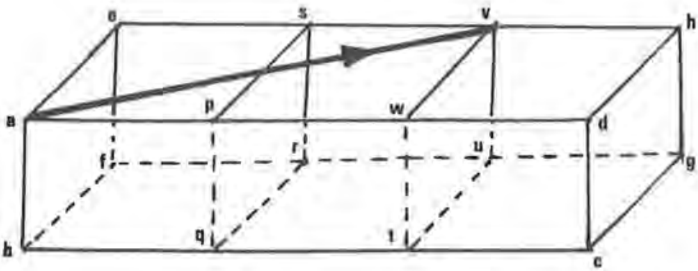
Annexes

Bilan de fin d'année – Questionnaire no I

4. Dans le parallélogramme abcd,
le symétrique du sommet a par rapport au centre *0* est (1)
le symétrique du côté [bc]par rapport au centre *0* est (2)
le symétrique de la diagonale [bd] par rapport au centre *0* est (3)

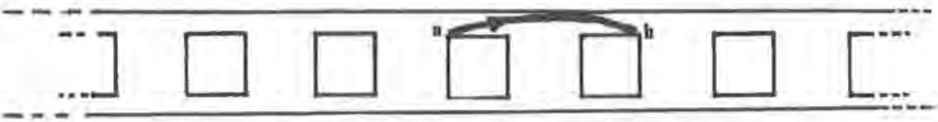


6. Voici une boîte à trois compartiments de mêmes dimensions. La flèche indique une translation par laquelle l'image du sommet *a* est le point *v*

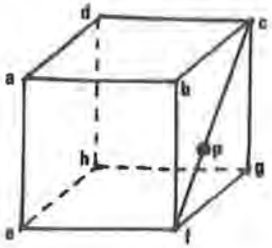


Par cette translation:
l'image du point m est le point (1);
l'image du segment [bq] est le segment (2);
l'image du rectangle amqb est le rectangle (3). Complète!

9. La bande qui figure ci-dessous glisse sur elle-même de manière que le point *a* vienne se placer sur *b*. Repasse en rouge la position de la frise après ce glissement.



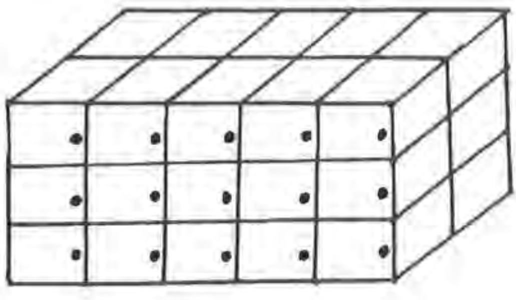
12. Ce cube représenté en perspective cavalière a pour sommets a, b, c, d, e, f, g, h. Le point *m* appartient à l'arête [ab] et le point p appartient au segment [cf]. Complète:



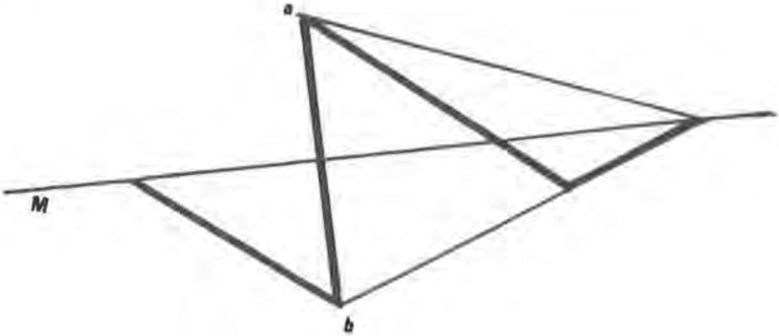
Le plan déterminé par les sommets a, b et f comprend aussi le sommet... (1).
Le point m appartient à la face... (2) et à la face... (3).
Le point p appartient au plan déterminé par les deux arêtes... (4) et ... (5).
Les arêtes [bf] et ... (6) ne sont pas incluses dans un même plan.

Bilan de fin d'année – Questionnaire nº II

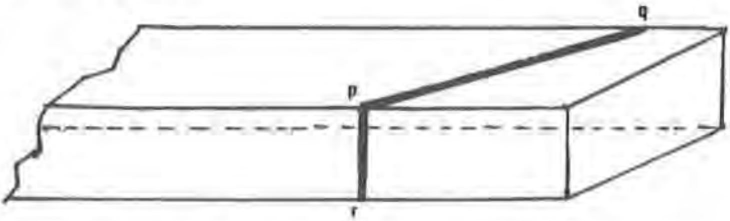
1. Voici un bloc de casiers comme on en trouve dans les grandes gares de chemin de fer pour placer des bagages en dépôt. Des casiers s'ouvrent par devant, d'autres par derrière. Complète!
- le nombre des casiers qui s'ouvrent par derrière est ... (1);
- le nombre des casiers dont on ne voit aucune face dans le dessin est ... (2);
- si un casier a un volume de 160 dm3, le volume du bloc est ... m3 (3).



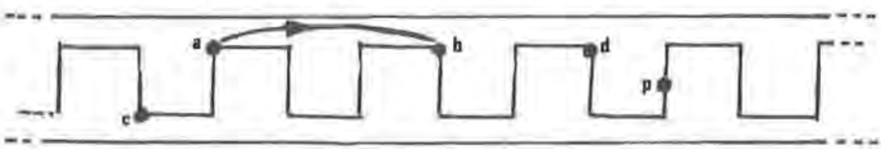
3. Dans la figure donnée ci-dessous, les points *a* et *b* sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe M. Repasse en rouge le symétrique par rapport à l'axe M de la ligne brisée qui est dessinée en traits gras.



6. Le bout de poutrelle dessiné ci-dessous a été entamé par la scie suivant les segments [pq] et [pr].
Dessine en rouge le contour suivant lequel la partie enlevée va se détacher de la poutrelle.



10. La bande qui est dessinée ci-dessous glisse sur elle-même de manière que le point *a* vienne se placer sur le point *b*.
On te demande:
- d'indiquer par une flèche où arrive le point c par ce glissement;
- de faire de même pour les deux points d et p;
- de repasser en rouge la position de la frise après ce glissement.



Orientations et résultats de quelques recherches montoises sur la maîtrise des premiers nombres naturels

par Y. Tourneur, Université de Mons et
P. Dessailly, Institut de Logopédie, Ghlin-Lez-Mons

Note de la rédaction:
Les pages qui suivent représentent la deuxième partie (II) de l'article de Y. Tourneur et P. Dessailly, dont nous donnons ci-dessous la table des matières intégrale.
Le texte complet de cet article peut être obtenu en écrivant à Y. Tourneur à l'Université de Mons.

TABLE DES MATIÈRES

II. Présentation de quelques résultats

II.1. Troubles fréquemment associés aux insuffisances en calcul

Des études effectuées auprès d'enfants en difficulté d'apprentissage, il ressort une association fréquente des retards en calcul d'une part et des échecs aux épreuves perceptivo-motrices et opératoires d'autre part (Hasaerts-Van

Geertruyden, 1972; Lauriol, 1970; Sylvestre et Daurat, 1972).
Les premiers travaux que nous avons supervisés (A. Jouniaux, 1974; M. Denayer et B. Materne, 1975; Berth, R. et Wattier, J, 1976) montrent que certains troubles sont fréquemment associés aux insuffisances en calcul, notamment:

1. *l'absence d'équivalence entre la dénomination verbale d'un nombre et la connaissance de la quantité qu'il représente.* Le sujet hésite à répondre à une question du genre: «quel est le plus grand nombre: 2800 ou 280?» Le sujet perçoit mal l'ordre de grandeur d'un nombre et ordonne laborieusement les nombres qui précèdent et ceux qui suivent un nombre donné. De même, la valeur du chiffre selon sa position dans le nombre est mal maîtrisée et les confusions sont fréquentes entre unités, dizaines et centaines.
2. *la discordance entre les performances médiocres en calcul mental et les réussites en calcul écrit* (grâce à l'application de trucs). La mémorisation et l'automatisme des opérations de calcul compense la compréhension insuffisante des techniques utilisées. A un calcul oral ou mental, on voit le sujet compter sur les doigts ou utiliser la litanie des nombres. Par exemple, à la question «3 + 4 = ?; il dit «3» puis énumère 4, 5, 6, 7 et répond «7».
3. *la précarité de la décomposition d'un nombre en parties.* Sans support, ni manipulation, les plus jeunes éprouvent les plus grandes difficultés à décomposer 5 par exemple.
4. *la mauvaise perception de la structure temporelle d'un nombre entendu.* Tout se passe comme si le sujet n'écoutait pas le nombre. Lorsqu'on prononce «cent vingt-trois» par exemple, l'enfant ne semble pas entendre les trois nombres «cent», «vingt» et «trois» qui apparaissent successivement.

II.2. Difficultés intrinsèques liées à la maîtrise du nombre

La maîtrise du nombre constitue un prérequis indispensable à la maîtrise des opérations et à la résolution de problèmes numériques. Tous les auteurs sont d'accord sur ce point.
Mais en pratique, l'école tend à oublier la dépendance des acquisitions scolaires par rapport à ce prérequis: l'introduction du nombre dans les programmes scolaires remonte à quelques années et son enseignement reste sacrifié.
Piaget et Szeminska (1950) ont montré la complexité du nombre, compris comme système structuré fusionnant la classe (ou la cardination) et la relation assymétrique (l'ordination). *Le système numérique a la propriété d'être à la fois un système de classe* (2 est emboîté dans 3, et 3 dans 4, ...) *et un ordre de succession.* De plus, il n'est pas possible de définir l'ordinal sans le cardinal: le troisième (ordinal) c'est celui qui a deux (cardinal) prédécesseurs; le deuxième, c'est celui qui n'en a qu'un. Quand on compte les

éléments d'un ensemble, chaque unité est équivalente à l'autre (au plan du cardinal de l'ensemble) mais elle occupe une certaine place dans la série, ce qui la différencie des autres.

Une autre difficulté vient de la genèse du nombre à travers les expériences individuelles (Piaget): le nombre, comme tout concept, correspond à une structuration possible mais non nécessaire des données de l'expérience. *L'expérience est indispensable à la construction du nombre mais elle ne suffit pas car le nombre ne préexiste ni à l'individu ni aux objets.* Le nombre dérive des actions et des opérations exercées par le sujet sur les objets, par un processus «d'abstraction réfléchissante». La pensée décide d'abstraire un aspect de l'expérience, comme le nombre, la couleur, la dimension, la forme, par une activité consciente et dirigée vers un but choisi par la personne. On voit ainsi que l'élaboration de la notion de nombre est liée à l'activité logico-mathématique et pratique de l'enfant.

Rejoignant les conceptions défendues par Jaulin-Mannoni (1975) ou par Revuz (1980), nous pensons que l'accession à une abstraction aussi délicate que celle de nombre naturel (d'autant plus délicate que le qualificatif «naturel» pourrait inciter à croire le contraire) ne peut se fonder efficacement que dans le cadre d'une *interaction optimale entre le savoir du maître et les acquis spontanés de chaque enfant.*

S'il est vrai que l'éducateur et le rééducateur doivent pouvoir se fixer des objectifs en fonction d'exigences mathématiques minimales (par exemple «le nombre naturel est un être mathématique abstrait lié à la constitution de classes d'ensembles équipotents»), il est tout aussi important, pour eux, de reconnaître les déterminants psychologiques de la maîtrise du nombre.

Dans cet ordre d'idées, nous pensons que *la construction du nombre participe à l'édification progressive d'une série de savoirs et d'aptitudes logico-cognitifs corrélatifs. Il ne nous paraît pas réaliste, cependant de donner à ces acquis le statut de prérequis, pas plus qu'il ne convient de les envisager indépendamment les uns des autres.*

C'est ainsi que nous serions enclin à ne parler de réelle intériorisation du nombre naturel (ensemble $\mathbb{N}$) que lorsque l'enfant est tout à la fois capable, dans le domaine des quantités numériques de:

- dénombrer efficacement des collections d'objets et distinguer dans l'acte de dénombrement, tantôt l'aspect cardinal, tantôt l'aspect ordinal;
- utiliser avec succès la correspondance terme à terme et tirer des conclusions correctes quant à l'ordre de grandeur des collections comparées;
- comprendre le lien existant entre ces deux techniques;
- distinguer entre les propriétés numériques et les propriétés non numériques d'un ensemble d'éléments;
- décomposer un nombre et accéder à la conservation des ensembles numériques;
- ordonner les nombres entre eux;
- comprendre le principe de construction de l'ensemble $\mathbb{N}$, en saisir le caractère infini.

Il reste que la maîtrise de ces objectifs complémentaires pose un certain nombre de problèmes que nous avons examinés en partant de quelques grandes questions telles que:

1. Comment créer chez le jeune élève le besoin d'utiliser le nombre comme outil?
2. Quelles sont les propriétés des situations où l'enfant recourt spontanément au dénombrement?
3. Comment organiser l'expérience numérique de l'apprenant?
4. Quelle progression adopter et comment tenir compte des procédures que l'enfant utilise spontanément, telle que la correspondance terme à terme?
5. Quelle est la part de la perception visuelle, kinésthésique, auditive et rythmique dans la conceptualisation du nombre?
6. Comment l'enfant analyse-t-il un nombre? Quelles sont les décompositions et les compositions privilégiées?

Quelques éléments de réponses ont déjà pu être apportés à l'occasion de recherches que nous allons passer en revue maintenant.

II.3. L'usage opérationnel du nombre

Afin de favoriser une meilleure maîtrise du nombre, le pédagogue ou le rééducateur doit se demander dans quelle(s) situation(s) l'enfant pensera à utiliser *spontanément* le nombre et quelles sont les variables propices à cette utilisation.

Pour répondre à cette question, une recherche a été menée sous notre direction dans le prolongement des travaux de Gréco (1962) et de Meljac (1979), par D. Callens et P. Houdart (1980).

II.3.1. Travaux de Meljac (1979)

Selon Gréco (1962), le nombre reçoit son statut opérationnel lorsque le dénombrement n'est plus seulement un simple procédé verbal de dénomination des quantités ou collections mais qu'il devient un schème d'action un *mesurant* en l'occurrence.

La question principale était: quand et comment l'enfant confronté à une situation problème aura l'idée d'utiliser le nombre et pour quel type de problème?

Pour répondre à cette question, Meljac crée la situation expérimentale suivante: sur une table, devant le sujet, sont disposées des poupées (au nombre de 4, 6 ou 9) qu'il doit habiller à l'aide de robes qui sont situées sur une autre table, le plus loin possible de la première. La consigne comprend notamment: «Regarde ces poupées. Elles ont très froid. Tu vas aller chercher des robes pour les habiller. Mais attention: elles veulent toutes s'habiller en même temps; il ne faut pas apporter de robes en trop; va chercher juste ce qu'il faut de robes!».

L'étude a porté sur 85 enfants âgés de 4 à 7 ans. De ses analyses, l'auteur

conclut à l'existence d'un écart entre la capacité à dénombrer et la réussite à l'épreuve des poupées. Par exemple, si 80% des enfants de 5 ans-5 ans 6 mois savent dénombrer une collection de six objets, seuls 28% ont l'idée de recourir à ce nombre dans l'épreuve, au premier essai. *Savoir dénombrer est donc une condition nécessaire mais non suffisante pour que le nombre soit utilisé de manière fonctionnelle.*
Outre l'analyse quantitative des conduites des enfants, Meljac a répertorié les stratégies pré-numériques et les erreurs les plus fréquentes.
Dans une autre étude, Meljac demande à chaque enfant de décrire «du mieux qu'il peut» un ensemble d'objets (jetons de couleur collés sur des cartes), afin de voir l'usage du nombre en tant que descripteur. Les réponses des sujets montrent que l'idée spontanée de dénombrer pour décrire ne vient à l'esprit d'un enfant que lorsque la quantité à dénombrer lui est familière et qu'il la connaît parfaitement.

II.3.2. La recherche de Callens et Houdart (1980)

1. BUTS

Afin de préciser les caractéristiques des situations qui déterminent l'usage (opérationnel et descripteur) du nombre, les auteurs ont analysé le rôle des variables situationnelles suivantes: *le type d'activités* (description ou construction d'un matériel), *la concrétude du matériel* (animaux miniaturisés ou jetons) et son *degré d'homogénéité* (matériel composé d'objets identiques ou différents).

2. POPULATION ET SITUATIONS EXPERIMENTALES

L'âge des sujets variait entre 4; 6 ans et 6; 11 ans (élèves de 2e et 3e maternelles et de 1re année primaire).

Trois types de situations expérimentales ont été conçues:

Type 1: des *situations de description libre* où l'enfant est invité à dire ce qu'il voit. L'enfant doit «décrire le mieux qu'il peut» tout ce qu'il a devant lui. Les situations varient selon que les objets sont différents ou identiques et selon le cardinal des ensembles (6 ou 9). Dans toutes les situations, les deux chercheurs ont participé à l'expérience. Dans ce cas-ci, l'un proposait la situation à l'enfant tandis que l'autre devait dessiner ce que lui disait le sujet: le 2e opérateur ne voyait pas la situation. Un tel jeu de communication avait été aménagé de manière à favoriser l'expression spontanée de l'enfant et à créer une situation aussi peu artificielle que possible.

Type 2: des *situations d'information* où l'enfant doit décrire un matériel composé de cubes ou de wagonnets identiques afin d'aider une personne (le 2e opérateur) à construire le même matériel. L'enfant écoute la consigne formulée par le 1er opérateur:

«Regarde, tu vois, j'ai construit un train (ou une tour). Tu vas aller raconter à P. (2e opérateur) ce qu'elle doit faire pour construire le même train (ou tour), un train (ou tour) tout à fait pareil».

Chaque sujet est confronté à 4 situations: une tour de 6 cubes, une autre de 9, un train de 6 wagons et un autre de 9.

Type 3 :nombre défini d'objets. Par exemple, le sujet doit prendre un nombre de soucoupes égal à une nombre donné de tasses («pour que chaque tasse ait sa soucoupe»). Cette épreuve est inspirée de l'épreuve des poupées de Meljac. On a présenté au sujet des dominos (6 puis 9), puis des jetons en désordre (6 puis 9), puis la situation des 9 tasses et des soucoupes disposées en ligne, et enfin 9 fleurs et tiges disposées au hasard.

3. RESULTATS

L'analyse des résultats confirme les travaux de Ghesquire et al. (1978, 1979) sur l'évolution du dénombrement en fonction de l'âge: *le dénombrement des enfants les plus jeunes est surtout du type oral et gestuel alors que chez les enfants les plus âgés, le dénombrement est surtout mental et visuel* (tableau 1).

La recherche montre que dans les situations de description libre, le dénombrement est plus fréquent lorsque les objets sont identiques que lorsque les objets sont différents (tableau 2). Les sujets manifestent une tendance très marquée à faire l'énumération des objets différents, en disant par exemple: «il y a un cochon, un lapin, une vache, un cheval, une poule, un mouton». Ces données confirment donc qu'un *matériel homogène sollicite davantage l'usage descripteur du nombre alors qu'un matériel hétérogène suscite surtout une analyse des éléments.*

Par contre, les différences observées en fonction de la *grandeur des nombres* ne permettent pas de dire que l'utilisation d'une collection relativement grande favorise le recours au nombre. Cependant, dans toutes les situations expérimentales, lorsqu'ils sont en présence d'une collection de 9 objets, les enfants sont plus nombreux à compter que face à 6 objets.

L'utilisation de *situations bien structurées* comme les dominos ne suscite pas plus de dénombrement que les ensembles présentés en désordre: ce sont au contraire les configurations désordonnées qui induisent le plus de réponses de dénombrement.

Quant à l'influence des *types de situations*, les situations de type 3 (construction) amènent le plus grand nombre de conduites de dénombrement et les situations de type 1 (description) en amènent le moins.

L'opposition *matériel «concret» – matériel «abstrait»* ne différencie pas les conduites spontanées.

On peut conclure de cette recherche qu'un matériel non structuré composé d'éléments homogènes est propice aux activités de dénombrement spontané, surtout dans les situations où l'enfant doit fournir les explications ver-

bales nécessaires à la reconstitution du matériel et dans les situations où l'enfant doit construire lui-même un ensemble équipotent à la collection de départ.

Tableau 1 Pourcentage d'utilisation des différents dénombrements en fonction de l'âge, pour l'ensemble des situations expérimentales.

Tranches d'âge	Stratégies de dénombrement			
	Oral et gestuel	Oral et visuel	Mental et gestuel	Mental et visuel
4 ; « à 4 ; 11 (154)	43 soit 27 %	–	6 soit 3 %	2
5 à 5 ; 5 (84)	20 soit 23 %	1	8 soit 9 %	11 soit 13 %
5 ; 6 à 5 ; 11 (84)	7 soit 8 %	–	13 soit 15 %	19 soit 22 %
6 à 6 ; 5 (70)	–	1	–	41 soit 58 %
6 ; 6 à 6 ; 11 (168)	6 soit 3 %	–	19 soit 11 %	54 soit 32 %

Les données dans les cases indiquent les fréquences d'utilisation des différents dénombrements. Les pourcentages sont obtenus en comparant chaque fréquence au nombre total d'utilisations possibles (produit du nombre d'enfants par le nombre de situations – entre parenthèses dans la première colonne).

Tableau 2: Pourcentages d'utilisation des stratégies selon la nature du matériel (homogène ou hétérogène) dans les situations du type 1.

Stratégies	Situations expérimentales			
	6 objets identiques	9 objets identiques	6 objets différents	9 objets différents
Dénombrement	42	47	0	15
Enumération	7	0	90	32
Emploi du déterminant «des»	15	15	0	10

II.4. Les décompositions privilégiées d'un nombre

1. BUTS

Sachant l'importance qu'attribue, dès le premier cycle, le programme de mathématique de l'école primaire belge à l'apprentissage de l'addition et plus spécialement à la «décomposition – composition» d'un nombre, D. Baneton, B. Bronchart et A. Dupont (1980) se sont attachées à l'analyse des stratégies utilisées par 20 enfants issus de 3 classes différentes de première année primaire, lors de tâches de décomposition additive en deux termes des nombres de 5 à 10.

L'idée de cette recherche s'inspire de la constatation faite par l'un d'entre nous lors de rééducation, selon laquelle les enfants semblent privilégier systématiquement certaines décompositions d'un nombre plutôt que d'autres.

La limitation du champ d'étude aux nombres de «5» à «10» s'explique d'une part parce qu'il n'existe qu'une ou deux décompositions pour les nombres «1», «2» et «3» et d'autre part, parce que les nombres jusqu'à «10» constituent la base du système décimal, «10» en étant une charnière essentielle dans l'apprentissage des jeunes enfants.

Quant au nombre «4», il sert d'exemple lors de l'énoncé des consignes.

Deux hypothèses ont été formulées:

1. les enfants de première année primaire privilégient une décomposition à deux termes pour chaque nombre;
2. les enfants ne sont pas en mesure d'épuiser, lorsqu'on les y invite, l'ensemble des décompositions d'un même nombre.

2. SITUATIONS EXPÉRIMENTALES

Les enfants ont été soumis à 9 situations variées, parmi lesquelles quatre épreuves nécessitant la manipulation d'un matériel concret et cinq épreuves symboliques. Dans les épreuves concrètes successivement dénommées épreuve des fleurs; épreuve des chapeaux; épreuves des tasses et épreuve des poteaux, l'enfant reçoit un matériel miniaturisé qui constitue la quantité de référence.

Ensuite il doit aller puiser successivement dans deux collections reliées au matériel de référence par un rapport naturel, une quantité d'objets juste suffisante de manière à ce que le nombre obtenu par réunion des deux collections corresponde au nombre d'objets du matériel de référence. Ainsi, par exemple, dans l'épreuve des chapeaux, il reçoit 7 figures de petites filles. Ensuite il doit aller prendre «des chapeaux pointus», puis, à un autre endroit du local «des chapeaux plats» en veillant bien à ce qu'il y ait autant de chapeaux que de filles.

Les cinq épreuves symboliques se divisent en deux épreuves écrites, deux orales et une épreuve d'association de cartons. La première épreuve écrite, du type «5 = ... + ...» consiste pour l'enfant à donner pour chaque nombre de 5 à 10 la première décomposition qui lui vient à l'esprit. Pour la seconde épreuve, l'enfant doit écrire le maximum de décompositions relatives à chacun des nombres étudiés. Les épreuves orales sont exactement parallèles aux deux précédentes. Dans la première, l'enfant répondant à la question «x c'est combien et combien», propose spontanément une décomposition. Dans l'autre épreuve, il doit citer, pour chacun des nombres, toutes les décompositions qu'il connaît. Dans l'épreuve des cartons, enfin, l'enfant a devant lui deux colonnes de cartons numérotés de 1 à 10 à gauche et de 10 à 1 à droite. Choisissant un carton dans chaque colonne, il est invité à construire les nombres qui lui sont demandés. L'ensemble des épreuves dont la passation dure, en moyenne, trois heures par enfant, est divisé en cinq parties proposées chacune à des moments différents. Les deux épreuves symboliques écrites se déroulent collectivement. Les autres sont individuelles.

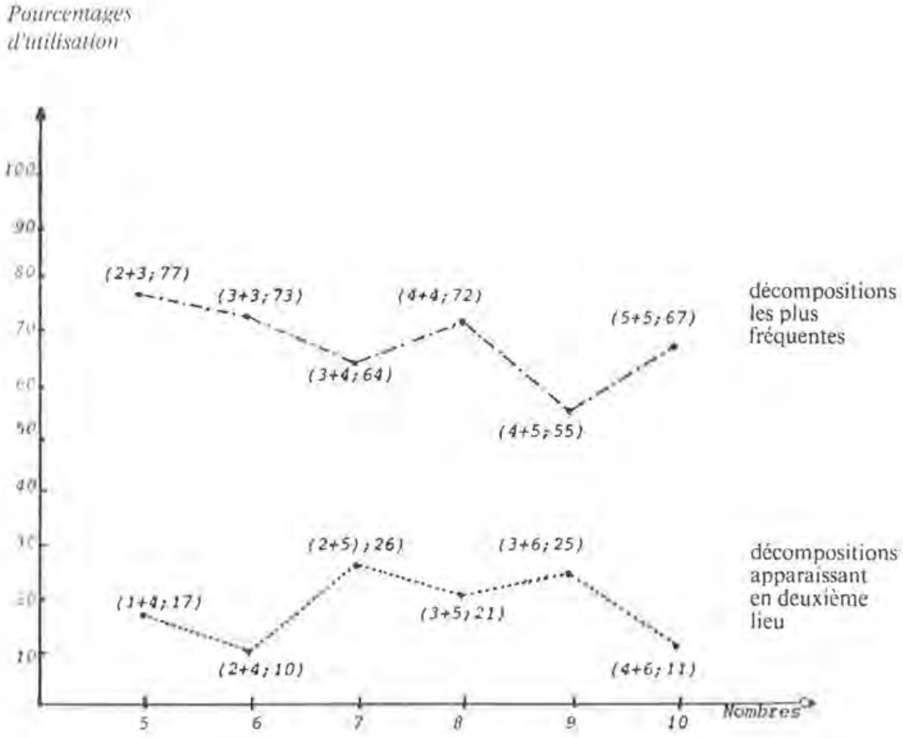
3. RESULTATS

Les résultats obtenus suggèrent, dans les limites de la population étudiée, quelques observations et commentaires utiles.
Les épreuves concrètes révèlent qu'il existe pour chaque nombre étudié, dans les trois groupes d'enfants, une décomposition privilégiée dont la fréquence d'utilisation est élevée, ces décompositions sont:

$2 + 3$ pour le nombre 5
$3 + 3$ pour le nombre 6
$3 + 4$ pour le nombre 7
$4 + 4$ pour le nombre 8
$4 + 5$ pour le nombre 9
$5 + 5$ pour le nombre 10. (tableau 3)

Ces décompositions sont toutes soit «symétriques» (pour les nombres pairs) soit «parasymétriques» (pour les nombres impairs). La fréquence d'emploi de chacune de ces décompositions est élevée. Elles sont choisies au moins deux fois plus souvent que toute autre. D'autre part, lorsqu'on analyse l'utilisation préférentielle de chacune des décompositions possibles d'un nombre (par exemple, pour le nombre 7: $1 + 6$; $2 + 5$; $3 + 4$; etc.) on constate que plus on s'éloigne des décompositions de structure symétrique ou parasymétrique, plus la fréquence d'utilisation diminue. Ceci incite à penser qu'il existerait une gradation dans la «puissance attractive» des décompositions, l'enfant choisissant d'autant plus fréquemment et spontanément une décomposition que sa structure se rapproche de la forme symétrique ou parasymétrique.
Aux épreuves symboliques, les résultats sont plus nuancés et semblent davantage subir l'influence de l'enseignement. On note encore des décompositions symétriques et parasymétriques privilégiées chez certains enfants avec, cette fois, l'apparition de la décomposition $1 + \ldots$ On constate, par ailleurs que lorsque l'enseignant insiste davantage sur un type bien particu-

Tableau 3: Fréquence d'utilisation de diverses décompositions des nombres de 5 à 20.



Le premier chiffre entre parenthèses précise le type de décompositions et le second le pourcentage d'utilisation.
Le type de décomposition est caractérisé par une seule formule (ex.: 2 + 3) mais il est évident que chaque type recouvre deux formules (ex.: 2 + 3 et 3 + 2) qui n'ont pas été distinguées dans l'étude.

lier de décomposition, celui-ci apparaît presqu'exclusivement dans le groupe d'enfants concernés par cet enseignement. Les décompositions symétriques et parasymétriques viennent alors en second lieu. Les épreuves où l'enfant est invité à épuiser le maximum de décompositions spécifiques à chaque nombre révèlent que les décompositions du nombre 6 sont connues par la majorité des enfants tandis que celles du nombre 9 sont les moins bien maîtrisées.

Les résultats ci-dessus suscitent quelques réflexions. D'abord, il semble que la principale façon d'appréhender la décomposition en deux termes s'assimile au partage en deux parties égales. Ensuite, l'apparition fréquente, dans les épreuves symboliques, de la décomposition de type 1 + x, entraîne la question suivante: «D'où vient ce privilège en faveur de ce type de décomposition?». Cela pourrait s'expliquer de deux façons:

- soit que cette décomposition correspond à un principe fondamental de décomposition du nombre chez l'enfant;
- soit que l'enseignement amène à l'usage privilégié de cette décomposition. Personnellement, nous pencherions vers la deuxième interprétation car le fait d'être habitué à sérier les nombres, à les envisager dans la suite ordinale, permet à l'enfant de manier assez fréquemment cette décomposition. Le programme insiste d'ailleurs sur l'utilisation de l'opérateur numérique + 1.

Enfin, nous signalerons que davantage de décompositions sont omises dans les épreuves orales que dans les épreuves écrites. Il est évident que le support écrit favorise l'évocation des décompositions manquantes à partir de l'observation des décompositions déjà écrites. Lors de l'épreuve orale, tout se fait mentalement; les décompositions émises d'emblée par les enfants sont vraisemblablement celles qu'ils manipulent avec le plus d'aisance.

II.5. Les stratégies de recherche d'ensembles équipotents

Nous allons présenter quelques stratégies typiques qu'utilisent des sujets de 5 à 8 ans pour résoudre les opérations numériques. Cet axe de recherche nous a paru dès le départ d'une grande pertinence. Il se justifie par notre ignorance des difficultés et des modes d'appropriation par les enfants de l'arithmétique élémentaire. Or la connaissance des démarches et des stratégies choisies par les élèves, qu'elles soient correctes ou erronées, fournit des indications précieuses dans les décisions méthodologiques.
A cet égard, plusieurs épreuves révèlent de manière particulière les stratégies acquises par les sujets en bas âge. C'est le cas de la copie d'une quantité donnée (Gréco, 1962) et les épreuves de construction où l'enfant doit aller choisir un nombre d'objets égal au cardinal d'un ensemble donné (épreuves inspirées de Meljac, 1979).
Dans une première étude (Ghesquire, Nimal, Brynaert, Frydman et Tourneur, 1979) sur la copie d'une quantité, on a fait varier la quantité à reproduire (de 3 à 17 éléments), le mode de reproduction (copie de pions au moyen de pions semblables; copie de points au moyen de pions; de points au moyen de points) et le placement des éléments à reproduire (sous forme de dominos, disposés en ligne ou dispersés au hasard).
L'enquête a été menée auprès d'une trentaine d'élèves belges du cycle 5-8 (cycle expérimental où l'enseignant décide du moment auquel un enfant

débute les apprentissages de base, entre 5 et 8 ans). Elle révèle la variété et l'originalité des procédures que les enfants utilisent spontanément, mais avec une efficacité inégale.

Quatre stratégies principales ont été diagnostiquées:

1. La *copie syncrétique:* l'enfant reproduit la forme générale de l'ensemble présenté sans vérifier que la copie a même cardinal que le nombre. La réponse ne se rencontre que chez les plus petits (classe maternelle) après une tentative avortée de correspondance terme à terme.
2. la *«reconnaissance» immédiate:* le sujet perçoit de façon globale l'ensemble qu'il reproduit sans le dénombrer systématiquement. La stratégie est utilisée très fréquemment pour les petites quantités où elle se révèle très efficace. Son taux d'utilisation et son efficience sont presque nulles au-delà de 7. Dès que le nombre à déchiffrer est supérieur à 5, la plupart des enfants perçoivent la faiblesse de la stratégie et l'abandonnent au profit de la correspondance et du dénombrement. Elle est quelquefois suivie d'une vérification par dénombrement oral et gestuel; dans d'autres cas, elle est précédée d'une restructuration du modèle à reproduire qui est transformé en un schème familier (⁙ pour 5, ⁙⁚ pour 7 par exemple).
3. la *correspondance terme à terme:* l'enfant fait correspondre à chaque pion du modèle son équivalent dans la copie jusqu'à ce que la copie reproduise le modèle. Elle est relativement efficace pour les nombres situés entre 5 et 10 y compris et lorsque le modèle rappelle un schème connu. Par contre, lorsque les éléments des modèles à reproduire sont présentés en ligne ou dispersés au hasard et que les quantités dépassent 10, on observe de nombreuses erreurs chez ceux qui utilisent la correspondance: elles sont dues à l'omission ou à la répétition d'une unité ou d'une partie du modèle. La correspondance est davantage utilisée par les élèves de 6 à 7 ans alors que leurs aînés préfèrent dénombrer le modèle avant de le copier. Dans certains cas, les élèves vérifient la stratégie en dénombrant oralement et par pointage la quantité donnée.
4. le *dénombrement:* avant de reproduire l'ensemble, le sujet compte les unités qui lui sont présentées, selon l'une des modalités suivantes:
    1. *dénombrement oral et gestuel:* le sujet dit à haute voix le nombre correspondant à chaque unité qu'il pointe du doigt;
    2. *dénombrement oral et visuel:* le sujet accompagne du regard (souvent appuyé d'un mouvement de la tête) le dénombrement oral de la quantité présentée;
    3. *dénombrement mental et gestuel:* le sujet pointe chaque unité en même temps qu'il dénombre mentalement la quantité;
    4. *dénombrement mental et visuel:* le sujet compte mentalement sans accompagnement gestuel.

On pourrait croire que le meilleur dénombrement est oral et gestuel puisqu'il sollicite à la fois la vérification par le geste et par la parole. Or, on constate que le taux de réussite par dénombrement mental et gestuel est encore plus élevé (97% contre 84% à l'épreuve de copie de pions par des points). La raison en est que l'utilisation simultanée du geste et de la parole suppose la synchronisation du pointage et de la litanie, donc leur coordination verbo-motrice. Notons cependant que certains sujets vérifient oralement un premier dénombrement qui s'est fait sur un mode mental et gestuel.

Nous avons observé que l'enfant ne recourt à l'appui gestuel que pour dénombrer les quantités disposées en ligne ou au hasard: les configurations optimales évoquent en effet des schèmes déjà maîtrisés; elles requièrent donc moins d'aide!

Le dénombrement est une stratégie plus caractéristique des enfants de 8 ans et qui se révèle la plus efficace pour les grands nombres.

Ces premières observations ont été confirmees dans l'étude de C. Bourlard et M. Brohée (1979) qui portait sur trois classes du cycle 5-8 extraite de la région de Mons et du Borinage (l'étude précédente portait sur trois classes de la région de Binche et du Centre). La reconnaissance immédiate est apparue comme la stratégie la plus fréquemment adoptée pour les petites quantités, celles qui sont les mieux maîtrisées. Les stratégies de dénombrements sont employées pour les quantités plus grandes. Des stratégies nouvelles sont utilisées par les sujets de Bourlard et Brohée:

1. le *dénombrement par paquets:* le sujet décompose la quantité donnée en parties qui sont dénombrées individuellement. La quantité est alors reproduite totalement par la composition des reproductions partielles dont chacune porte sur une des quantités dénombrées. Certains sujets de première année procèdent de la même façon, en décomposant la quantité à reproduire, selon des configurations typiques (les dominos par exemple) ou en groupant 2 ou 3 éléments, sans qu'il y ait donc dénombrement des parties isolées. Il arrive aussi que chaque «paquet» soit identifié par dénombrement oral et visuel. Par exemple, un ensemble de 17 éléments est divisé en 3 parties de 5 et 1 de 2, chaque partie étant isolée après comptage.
2. l'*association de plusieurs démarches pour résoudre un même item.* Plusieurs modes de dénombrement sont utilisés au cours de la même épreuve: surtout pour les nombres supérieurs à 5; très souvent, un dénombrement mental-visuel est suivi d'un dénombrement oral-gestuel. Dans le même ordre d'idées, on a observé des démarches de vérification dans le cas où l'enfant n'est pas sûr de sa réponse, avec l'apparition des stratégies particulières telles que la correspondance 2 à 2 (Bessot et Comiti, (1978) observent ce type de démarche qu'ils qualifient de *correspondance paquet par paquet,* après une correspondance classique terme à terme).

La conduite de vérification (du cardinal de l'ensemble à reproduire, ou de la copie) n'est pas systématique et n'apparaît qu'en première année. Quand elle se produit, l'enfant choisit le plus souvent une méthode plus sûre que la première, par le recours aux soutiens oraux et moteurs.

J. A. 1211 GENEVE 6

Abonnements:

Suisse: F 12.—, Etranger F 14.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, CH-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie typo-offset Fiorina & Burgener, 1950 Sion