MATH
ECOLE

JANVIER
1968
7e ANNÉE

31

Math-Ecole 1968

Voici «Math-Ecole» au début de sa septième année d'existence. Notre bulletin a, chemin faisant, connu plusieurs avatars qui n'ont fait que refléter l'évolution des idées dans l'enseignement de la mathématique. Cette évolution se poursuivra et aujourd'hui même nous savons que demain nous aurons encore à changer: à nous changer nous-mêmes et à changer l'instrument de notre expression. Disons cependant ce que nous sommes au seuil de cette année 1968. Devenant, nous avons l'ambition d'être toujours mieux nous-mêmes et d'être fidèles à notre préoccupation majeure, celle de notre début en 1962: aider les maîtres pour qu'ils puissent donner à leurs élèves une éducation mathématique qui, selon le mot de Nicole Picard, fasse d'eux des adultes intellectuels. Pour remplir notre tâche, il nous est apparu qu'un travail en équipe était nécessaire. Aussi le rédacteur du Bulletin est-il heureux de présenter à ses lecteurs le COMITE DE REDACTION qui désormais présidera à ses destinées: Arlette Grin, Berthold Beauverd, Léo Biollaz, Gaston Guélat, Laurent Pauli, Nicolas Savary et le soussigné.

Arlette Grin, institutrice vaudoise, a déployé, dans le degré inférieur des classes primaires de son canton, une activité d'avant-garde qui l'a désignée pour diriger des cours d'école active dans le cadre des cours normaux de la Société suisse de travail manuel et de réforme scolaire. C'est à ces cours-là qu'elle a reçu sa première formation de spécialiste de la didactique nouvelle du calcul et c'est à eux aussi qu'elle a, à quatre reprises donné sa collaboration comme chef de cours Cuisenaire. Elle a dirigé aussi les cours Cuisenaire de Crêt-Bérard organisés par la Société pédagogique vaudoise. Depuis plus de trois ans enfin, Arlette Grin est détachée de sa classe pour animer le renouvellement de l'enseignement de la mathématique dans les classes primaires du canton de Vaud [1].

Berthold Beauverd est inspecteur scolaire vaudois. Il a toujours été attiré par les maths et on lui doit, dans ce domaine, deux ouvrages importants: un livre de géométrie pour les classes supérieures de l'enseignement primaire et «Avant le calcul»[2], petit volume que chacun connaît et qui montre comment on peut préparer l'enfant à aborder le nombre en s'inspirant des idées de Jean Piaget. Berthold Beauverd a réservé un accueil chaleureux à toutes les tentatives qui visaient à améliorer l'enseignement de l'arithmétique. Il a fait plus que cela: il a mis la main à la pâte, il s'est abondamment informé et a entrepris des expériences dont les lecteurs du Bulletin ont eu des échos [3].

Léo Biollaz n'est pas à présenter ici. Tout le monde connaît son activité débordante dans le domaine Cuisenaire: à l'école normale de Sion, aux cours cantonaux valaisans, aux cours fédéraux aussi. Léo Biollaz, depuis quelques années, donne un cours Cuisenaire au Séminaire de pédagogie curative de l'Université de Fribourg. Il a été appelé à faire des exposés et à donner des cours en Suisse allemande et à l'étranger, en France notamment et en Belgique. C'est à lui que nous devons, pour une large part, le lancement du Bulletin.

Gaston Guélat, instituteur du Jura, a derrière lui 26 ans d'enseignement dont huit à l'école d'application de l'Ecole normale de Porrentruy. Nos lecteurs auront eu l'occasion de se faire une idée de son activité au service de la «cause» en lisant les numéros 29 et 30 du bulletin (septembre et novembre 1967). Ils auront vu se dessiner le portrait d'un homme qui répand son grain à pleines mains besognant aussi bien avec les enfants et les normaliens, dans sa propre classe qu'avec ses collègues et les parents. Gaston Guélat a, lui aussi, dirigé des cours fédéraux et apporté sa contribution à des cours belges et français.

Laurent Pauli est aussi bien connu en Suisse comme à l'étranger. Mathématicien — il est docteur ès-mathématiques du Polytechnicum de Zurich — il est aussi pédagogue et psychologue. Comme pédagogue, il a enseigné au gymnase cantonal de Neuchâtel dont il devint le directeur. Cette institution lui doit aussi d'avoir été une des toutes premières de Suisse à introduire officiellement un programme de mathématique moderne au niveau de la maturité. Laurent Pauli a dirigé aussi l'Ecole normale cantonale — réorganisée — de Neuchâtel et y a introduit une nouvelle didactique du calcul fondée sur la psychologie de Piaget. Et c'est en tant que lecteur averti de ce dernier qu'il a été appelé à donner un cours de psycho-pédagogie de la mathématique à l'Institut des Sciences de l'Education de l'Université de Genève. Depuis plus de deux ans, Laurent Pauli, qui a quitté Neuchâtel, dirige cet institut et y donne le cours de pédagogie générale.

Nicolas Savary enfin — last but not least — est un maître qui, de polyvalent qu'il était au début de sa carrière, s'est spécialisé dans l'enseignement de la mathématique. Il a subi l'influence, combien bénéfique, de Léo Biollaz, s'est ouvert aux courants de la pédagogie moderne du calcul et a réalisé dans son école du Valentin à Lausanne ce «laboratoire de mathématiques» que nous avons eu le privilège de présenter à nos lecteurs

en mai 1967 (numéro 28). Nicolas Savary a dirigé des cours fédéraux et cantonaux. Il a donné un enseignement d'un an aux maîtres des classes primaires supérieures de Sion. Il est, depuis septembre dernier, à Sherebrooke (Canada) où il travaille sous la direction du professeur Dienes.

L'équipe rédactionnelle ainsi formée se met à la disposition des lecteurs du Bulletin. Elle souhaite pouvoir les aider efficacement dans leur tâche. Elle les prie aussi de faire connaître leurs besoins, leurs critiques, leurs questions comme leurs expériences, leurs réussites et leurs espoirs.

Si «Math-Ecole» se voit doté d'une aide morale importante, il faut dire aussi qu'une aide matérielle — et qui n'est pas que matérielle — ne lui manque pas. Il y a celle de nos abonnés, fidèles et chaque année plus nombreux. Il y a aussi celle des cantons. Le Valais vient en tête puisque c'est grâce à lui que le Bulletin a pu paraître comme tiré à part de «L'Ecole valaisanne». Cette manière de procéder subira néanmoins une légère modification: «L'Ecole valaisanne» n'accueillera plus que les articles les plus importants de caractère général, scientifique et pédagogique. Les autres articles seront composés pour «Math-Ecole» seulement. Début d'autonomie... Les cantons de Genève et de Vaud nous appuient aussi en prenant à leur charge un nombre important d'abonnements. A nos autorités scolaires va ainsi notre vive reconnaissance.

L'an 1968 est commencé. Il sera en grande partie ce que nous en ferons. Qu'à chacun d'entre nous soient données toute sagesse, toute vaillance, toute ardeur pour avancer et monter.

S. Roller

---

1 Le numéro 25 des «Nombres en Couleurs» (novembre 1966) reproduit des travaux d'enfants apparus dans les classes que suit et conseille Arlette Grin.

2 Delachaux et Niestlé, Neuchâtel. Un matériel ad hoc est sur le point d'être mis sur le marché.

3 Voir, «Les Nombres en couleurs», numéro 23, mai 1966: Une expérience Cuisenaire dans le canton de Vaud.

Réflections sur l'introduction de la mathématique moderne à l'école primaire

L'article qu'on va lire sera pour les lecteurs de Math-Ecole l'occasion, si besoin est, de faire la connaissance de Laurent Pauli. Ce dernier éprouvait le besoin de mettre un certain nombre de choses au point. Il le fait dans un langage que certains trouveront quelque peu difficile. Cela nous vaudra peut-être des questions que nous accueillons déjà avec plaisir et intérêt. Pauli aborde une question fondamentale: rien de solide ne peut être construit dans la didactique du calcul — comme d'ailleurs dans toute didactique — qui ne soit fondé en psychologie. La psychologie de l'intelligence de Jean Piaget est, à l'heure actuelle, la plus valable, la plus solidement charpentée. Veillons afin que ce que nous proposons aux enfants n'enfreigne pas les lois établies par cette psychologie. Et si les travaux des pédagogues devaient, un jour, concourir à faire se dégager de nouveaux aspects de la pensée enfantine, que ces travaux soient établis en science, c'est-à-dire fondés sur des faits dûment établis et coordonnés. Sur ce plan tous les accords sont possibles. C'est à ce prix d'ailleurs que la science progresse et, avec elle, la pédagogie.

S. R.

Introduction

Toute réforme d'un programme scolaire, quel qu'il soit, doit être prospective, ce qui signifie que nous devons en premier lieu nous libérer du souci de respecter la tradition. Bien plus, la rapidité de l'évolution du monde est telle qu'il est vain de se demander quelles connaissances précises seront nécessaires aux adultes de 1980 ou de l'an 2000. Ce que nous savons, c'est, par exemple, qu'aujourd'hui un million de Français changent chaque année de profession et qu'à l'avenir ces mutations seront plus nombreuses encore. Il convient donc de préparer l'homme de demain à s'adapter sans cesse à des situations nouvelles. Gaston Berger écrivait à ce sujet dans «Prospective» No 5, pp. 125-126: «Nous avons à vivre non point dans un monde nouveau, dont il serait possible de faire au moins la description, mais dans un monde mobile. C'est-à-dire que le concept même d'adaptation doit être généralisé pour rester applicable à nos sociétés en accélération; il ne s'agit pas pour nous de prendre une nouvelle forme ou une nouvelle attitude plus convenable que l'ancienne. Il s'agit de ne nous figer dans aucune attitude, de devenir souples, disponibles, de rester calmes au milieu de l'agitation et d'apprendre à être heureux dans la mobilité». Dans cette perspective, la formation de l'esprit, l'aptitude à tirer parti d'informations de natures très diverses l'emportent sur les connaissances. Certes, des notions de base sont indispensables, sans lesquelles d'ailleurs toute réflexion, tout raisonnement, toute recherche deviennent impossibles. Il importe donc de déterminer avec soin ces notions élémentaires, ces matériaux de base qui permettent un développement des individus, aujourd'hui enfants ou adolescents, dans des directions imprévisibles. Plus encore, la mobilité, la capacité de chercher, d'inventer, devraient être cultivées dès le début de la scolarité.

Ce qui vient d'être dit s'applique sans restriction au programme de mathématique dès l'école enfantine. A condition toutefois de tenir compte des résultat de la psychologie génétique: nous ne devons pas oublier, en effet, combien des apprentissages prématurés peuvent perturber des enfants et devenir générateurs d'angoisse ou de dégoût. Programmes et méthodes sont d'ailleurs étroitement liés: la capacité de s'adapter sans cesse à des situations nouvelles dépend plus des méthodes que des matières enseignées. Or l'introduction de la mathématique moderne n'exclut pas des procédés aberrants qui conduisent eux aussi aux échecs rappelés ci-dessus. Bien plus, en présence des nombreuses expériences de modernisation de l'enseignement, on doit se demander constamment: qu'est-ce que l'enfant a assimilé? Il ne suffit pas de se contenter des impressions recueillies par des maîtres ou des expérimentateurs placés dans des conditions exceptionnelles, mais de prévoir des contrôles expérimentaux aussi objectifs que possible. Nous devons sans cesse avoir présent à l'esprit que ce qui compte c'est de mettre au point des programmes et d'inventer des méthodes que **tous** les maîtres puissent appliquer dans des conditions normales avec **tous** les enfants d'une «volée». Cela va poser le difficile problème de la préparation des maîtres, auquel nous ne manquerons pas de revenir plus loin.

Les quelques remarques exprimées dans cette introduction conduisent naturellement à préciser les subdivisions de cette étude:

1. **Bref inventaire des notions élémentaires de mathématique moderne**
2. **Mathématique moderne et psychologie génétique**
3. **Les programmes**
4. **Les méthodes**
5. **La préparation des maîtres**

Ajoutons que nous nous limiterons ici à l'école enfantine et aux quatre premières années de la scolarité primaire.

1. Bref inventaire des notions élémentaires de mathématique moderne

Commençons par l'inventaire des notions qui figurent désormais dans un cours de mathématique élémentaire de l'enseignement du 2e degré: on peut s'étonner de cette référence à l'enseignement du 2e degré: en réalité, c'est ce que propose des auteurs comme Dienes et Picard pour l'école primaire.

Ensembles — sous-ensembles, intersections, réunion, différence symétrique, complémentaire, partition, ensemble-produit.

Relations: binaire, relation d'équivalence, relation d'ordre.

Applications: quelconques, puis surjectives, injectives et bijectives.

Lois de compositions internes: associativité, commutativité, élément neutre, élément absorbant.

Opération interne: distributivité d'une opération interne par rapport à une autre opération interne.

Structure de groupe.

Structure d'espace vectoriel.

Nous renonçons à analyser ici en détail la liste des matières énumérées ci-dessus: nous renvoyons le lecteur qui désire les étudier au seul livre publié en Suisse: «A. Calame, Mathématique moderne I, éditions du Griffon».

Toutefois, avant de confronter ces différentes matières aux renseignements que peut nous apporter la psychologie génétique quant à leur place dans un programme et aux méthodes adéquates, il faut nous arrêter un instant à la construction du **nombre** dans la perspective ensembliste. A vrai dire, mis à part le langage nouveau, les mathématiciens ont toujours suivi des méthodes analogues à celle que nous allons exposer.

Considérons deux ensembles E et F et admettons qu'il existe une bijection f de E sur F. Autrement dit, pour tout y appartenant à F, il existe un et **un seul** x appartenant à E, tel que $y = f(x)$.

f

x ——————— o   F

x ——————— o

x ——————— o

x ——————— o

x ——————— o

x ——————— o

x ——————— o

E

Ou encore, tout élément de F est l'image d'un et un seul élément de E.

On dit qu'un ensemble E a **même puissance** qu'un ensemble F, s'il existe une bijection de E sur F. «Avoir la même puissance que» définit une relation d'équivalence. En effet, E a la même puissance que E, la relation est donc réflexive: si E a la même puissance que F, F a la même puissance que E, d'où la symétrie et enfin, si F et G ont la même puissance que E, F a la même puissance que G, la relation est transitive.

Si l'on envisage deux ensembles quelconques E et F, l'une au moins des deux affirmations suivantes est vraie:

E a la même puissance qu'un sous-ensemble de F,

F a la même puissance qu'un sous-ensemble de E.

Si elles sont vraies simultanément, E et F ont la même puissance.

C'est l'énoncé d'un théorème plausible dont la démonstration est difficile (ce qui est souvent le cas en théorie des ensembles). Nous verrons plus loin qu'on l'utilise constamment dans l'enseignement élémentaire.

La puissance d'un ensemble E s'appelle aussi le **nombre cardinal** de cet ensemble, que l'on note par

Card (E)

Par définition,

k, m, n sont des nombres cardinaux s'il existe des ensembles E, F, G tels que

k = Card (E)

m = Card (F)

n = Card (G)

On dit que k est plus petit ou égal à m et on écrit $k \leq m$ si les ensembles E et F sont tels que E ait même puissance qu'une partie de F. Si ceci est vrai pour un choix particulier d'ensembles E et F, il en va de même pour tout autre choix E' et F' tel que

k = Card (E) = Card (E')

m = Card (F) = Card (F')

Si les ensembles E et F sont disjoints, $E \cap F = \varnothing$, on appelle somme de k et m le cardinal de l'ensemble $E \cup F$

$k + m = \text{Card}\,(E \cup F)$

Il faut remarquer une fois encore que la somme est indépendante du choix particulier des ensembles E et F.

De plus cette définition n'a de sens que si l'on établit que, étant donné deux nombres cardinaux k et m, on peut toujours trouver deux ensembles disjoints tels que

k = Card (E) et m = Card (F)
ce qui se démontre aisément.

On appelle produit de deux cardinaux k et m le cardinal de l'ensemble produit E x F.

km = Card (E x F), produit qui ne change pas si on remplace E ou F par un ensemble de même puissance.

A partir de ces définitions, on vérifie que les 2 opérations sont commutatives, associatives et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Et, si O = Card (∅) et 1 = Card ([∅]),

O + Card (E) = Card (E), 1 × Card (E) = Card (E).

Mais il serait faux de déduire que les nombres cardinaux se comportent en toute circonstance comme les nombres naturels. En particulier, si k, m et n sont trois nombres cardinaux,

de k m = n m, on **ne peut déduire,** m ≠ O,
k = n;
de même, k + m = n + m **n'implique pas** k = n
Deux contre-exemples justifient cette affirmation.

Ex. I

soit A = [a], B = [b, c]
et N = [1, 2, 3, s, ...]
Card (A) = 1 Card (B) = 2

Considérons les ensembles A × N et B × N; il est aisé d'établir qu'ils ont même puissance:

A × N		B × N
(a; 1)	———————>	(b; 1)
(a; 2)	——————————————>	(c; 1)
(a; 3)	———————>	(b; 2)
(a; 4)	——————————————>	(c; 2)
————		
(a; 2s - 1)	———————>	(b; s)
(a; 2s)	——————————————>	(C; s)
————		

Tout élément de B × N est l'image d'un et d'un seul élément de A × N.

Or

Card (A × N) = 1. Card (N) = Card (B × N) = 2. Card (N)
1. Card (N) = 2. Card (N)

On en déduirait en divisant par Card (N)
1 = 2 !!!

Ex. II

$$\begin{array}{llll} I & = [1;\ 3;\ 5;\ 7;\ \ldots & & 2s\text{-}1 \ldots] \\ P & = [2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots & & 2s \ldots\ldots] \\ N & = [1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots & & s \ldots\ldots] \end{array}$$

I, P et N ont même puissance: il suffit pour le voir de faire correspondre l'élément 2s-1 de I à l'élément 2s de P ou à l'élément s de N

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 1 \\ 3 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 2 \\ 5 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 3 \\ 7 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 4 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2s\text{-}1 & & 2s & & s \end{array}$$

I et P sont disjoints

Card (I U P) = Card (I) + Card (P)

c'est-à-dire

Card (N) + Card N = Card (N) (!!)

Le cardinal d'un ensemble peut être infini, ce qui explique que les deux règles de calcul citées plus haut ne s'appliquent pas sans autre aux cardinaux. Il faut distinguer les ensembles finis des ensembles infinis; remarquons, en passant, que l'existence des ensembles infinis est, en fait, un axiome des mathématiques. Il importe donc de caractériser sans ambiguïté un ensemble fini.

Un ensemble E est fini si le seul ensemble contenu dans E de même puissance que E est E lui-même. Autrement dit un ensemble fini E ne peut avoir même puissance que l'une de ses parties strictement contenue dans E. Si cette propriété est vraie.

Card (E) $\neq$ Card (E) + 1 et réciproquement

Un ensemble fini est donc caractérisé par l'une ou l'autre de ces propriétés qui sont équivalentes.

Si, en revanche

Card (F) = Card (F) + 1

l'ensemble F est infini. Un cardinal fini n'est autre chose qu'un nombre naturel alors qu'on appelle nombres transfinis les cardinaux infinis.

Les pages qui précèdent montrent au lecteur non averti que la théorie des ensembles n'est pas aussi intuitive que certains écrits le laissent supposer: l'enseignement même le plus élémentaire exige quelque précaution. Ajoutons qu'un mathématicien sérieux ne donnera aucune définition de la notion d'ensemble; de plus il se gardera bien de parler d'ensemble de tous les ensembles, notion qui n'a pas de sens en mathématique.

2. Mathématique moderne et psychologie génétique

Depuis trente ans de nombreuses recherches de M. Jean Piaget et de ses collaborateurs se rapportent à la genèse de notions mathématiques élémentaires. Nous nous bornons ici à mentionner les ouvrages relatifs au nombre et à la logique élémentaire.

1) Piaget et Szeminska, La Genèse du nombre, Delachaux & Niestlé, 1941
2) Gréco, Grize, Papert, Piaget, Problèmes de la construction du nombre, 1960, P. U. F.
3) Gréco, Morf, Structures numériques élémentaires, P. U. F.
4) Inhelder et Piaget, Structures logiques élémentaires, 1959, Delachaux & Niestlé.

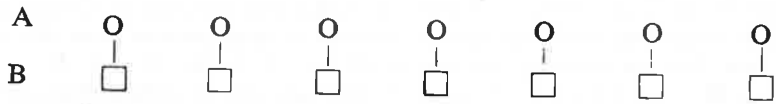
(Nous citerons ces ouvrages dans la suite, en indiquant seulement les chiffres placés en tête de ligne).

Du premier, retenons d'abord deux aspects essentiels:
la conservation du nombre et la sériation.

De tout temps, pour répondre à la question: deux ensembles A et B contiennent-ils le même nombre d'éléments? on a utilisé une application de A dans B. Si cette application est bijective, on en déduit que

Card (A) = Card (B)

Admettons que A soit un ensemble de jetons, B un ensemble de carrés



Pour le mathématicien, dès que la bijection est établie, la réponse est acquise: A et B comptent le même nombre d'éléments. Or Piaget et Szeminska ont montré que la situation n'est pas aussi simple pour l'enfant de 5 à 7 ans. La bijection subsiste-t-elle si l'on serre les jetons en ligne et qu'on dispose les carrés sur le périmètre d'un triangle ou d'un rectangle? C'est entre 6 ans et demi et 7 ans environ qu'un enfant admet que la bijection demeure, quelle que soit la disposition des éléments des deux ensembles. Le fait d'avoir constaté qu'il y a bijection dans une situation bien déterminée ne suffit pas, avant l'âge indiqué, pour assurer son existence dans tous les cas. De plus, si le mathématicien sait que l'ont peut effectuer la bijection de plusieurs manières et que cela est banal — le résultat n'est pas modifié, il n'en va pas de même pour l'enfant: l'ordre joue un rôle: il ne va pas de soi que faire correspondre au premier jeton le dernier carré ou le troisième conduit au même résultat. D'où l'importance de la relation d'ordre dans la «Genèse du Nombre», qui nous amène à insister sur l'importance du deuxième aspect de l'ouvrage. La sériation d'objets de grandeurs différentes, en allant du plus petit au plus grand, n'est réussie qu'entre 6 et 7 ans. L'ordre linéaire — autre notion banale pour l'adulte — n'est pas conservé non plus avant cet âge: si l'on enfile trois perles de couleurs différentes sur une aiguille à tricoter et qu'on fasse faire deux demi-tours à l'aiguille derrière un écran, il faut attendre le même âge pour que l'enfant soit certain que la première perle est bien demeurée la première. Il arrive que des enfants de six ans imaginent que la seconde deviendra la première. On peut aussi se demander si l'acquisition du nombre cardinal est parallèle ou non à celle de l'ordre. Les recherches prouvent que c'est le cas: il y a, de plus, d'étroites relations entre les deux notions.

A ce stade de notre analyse, nous devons attirer l'attention sur les recherches de Gréco (cf. 3) qui a montré qu'un enfant est capable de répéter constamment, dans le cas des ensembles A et B ci-dessus, qu'il y a dans toute situation 7 carrés ou 7 jetons, mais qu'il n'en pense pas moins qu'il y a plus de jetons que de carrés si l'on a espacé les premiers et serré les seconds. Ce qui signifie qu'il y a conservation du «mot» sept sans qu'il y ait conservation de la quantité.

Mentionnons également une autre recherche de Gréco qui a porté sur l'alternance des nombres pairs et impairs (cf. 2, p. 14): «Après avoir disposé en série des collections ordonnées A, B, C, D, E... de jetons de nombres 5, 6, 7, 8, 9,... et après avoir fait constater que certaines collections peuvent être décomposées en deux parties égales et d'autres non, Gréco pose cinq sortes de questions: trouver toutes les collections divisibles par 2 (en partant d'une collection paire), prévoir de proche en proche si les successeurs (n + 1 est le successeur de n, n — 1 est son prédécesseur) d'une collection paire de départ (D, par exemple) sont pairs ou impairs; même question pour les prédécesseurs; prévoir si une collection éloignée de D est paire ou impaire (sans subdiviser les intermédiaires) et enfin prévoir pour des collctions que l'on construit en partant de D sous la forme D +1, D + 2, D + 3,... D + n. Or ce n'est que vers huit ans que la compréhension de l'itération — répétition de l'addition d'une unité — permet de prévoir de façon méthodique l'alternance des pairs et des impairs, mais avec deux limitations:

a) si le sujet utilise l'itération de proche en proche, il ne sait toujours l'employer à distance; sachant que D est pair, il en conclura que E est impair ,mais ne saura se décider pour + 1;
b) procédant systématiquement par itération dans le sens ascendant, il n'atteint pas le même degré de systématisation dans le sens descendant, tout en sachant bien que le prédécesseur de n est n — 1.
   Ce n'est qu'à neuf ans que l'itération et la composition des unités sont employées systématiquement...»

Ces diverses recherches de Gréco l'ont amené à constater un fait important et assez général, que nous avons déjà mentionné sous le nom d'arithmétisation progressive de la série des nombres. Cette série, imposée sous forme verbale avant toute compréhension opératoire, n'est en effet que graduellement assimilée, et le processus même de cette assimilation peut être intéressant à analyser du point de vue de la construction du nombre. Or, cette analyse est facilitée du fait que l'enfant ne commence pas par réduire tous les nombres à une certaine structure de niveau (a), puis tous les nombres à la structure (b), et ainsi de suite. En effet, si l'on observe bien une succession de ce genre en ce qui concerne les premiers nombres (1 à 7 ou 8) de la série, il s'y ajoute le fait que la série elle-même n'est structurée que par paliers, avec décalages chronologiques entre ceux-ci. Il en résulte que vers 6-7 ans, au début des opérations concrètes et de la construction des premières structures numériques, la suite des nombres entiers présente dans les grandes lignes quatre paliers, dont le premier est déjà semi-opératoire et les suivants de moins en moins, le dernier ne constituant qu'un résidu des niveaux les plus élémentaires:

a) De 1 à 7 ou 8 la série est **quasi-structurée,** avec coordination de la succession et de l'itération,

b) De 8 à 14 ou 15, on peut parler d'une **série ordonnée de termes équidistants,** c'est-à-dire que, si la correspondance ordinale-cardinale est en générale encore reconnue, la succession et l'itération sont habituellement dissociées, l'itération n'étant plus employée pour les prévisions demandées.

c) De 15 à 30 ou 40 on n'a plus affaire qu'à une **série ordonnée.** L'itération n'est plus reconnue et l'ordre n'est habituellement retrouvé qu'en récitant la série entière, les successeurs d'un nombre étant plus facilement retrouvés que ses prédécesseurs.

d) Au-delà de 30 ou 40 **l'ordre n'est plus assuré.**

Les deux volumes des études épistémologiques cités plus haut (cf. 2 et 3) rendent compte de nombreuses autres recherches que nous ne pouvons analyser ici. Toutefois, il vaut la peine d'attirer l'attention sur les travaux de Bärbel Inhelder qui nous renseignent sur les réactions d'enfants **de moins de 7 ans** face à la relation «plus petit que» ou «plus grand que». Prenons par exemple N et M, deux collections de perles telles que

$N < M$

contenues dans deux récipients A et B. Si on enlève simultanément une perle dans A et une dans B et qu'on répète l'expérience k fois, que peut-on dire des restes N' et M'? L'inégalité $N' < M'$ n'est pas évidente pour les enfants. De plus, si on leur demande de comparer les deux collections obtenues à partir de N et M, il arrive fréquemment que celle extraite de M soit supérieure à l'autre! Ce qui signifie que la propriété des deux collections données $N < M$ se transmet aux parties sans que la correspondance bi-univoque qui a permis de construire ces parties intervienne. En d'autres termes, d'une part il n'est pas certain que

$N - k < M - k$ ou $N < M$

et d'autre part que

k perles extraites de A = k perles extraites de B [1].

Nous n'avons fait, pour l'instant, que résumer l'apport de la psychologie génétique à la genèse du nombre. Reste la logique élémentaire. C'est dans le chapitre VII de la «Genèse du Nombre» (cf. 1) que l'on découvre plus particulièrement combien la logique de l'enfant diffère de celle de l'adulte. Les auteurs présentent à l'enfant, dans une boîte, des perles en bois dont beaucoup sont blanches et quelques-unes brunes. Si l'on demande à un enfant de comparer le collier des perles en bois à celui des perles en bois blanches,

---

1 Voir le parti que nous avions tiré de cette observation de B. Inhelder dans «Exercices qualitatifs» (Gattegno, Roller, Excoffier, Laedrach; Delachaux et Niestlé, 1964, p. 17, No 16) N.d.l.r.

le second sera plus long que le premier! Il faut attendre 7 ans pour que la situation change. L'expérience a été faite par ailleurs avec des fleurs (beaucoup de rouges et quelques blanches) ou encore des fruits (beaucoup de pommes et quelques oranges): le résultat reste le même. J. Piaget et B. Inhelder ont repris longuement l'étude de ce problème dans les chapitres III et IV des «Structures logiques élémentaires» (cf. 4) et ont montré qu'il n'est résolu correctement qu'au niveau des opérations concrètes, c'est-à-dire dès 7-8 ans. Cette question a fait l'objet, sous la direction de Mme H. Sinclair, au cours de l'année 1965-66, d'un essai d'apprentissage systématique qui confirme absolument les découvertes des premières expériences d'il y a quarante ans.

Que dire maintenant de la confrontation entre l'introduction de la mathématique moderne à l'école enfantine et dans les première classes de l'école primaire et ces recherches de l'Ecole de Genève? La possibilité pour des enfants de jouer à «la théorie des ensembles» avec un matériel adéquat (les blocs logiques de Dienes, par exemple), de résoudre concrètement des problèmes d'intersection, de réunion et de complémentaire est probablement sans rapport avec le développement de la logique chez l'enfant. Pour être plus précis je dirai que jouer est une chose, mais maîtriser des relations logiques, les appliquer dans des situations différentes de celles du jeu en est une autre. Or ce n'est qu'au moment où l'enfant est capable de ce transfert d'une situation de jeu à des données nouvelles et différentes qu'on peut parler d'acquisition. La notion d'inclusion mentionnée plus haut, par exemple, est d'un ordre de difficulté comparable à celle que constitue la maîtrise des conjonctions «et», «ou», ou encore de la négation. Loin de nous l'idée de bannir ces jeux: nous les jugeons, comme mathématicien, plus intéressants que ceux qui occupent habituellement des enfants de cet âge. Mais, qu'il s'agisse là d'une préparation possible à des acquisitions ultérieures est un problème non résolu. C'est une hypothèse, purement gratuite pour l'instant, qui devrait être vérifiée scientifiquement. C'est même, à notre avis, un sujet de recherches d'une brûlante actualité qui pourrait éviter des erreurs graves dans l'élaboration des programmes modernes. Par ailleurs nous devons honnêtement mettre en garde ceux qui pensent que l'on va, à l'aide des dits jeux, avancer la maturation de telle ou telle notion. Faute de recherches suffisantes, nous ne pouvons rien affirmer pour l'instant. Enfin on doit se demander si la généralisation d'une telle évolution des programmes ne risque pas d'aggraver les retards scolaires en multipliant les apprentissages prématurés et les bloquages qu'ils entraînent. Un enfant paralysé par de telles expériences risque fort de ne jamais comprendre l'enseignement de mathématique moderne qu'il recevra plus tard.

Arrivé à ce point de notre exposé, le lecteur peut se demander s'il n'y a pas contradiction entre ce que nous venons d'écrire et la citation de Gaston Berger qui figure au début de cet article. Nous ne le pensons pas. Au contraire! Nous devons éviter de commettre, lors de l'introduction de la mathématique moderne, les mêmes erreurs que l'enseignement traditionnel: inculquer à l'enfant des connaissances formelles qu'il ne peut assimiler, ignorer les données de la psychologie. Ce serait, avec les apparences du modernisme, compromettre toute possibilité d'adaptation, détruire dès le début de la scolarité toute mobilité d'esprit, toute souplesse. Qu'on ne se méprenne pas sur le sens de nos remarques: que nous ayons été l'un des premiers, en Suisse, à introduire dans un **gymnase** un programme radicalement nouveau ne nous empêche pas de penser avec soin les difficultés d'un changement analogue dans l'enseignement primaire. Ce que nous réclamons, ce sont des expériences qui en démontrent clairement la possibilité.

Mais revenons à la genèse du nombre. Il y a accord, sur un premier point, entre la conception «ensembliste» et la psychologie génétique: il convient d'introduire le nombre à l'aide de la bijection, à condition toutefois de ne pas oublier les problèmes que posent la conservation du nombre et la relation d'ordre, comme c'est malheureusement le cas dans la majorité des essais connus.

De plus, il ne faut pas être trop pressé: l'arithmétisation progressive de la série des nombres est une réalité dont nous devons tenir compte. En second lieu, si l'on n'oublie pas ce que nous venons de dire, la présentation de l'addition à partir de la réunion de deux ensembles disjoints, celle de la multiplication à partir du produit de deux ensembles ne peuvent que donner aux élèves une plus juste idée de la nature de ces opérations. Il va de soi que le maître doit sans cesse avoir présent à l'esprit que définir une opération dans l'ensemble N des nombres naturels, c'est définir une application de $N \times N$ dans N, c'est-à-dire faire correspondre, à tout couple de nombres naturel, un nombre naturel. C'est ainsi qu'au couple (3; 4) correspond, par l'addition, le nombre 7; à ce même couple correspond, par la multiplication, le nombre 12. A condition de respecter les âges limites donnés par la psychologie génétique, celle-ci ne s'oppose pas à de tels procédés. Ajoutons encore qu'il est possible, dès 7 ans environ, d'introduire les propriétés fondamentales des opérations, propriétés qui doivent être préparées par des manipulations convenables.

Nous réservons à un prochain article l'analyse des questions de programmes, de méthodes et de formation des maîtres. Nous souhaitons qu'entre temps un dialogue s'engage avec les lecteurs, car nous serions heureux de connaître leurs réflexions, leurs expériences aussi. Un inventaire des essais tentés, en particulier en Suisse romande, permettrait une meilleure coordination des efforts et peut-être la mise sur pied de véritables recherches.

Laurent Pauli

CORRIGENDA

Le professeur André Revuz nous prie de corriger deux erreurs qui se sont glissées dans son texte publié dans le numéro 30 de Math-Ecole (novembre 1967).

- **Page 3, dernière ligne, lire «... qui se présentent les premières à l'esprit.»**
- **Page 6, 5e ligne, ajouter, après la parenthèse: «...), les autres topologiques (essentiellement le concept de distance et les propriétés simples des espaces métriques, au niveau secondaire),...».**

Pour prendre date

COURS DE L'ETE 1968

1. **Le cours de la Société suisse de travail et de réformes colaire aura lieu à Genève.**

   Il durera **deux** semaines du lundi 15 au samedi 27 juillet. Il comprendra deux parties, l'une théorique, l'autre pratique. La partie théorique aura la forme d'un séminaire au cours duquel seront abordés les aspects mathématiques et psychologiques de l'enseignement nouveau du calcul. Ces séminaires seront vraisemblablement dirigés par M. Laurent Pauli pour la mathématique et Mme Marianne Denis pour la psychologie. La partie pratique aura la forme d'ateliers et sera dirigée par Mme Yvonne Savioz pour le degré enfantin, M. Gaston Guélat pour les degrés primaires 1, 2 et 3, et par M. Roger Dyens pour les degrés 4, 5 et 6.
   Le programme définitif de ce cours paraîtra dans Math-Ecole de mars 1968.

2. **Le cours cantonal valaisan**
   aura lieu à Sion du 19 au 24 août. On obtiendra des renseignements détaillé en s'adressant au Département de l'instruction publique à Sion.

PUBLICATIONS RECENTES

«Les mathématiques modernes à l'école primaire»

Il s'agit là d'un ouvrage à paraître en plusieurs volumes. Le premier, le No 1, est paru en mars 1967; il est destiné au cours préparatoire français (élèves de 6-7 ans). Le second, qui concerne le cours élémentaire 1re année (7-8 ans) est paru en octobre 1967. Les autres manuels, destinés aux autres degrés paraîtront ultérieurement. Les auteurs sont L. Vandendriessche, inspecteur de l'enseignement primaire, sa femme, conseillère pédagogique, J. Hochart, conseiller pédagogique et G. Dégardin et J. Jumel, instituteurs. L'éditeur est Delachaux & Niestlé à Neuchâtel et Paris. La diffusion, en Belgique, est assurée par les Etablissements Calozet. Ces ouvrages sont le fruit d'une longue expérimentation conduite dans les écoles de Boulogne-sur-Mer. Ils mettent l'accent sur la mathématique nouvelle, s'inspirent de la psychologie de Piaget et font un large usage des réglettes Cuisenaire. Ils sont enfin conçus de manière à pouvoir être utilisés dans le cadre de l'emploi du temps, assez strict, des écoles françaises. En bref, ils offrent à l'enseignant un chemin bien balisé qui devrait lui permettre d'avancer avec sécurité. Les auteurs n'ont produit aucun fait expérimental attestant l'efficacité de leurs publications. Le fait que celles-ci soient le fruit de plusieurs années de travail effectué dans des classes bien réelles et avec des enfants non moins réels est néanmoins un indice d'une valeur hautement probable. Il serait intéressant que des maîtres de chez nous fassent usage de ces publications et nous infoment de leurs observations.

TABLEAUX A DOUBLE ENTREE

Soit le nombre 12 décomposé ainsi: $12 = 2+3+4+3$.

Si on dispose les éléments dans un tableau comme celui-ci.

2	3	5
4	3	7
6	**6**	**12**

on a un **tableau à double entrée** qui peut donner lieu à de nombreux problèmes. Ici, par exemple, on peut imaginer qu'on se trouve en présence de 12 enfants dont 5 garçons et 7 filles; de plus, 6 enfants sont habillés en rouge et les autres en bleu. Combien de garçons en rouge? Combien de filles en bleu?

	r	b	
G	2	3	5
F	4	3	7
	6	6	12

La lecture du tableau donne les réponses: 2 garçons en rouge, 3 filles en bleu.

Dès lors les problèmes dans le genre de celui-ci peuvent être posés:

Sur une table, il y a 12 gobelets; 4 sont jaunes, les autres sont verts; dans 5 gobelets il y a du lait, dans les autres, il y a du jus de tomates; trois gobelets verts ont du lait; dans combien de gobelets jaunes y a-t-il du jus de tomates?

Posons les données.

	lait	jus	
j			4
v	3		
	5		12

Comblons les lacunes.

	lait	jus	**8**
j	**2**	**2**	4
v	3	**5**	**8**
	5	**7**	12

Réponse: il y a du jus de tomates dans 2 gobelets jaunes.

Les enfants seront invités à imaginer d'autres problèmes.

S. R.

Complète le tableau

x + y — 1	4	7		9			9				
x	3	5	10	7					7		6
x × y + 5	11		15			14				33	
y	2	3	1		4				4	4	
x — y + 1	2		10		2		7	8			
x × y — 2	4	13		19		7		28			10

Essaie de trouver les 3 règles et de compléter le jeu

r	8	12	6	10		15					16
	32	36			16				40	48	
	4	9			6		10	10	18		12
	2	4				5		6		3	
s	4	3	2	5			2				

Extrait de «Instantanés mathématiques», No 3, octobre 1967 (Québec).

Abonnement:
Suisse F 5.—, Etranger F 6.—, CCP 12 - 16713. Paraît 5 fois par an. Service de la recherche pédagogique, 65, rue de Lausanne, 1200 Genève (022 31 71 57).