MATH ECOLE

JANVIER 1970
9e ANNÉE

41

Au seuil d'une neuvième année...

Avril 1962, Math-Ecole, qui s'appelait alors « Les nombres en couleurs », faisait ses premiers pas, des pas d'enfant un peu chancelants. Depuis ce jour, le petit bonhomme a forci et sa démarche s'est affermie, L'utilité de Math-Ecole est très généralement reconnue et ses qualités sont appréciées. Il vaut donc la peine de continuer l'ouvrage entrepris.

Le comité de rédaction a fait des projets. Sur le plan « moral », il entend donner aux numéros de l'année 1970 un contenu qui enrichisse les lecteurs au double point de vue de la mathématique nouvelle et de son enseignement en relatant notamment des expériences vécues à même les classes.

Le numéro 41, signé par Zoltan P. Dienes de Sherbrooke et Maurice Glaymann de Lyon, apporte le souffle du large en montrant, une fois de plus, et la nécessité d'enseigner la nouvelle mathématique et la possibilité de le faire en accord avec le développement de toute la personnalité enfantine.

Le numéro 42 (mars) traitera de la problématique du recyclage des maîtres: pourquoi? quand? comment? Il s'agit de la formation permanente des enseignants. Ce thème sera d'ailleurs développé au prochain congrès de la Société pédagogique romande (juin 1970).

Le numéro 43 (mai) apportera une contribution pratique à l'effort entrepris par le Département de l'instruction publique du canton de Vaud qui met sur pied des cours destinés au recyclage des enseignants pour les classes enfantines et primaires.

Le numéro 44 (septembre) sera consacré à la topologie et à la géométrie.

Le numéro 45 enfin (novembre) traitera de questions psycho-pédagogiques et des « problèmes » à envisager comme « mathématisations de situations ».

Sur le plan de l'intendance, le comité de rédaction a pu constater que si la situation financière de Math-Ecole était saine, elle n'était pas telle cependant qu'elle autorise un grand bon en avant. Un effort sera tenté pour augmenter sensiblement le nombre des abonnés. Puisse chaque lecteur de ces lignes se sentir concerné et apporter son aide.

Math-Ecole enfin renouvelle un vœu maintes fois formulé : que ses lecteurs veuillent bien faire part de leurs remarques, de leurs critiques et de leurs désirs. C'est un des meilleurs moyens dont dispose cet organe pour conserver et accroître son pouvoir.

S. Roller

Un programme de mathématique pour le niveau élémentaire

(Ire partie *)

par

Zoltan P. Dienes, Claude Gaulin **, et Dieter Lunkenbein

Centre de Recherches en Psycho-mathématique, Université de Sherbrooke

Introduction

Tenter de construire un programme de mathématique qui soit à la fois cohérent, conforme aux besoins actuels, réaliste et applicable au niveau élémentaire [1], constitue une entreprise difficile et exigeante. Pour y arriver, il faut en effet tenir compte de l'état actuel de la **mathématique** et des plus récents développements de la **psychogénèse.**

Il est regrettable de constater la déficience des programmes traditionnels, à l'un ou l'autre de ces points de vue. A quoi cela est-il dû ? Sans doute à l'ignorance de beaucoup de mathématiciens sur les problèmes psychologiques que pose l'apprentissage de la mathématique. Sans doute aussi à une connaissance trop superficielle de cette discipline par de nombreux

---

* Paru dans le Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, numéro de l'automne 1969.

** Professeur au département de mathématique, Université de Québec.

1 Dans cet article, le **niveau élémentaire** correspond à des classes d'enfants de 5 à 11 ans en moyenne. Il comprend donc en particulier le niveau de la maternelle tel qu'on l'entend au Québec.

psychologues. Sûrement encore à un manque de familiarité, chez ceux qui ont conçu ces programmes, avec certains problèmes pratiques que pose l'enseignement dans une classe d'enfants.

Naturellement, la fabrication d'un programme n'admet pas de solution unique. Celui que nous allons esquisser ici constitue une façon, parmi d'autres, d'atteindre ces objectifs. Nous souhaitons donc que nos collègues œuvrant en didactique de la mathématique ou en psycho-mathématique élaborent des solutions de rechange. Nos efforts conjugués devraient à long terme assurer un progrès décisif sur les programmes et les méthodologies du passé.

Le programme esquissé ici est le fruit d'une dizaine d'années d'expériences menées dans plusieurs parties du monde par le Dr Zoltan Paul Dienes, avec l'aide de collaborateurs travaillant sous l'égide du Groupe International d'Etudes pour l'Apprentissage des Mathématiques (I.S.G.M.L.)[2]. Son implantation a été faite dans plusieurs classes de Sherbrooke, où se poursuit l'expérimentation.

Une caractéristique de ce programme est qu'il doit **être continuellement en évolution,** afin de s'ajuster en fonction des plus récents résultats de la recherche tant mathématique que psychologique. Il faut donc s'attendre à le voir subir, dans les prochaines décades, des modifications importantes.

Un fait mérite d'être souligné tout particulièrement. **Ce programme est indissociable de certains principes psychologiques et pédagogiques.** Son application doit s'accompagner d'un changement d'attitude vis-à-vis de l'enseignement, de l'apprentissage, du rôle des programmes, des manuels et des examens.

Dans cette première partie de l'article, nous proposons de décrire les principes dont s'inspire notre programme, au point de vue **mathématique, psychologique** et **pédagogique,** pour esquisser ensuite son contenu mathématique. Plus tard, dans une seconde partie, à propos de quelques thèmes choisis du programme.

La conception de la mathématique sous-jacente au programme

La mathématique a connu durant les dernières décades un essor prodigieux. A la suite des travaux de Bourbaki en particulier, une nouvelle conception de la mathématique s'est imposée graduellement. S'appuyant sur la théorie des ensembles, cette discipline a conquis, grâce au rôle central qu'y jouent maintenant les **structures mathématiqes,** une **unité** [3]

[2] Le Groupe International d'Etudes pour l'Apprentissage des Mathématiques (International Study Group for Mathematics Learning) regroupe des organismes de plusieurs coins du monde. Son bulletin **«Journal of Structural Learning»** (autrefois **«Bulletin of ISGML»** est publié chez Gordon & Breach, Londres-New York.

[3] Les recherches récentes en mathématique font ressortir la difficulté qui se présente à conserver cette unité à mesure que la science progresse. Déjà, par exemple, depuis la naissance de la théorie des catégories, il faut renoncer à fonder la mathématique exclusivement sur la théorie des ensembles.

jusqu'ici insoupçonnée. Du même coup, elle a acquis, dans sa présentation, une **économie** et une **clarté** appréciables. Ses relations avec d'autres disciplines et ses applications se sont trouvées également beaucoup plus nettement mises en évidence.

Devant ce foisonnement de la mathématique et devant les nouvelles exigences de la société actuelle, un besoin s'est fait sentir de transformer en profondeur des programmes de mathématiques plus que centenaires, inadaptés aux besoins nouveaux et ne correspondant pas à l'état actuel des connaissances. On a donc vu s'amorcer graduellement un peu partout dans le monde une réforme des programmes de mathématique au cours secondaire. Parallèlement à ce mouvement de modernisation, la nécessité est apparue de plus en plus urgente de procéder également à un examen sérieux des programmes courants de mathématiques à l'Elémentaire, afin de les rendre conformes à l'acquis actuel sur les plans mathématique et psychologique.

Le programme que nous proposons ici veut donc, entre autres, refléter la conception et l'état actuels de la mathématique. C'est pourquoi il met d'abord l'accent sur les **structures** mathématiques et logiques ainsi que sur les notions unificatrices de **relations,** de **fonctions** (opérateurs) et de **morphismes.** Par le contenu et la généralité qu'il vise, il déborde donc largement les cadres des programmes traditionnels, qui se limitaient en général aux rudiments du calcul et aux mesures conventionnelles. Le souci de faire acquérir à l'enfant des algorithmes pratiques et de l'entraîner à les appliquer ne s'en trouve cependant pas diminué pour autant. Nous croyons, bien au contraire, que notre programme, par sa structure et par la méthodologie qui l'accompagne, permet d'assurer une **compréhension** plus profonde et une plus grande **applicabilité** de ces algorithmes, si on le compare à un enseignement traditionnel basé sur le dressage et la mémorisation.

Il faut avouer que plusieurs mathématiciens expriment encore des réticences à propos de l'apprentissage de structures mathématiques au niveau élémentaire ou même secondaire. Par contre, la nécessité de mettre l'accent sur les structures plutôt que de conditionner les enfants à certains comportements en réponse à certains stimuli, a été soulignée avec force lors de récentes rencontres internationales et nationales, où se trouvaient réunis des éducateurs, des mathématiciens et des psychologues [4]. Ce programme repose donc sur l'hypothèse que l'apprentissage des structures mathématiques est souhaitable dans l'enseignement.

Mais jusqu'à quel point est-il **réaliste** de suggérer un tel apprentissage pour le cours élémentaire? Les structures ne sont-elles pas abstraites au point de les rendre inaccessibles à des enfants de ce niveau? Est-ce possible selon les données actuelles de la psychogénèse?

---

4 Cf. **«Mathematics in Primary Education»,** International Studies in Education, UNESCO Institute for Education, Hambourug, 1966; **«Mathématique nouvelle»,** O.E.C.E., 1961; **«Goals for Schools Mathematics»** (Report of the Cambridge Conference on School Mathematics), Houghton Mifflin, Boston, 1963.

A ce sujet, il faut dire d'abord que des recherches et des expériences en cours dans plusieurs pays du monde confirment en effet qu'il est **possible** de faire apprendre des structures mathématiques à de jeunes enfants. Plus de la moitié des sujets qui apparaissent dans le programme, en particulier, ont été enseignés effectivement dans des milieux aussi divers que la Nouvelle-Guinée, l'Australie, l'Angleterre, le Canada français, etc.

Il faut ensuite ajouter, en insistant sur ce point, qu'il n'est aucunement question, à l'Elémentaire, de faire apprendre des structures mathématiques à un niveau formel ou même à un niveau naïf familier au mathématicien. Il s'agit, au contraire, de mettre les enfants en présence de **concrétisations multiples** [5] des structures les plus fondamentales, en les présentant sous des déguisements variés: situations familières, jeux, contes mathématiques, manipulations de matériels concrets, graphes, etc. Les élèves seront alors amenés à explorer et à «manipuler» ces concrétisations, puis à tenter de construire des isomorphismes entre elles. Graduellement, ils procéderont ainsi à l'abstraction des concepts et des structures mathématiques les plus importants, dont ils pourront ensuite aborder l'étude formelle avec profit au cours secondaire.

A titre d'illustrations, prenons un exemple. Comment seront traités les ensembles à l'Elémentaire? [6] Au travers de multiples activités, les enfants se trouveront en présence de collections concrètes d'objets (blocs, billes, cartes, etc.) ou de leurs représentations graphiques. C'est d'abord sur ces objets ou représentations qu'ils **accompliront** les opérations ensemblistes de réunion, d'intersection, de complémentation, etc. Ainsi, grâce à une interaction avec la réalité matérielle, les enfants **abstrairont** progressivement les concepts d'ensemble, d'appartenance, d'intersection, etc. Ce n'est que lorsque ce processus sera assez avancé que se fera l'introduction du symbolisme et du langage parlé ou écrit correspondant à ces concepts. Bref, l'étude des ensembles, du moins avec les petits, se déroule à un niveau concret (matériel) et fait appel à des collections **particulières** d'objets. On passe naturellement par la suite à une étude «naïve» des ensembles, dans laquelle il est plutôt question de collections **quelconques** d'objets, tout en se référant fréquemment, de façon à soutenir l'intuition, à des ensembles particuliers d'éléments. C'est en général à ce niveau que se situe l'apprentissage des ensembles dans les programmes modernisés du cours secondaire. Beaucoup plu tard encore, une étude axiomatique des ensembles deviendra possible, où il s'agira **d'objets indéfinis** satisfaisant à certains axiomes.

---

5 Dans cet article, il faut bien distinguer «concrétisations» et «concret» de «matérialisation» et «matériel». Comme on le verra plus loin, «concret» et «abstrait» ne se disent que par rapport à des processus d'abstraction; ce qui est abstrait par rapport à l'un peut être concret par rapport à un autre.

6 Cf. Claude Gaulin, **«Remarques méthodologiques sur l'enseignement des notions ensemblistes à l'Elémentaire»**, article paru dans **«Quelques aspects du renouveau de l'enseignement des mathématiques à l'Elémentaire»**, Les Editions de Sainte-Marie, Montréal, 1966.

Prenons un exemple plus complexe. Dans le programme que nous proposons, le concept de groupe joue un rôle assez important. On sait que les groupes font rarement l'objet d'études avant le niveau universitaire, sauf dans certains programmes nouveaux de niveau secondaire. En quel sens peut-il donc être question de groupes [7] à l'Elémentaire? Comment abordera-t-on par exemple avec les enfants le célèbre « groupe de Klein » si on le désire [7]? Evidemment, on ne partira pas de sa définition formelle. D'ailleurs, il n'est point nécessaire de **parler** de « groupe » ou de « groupe de Klein » aux enfants! Plutôt, on leur proposera une variété d'activités incarnant cette structure que le mathématicien appelle le « groupe de Klein ». Zoltan P. Dienes a imaginé de nombreux jeux à cette fin, lesquels font intervenir selon le cas des enfants, des blocs, des mots, des miroirs, des formes géométriques, des treillis, des nombres, etc. Après avoir exploré et « manipulé» les règles de ces jeux, les enfants en viennent à découvrir des ressemblances entre ceux-là. Ils peuvent alors tenter de construire des dictionnaires (isophormismes) qui mettent en correspondance les éléments et les propriétés analogues dans les divers jeux. Ainsi peut se faire, progressivement, l'**abstraction** d'une nouvelle structure, celle de groupe de Klein. Cette abstraction pourra à son tour, ultérieurement, servir de point de départ pour un nouveau processus d'abstraction ou de généralisation.

Notre programme, en résumé, préconise l'apprentissage, à un niveau adapté à l'enfant, de structures mathématiques importantes. L'objectif visé à l'Elémentaire est de faire acquérir à chaque élève un **bagage d'expériences concrètes variées** à propos de ces structures et de l'amener à compléter le cycle d'abstraction et une certaine généralité de certains concepts fondamentaux. Cet acquis constituera par la suite pour l'enfant un support intuitif qui facilitera l'apprentissage efficace d'une mathématique de plus en plus formelle.

Le contenu mathématique du programme

On présentait naguère les mathématiques comme une juxtaposition de plusieurs sujets: arithmétique, géométrie, algèbre élémentaire, géométrie analytique, analyse, etc. Mais par suite de la restructuration dont elles ont été l'objet depuis le début du siècle, les mathématiques ont conquis (pour combien de temps [8]) une UNITÉ longtemps convoitée, que reflète l'appellation « la mathématique ».

---

[7] Naturellement il s'agit ici de groupes au sens mathématique, donc d'ensembles munis d'une loi de composition interne associative, pour laquelle il existe un élément neutre et chaque élément admet un symétrique.

Le groupe de Klein est le groupe à quatre éléments **a, b, c,** et **e** (le neutre) tels que, si l'opération du groupe est notée multiplicativement, **aa,** $=$ **bb** $=$ **cc** $=$ **e, ab** $=$ **ba** $=$ **c, ac** $=$ **ca** $=$ **b** et **bc** $=$ **cb** $=$ **a.**

[8] Voir la note 3, page 3.

Malgré cette unité profonde, il demeure commode de pouvoir se référer — dans une vue intégrée — à telle ou telle partie de la mathématique, comme l'arithmétique ou la géométrie. Cela offre l'avantage appréciable, en particulier, de mieux évoquer des aspects de la réalité matérielle qui ont été pour chaque homme à l'origine de certaines abstractions mathématiques et qui nous servent de support intuitif pour nous exprimer à propos de celles-là.

C'est dans cette optique que nous présentons ici le contenu mathématique du programme en cinq **cheminements parallèles et progressifs.** Malgré ce morcellement un peu arbitraire, le programme doit être envisagé dans son intégrité. D'ailleurs, comme on l'observera, les divers cheminements sont intimement reliés, grâce à la présence dans chacun d'eux des concepts et et des structures unificatrices qui constituent le cheminement I: relations, opérateurs, groupes, etc. Nous n'avons pas voulu suggérer ici le contenu éventuel du cheminement V, puisque les recherches sur l'apprentissage de notions probabilistes et statistiques à l'Elémentaire ne sont pas encore suffisamment avancés. Précisons tout de même que ce cheminement devrait être conçu et détaillé dans le même esprit que les autres.

On trouvera dans les pages suivantes un tableau un peu plus détaillé du contenu des quatre premiers cheminements. Malheureusement il nous faut renoncer, dans un article comme celui-ci, à décrire davantage ce contenu: cela pourrait nécessiter plusieurs livres! Nous suggérons aux lecteurs intéressés de compléter au moyen de lectures [9] cette trop sommaire description.

En pratique, dans nos classes expérimentales, on fournit aux maîtres un tableau semblable à celui qui suit, subdivisé également en cheminements parallèles et intimement reliés. La matière est répartie en tranches correspondant au contenu étudié dans une année scolaire normale par les élèves moyens. Un code de couleurs, permet, à l'intérieur de chaque tranche, d'indiquer le degré de priorité des thèmes et des activités mentionnés. Chaque maître peut ainsi adapter ce programme-cadre au rythme individuel des enfants, dont il suit l'évolution à l'aide de fiches personnelles. Des ateliers permettront d'ailleurs aux maîtres de mettre au point une variété d'activités, de jeux et de fiches de travail sur les sujets au programme.

Des expériences nombreuses ont déjà été faites, dans des milieux variés, sur la première partie de chacun des cheminements I à IV. Le reste continue à faire l'objet d'expérimentation dans plusieurs centres affiliés au Groupe International d'Etudes pour l'Apprentissage des Mathématiques [10].

---

[9] Voir en particulier les nombreuses publications citées dans les notes 11, 13, 14, 15 et 17.

[10] Par exemple à Sherbrooke, au Centre de Recherches en Psycho-mathématique dirigé par Z. P. Dienes; à Budapest, chez le professeur Varga; en Allemagne, à la Paedagogische Hochschule Heidelberg; etc.

CHEMINEMENT I (« cheminement algébrique ») [11]

Notions ensemblistes (ensemble d'éléments, appartenance, complément, intersection, réunion, ensembles d'ensembles, inclusion, etc.) Représentations à l'aide de diagrammes de Venn ou de Carroll.

Graphes de relations d'équivalence, de différence, d'ordre... Propriétés de relations binaires : réflexivité, transitivité, symétrie, etc.

Opérateurs [12], comme cas particuliers de relations. Relations entre opérateurs et entre chaînes d'opérateurs. Opérations binaires ; commutativité, associativité, distributivité...

Concrétisations variées de structures mathématiques fondamenales : groupes, algèbres booléennes, anneaux, espaces vectoriels (sinon modules sur un anneau), etc. Concrétisations d'isomorphismes et d'automorphismes de structures.

Introduction à l'axiomatique.

CHEMINEMENT II (« cheminement arithmétique ») [13]

L'apprentissage du nombre naturel à partir des notions ensemblistes. Relations et opérateurs numériques. Relations entre opérateurs et entre chaînes d'opérateurs numériques.

Bases de numération. — Les quatre opérations arithmétiques. Commutativité, associativité, distributivité. — Généralisation aux nombres rationnels positifs.

Puissances, logarithmes, racines.

Introduction des nombres négatifs (à partir des opérateurs additifs ou comme cas particuliers de vecteurs). — La droite numérique, le plan et l'espace cartésien.

Généralisation aux polynômes. Formes propositionnelles et ensembles solutions.

Concrétisations dans le domaine numérique des structures de groupe, d'anneau, de corps... ; classes résiduelles (modulo n).

---

11 « Algébrique » fait référence ici à **l'algèbre moderne** (ou **abstraite**) et non à l'algèbre élémentaire traditionnelle, qui avait pour objet le calcul sur des lettres représentant des nombres. En algèbre moderne, les symboles utilisés représentent en général des éléments d'ensembles abstraits.

12 « Opérateur » se dit ici dans le sens d'application ou de fonction.

13 Cf. Z. P. Dienes, **« Les premiers pas en mathématique »**, volume 2, O.C.D.L., Paris, 1966 ; Z. P. Dienes, **« Les états et les opérateurs »**, Univ. de Sherbrooke, Sherbrooke, 1968 ; Z. P. Dienes, **« Les relations »**, Univ. de Sherbrooke, Sherbrooke, 1968 ; Z. P. Dienes, **« Algèbre »** (2e et 3e parties), O.C.D.L., Paris, 1967 ; Z. P. Dienes, **« Les Aventures de Gilles et Valérie »**, O.C.D.L., Paris, 1969 ; Z. P. Dienes, **« Fractions »**, O.C.D.L., Paris, 1967 ; Z. P. Dienes, **« L'Algèbre du nombre naturel »**, O.C.D.L., Paris, 1968 ; Z.P. Dienes, **« Comprendre la mathématique »**, O.C.D.L., Paris, 1965 ; Z. P. Dienes, **« La Construction des mathématiques »**, P.U.F., Paris, 1966 ; Z. P. Dienes, **« The Study of powers, roots and logarithms »**, Hutchinson, London, 1968 ; Z. P. Dienes, **« Mathematics in primary school »**, Macmillan, Melbourne, 1964 ; etc.

CHEMINEMENT III (« cheminement logique ») [14]

Propriétés (attributs) d'objets ou d'ensembles d'objets. Opérations sur des propriétés: négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence. Représentation des plus grands ensembles associés à des propriétés, à l'aide de diagrammes de Venn ou de Caroll, de réseaux logiques, d'arbres ou de cartes perforées. Initiation à la combinatoire.

Propriétés composées (« chaînes écrites correctement »). Relations entre propriétés composées. — Règles d'indifférence; méthodes de raisonnement.

Tables de vérité. Quantificateurs existentiel et universel.

CHEMINEMENT IV (« cheminement géométrique ») [15]

Figures géométriques planes et dans l'espace. Relations entre figures géométriques: notions topologiques (frontières, régions, connexité, etc.), projectives (droites, intersection, convexité, etc.), affines (parallélisme, similitude, etc.), euclidiennes (distances, angles, etc.)

Mesures arbitraires et conventionnelles.

Opérateurs sur des figures géométriques (transformations): symétries, translations, rotations, homothéties,... et leurs invariants. Relations entre opérateurs et entre chaînes d'opérateurs géométriques. Symétries et rotations de polyèdres et de polygones réguliers.

Concrétisations de nature géométrique de groupes mathématiques et d'isomorphismes de groupes. Graphes de groupes. Relations définissantes dans un groupe. — Introduction à l'axiomatique.

Transformations géométriques dans le plan à l'aide de coordonnées. — Concrétisations de modules (sur l'anneau des entiers) et d'espaces vectoriels.

CHEMINEMENT V (« cheminement probabiliste et statistique ») [16]

(Contenu encore à l'étude).

---

14 Cf. Z. P. Dienes et E. W. Golding, **« Les premiers pas en mathématique »**, volume 1, O.C.D.L., Paris, 1966; Z. P. Dienes, **« La logique à l'élémentaire »**, O.C.D.L., 1969; M. Glaymann et J. Colomb, **« Logique, ensembles et cartes perforées »**, O.C.D.L., Paris, 1969; etc.

15 Cf. Z. P. Dienes et E. W. Golding, **« Les premiers pas en mathématique »**, volume 3, O.C.D.L., Paris, 1966; Z. P. Dienes et E. W. Golding, **« La géométrie par les transformations »**, volumes 1, 2, 3, O.C.D.L., Paris, 1967; Z. P. Dienes, **« L'Axiomatique »**, Univ. de Sherbrooke, Sherbrooke, 1967; Z. P. Dienes, **« Algèbre linéaire »**, O.C.D.L., Paris (sous presse); etc.

16 Cf. Tamas Varga, **« Combinatorials and probability for young children »**, Journal of Structural Learning, 1968-69; School Mathematics Study Group, **« Probability. Primary grades »**, Vroman, Pasadena, 1966; E. Fischbein, I. Pampu et I. Mînzar, **« Initiation aux probabilités à l'école élémentaire »**, Educational Studies in Mathematics, volume 2, numéro 1, juillet 1969.

Quelques principes psychologiques sous-jacents au programme

Pour être conforme aux besoins actuels et de demain, un programme doit refléter non seulement la conception d'aujourd'hui de la mathématique, mais également les données les plus récentes de la psychogénèse. Celui proposé ici s'appuie donc sur plusieurs hypothèses psychologiques, dont la validité n'est d'ailleurs pas encore scientifiquement établie.

Nous prenons pour acquis, à la suite des travaux classiques de Piaget, l'existence de stades dans le développement de la pensée. L'enfant de l'Elémentaire se trouve au **stade opératoire concret** (ou **intuitif**). Dans le développement de ses connaissances, nous insistons donc sur un apprentissage de la mathématique faisant appel à des **activités concrètes variées,** sur une pédagogie centrée sur l'enfant et sur une méthodologie adaptée.

Mais puisque les objets dont traite la mathématique sont **abstraits,** leur apprentissage pose plusieurs problèmes psychologiques d'envergure, en particulier sur la formation des concepts mathématiques et sur leur transfert. Par exemple, quelle est la nature du processus selon lequel on **abstrait** un concept ou une structure mathématique? Quels facteurs influencent ce processus? En quoi consiste, en mathématique, la **généralisation** d'un concept? Quelles relations existent entre les processus d'abstraction et de généralisation? Quelle est la génèse du processus de **représentation** ou de **symbolisation** d'un concept mathématique?

Malheureusement, les théoriciens de l'apprentissage se sont surtout préoccupés jusqu'ici de types d'apprentissage relativement élémentaires; l'étude de processus cognitifs plus complexes, comme ceux qui interviennent dans l'apprentissage de la mathématique, en est encore à ses débuts. Aussi les principe psychologiques sur lesquels notre programme s'appuie ont-ils fait jusqu'à maintenant l'objet de recherches encore insuffisantes. Nous nous contenterons ici de présenter ces hypothèses de façon sommaire et, pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur à la littérature sur le sujet[17].

---

[17] Cf. Z. P. Dienes, **«An Experimental Study of Mathematics Learning»**, Hutchinson, London, 1968; Z. P. Dienes et M. A. Jeeves, **«Pensée et structure»**, O.C.D.L., Paris, 1967; Z. P. Dienes et M. A. Jeeves, **«The effect of structural relations on transfer»**, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 1968; Z. P. Dienes et E. W. Golding, **«Approach to modern mathematics»**, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 1967; Z. .P Dienes, **«Concept formation and personnality»**, Leicester Univ. Presse, Leicester, 1965; W. E. Lamon, **«Structural learning characteristics...»** (thèse de doctorat), Univ. of California, Berkeley, 1968; Z. P. Dienes, **«On abstraction and generalization»**, Harward Educ. Review, Summer 1961; Z. P. Dienes, **«Some basic processes involved in mathematics learning»**, article paru dans «Research in Mathematics Education», National Council of Teachers of Mathematics, Washington, 1967; Z. P. Dienes, **«The formation of mathematical concepts in children through experience»**, Educational Reseach, 1959; Z. P. Dienes, **«Sulla percezzione astratta»**, Rivista di Filosofia, 1957; etc.

1. L'abstraction d'un concept. Le principe des concrétisations multiples

Pour apprendre la mathématique abstraite, un enfant doit parcourir une quantité de processus d'abstraction, qui sont reliés de façon complexe. On peut tenter de décrire ainsi le processus d'abstraction d'un concept: à partir d'un certain nombre de situations, on **construit mentalement** une **propriété commune** à ces situations, puis, en compréhension, **la classe correspondant à cette propriété.** Dans ce sens-là, le processus d'abstraction conduit d'éléments à une classe d'éléments.

A titre d'illustration, prenons quelques exemples. A partir de plusieurs objets ou figures triangulaires qu'il a manipulés ou rencontrés dans son expérience, un jeune enfant en arrive à leur attribuer une propriété commune («être triangulaire») et à former, en compréhension, la classe des objets triangulaires (dans un univers donné). Il arrive ainsi à effectuer l'abstraction du concept de **triangle.** De même pour ceux de **cercle, de quadrilatère, de pentagone, etc.** A leur tour, ces concepts permettent de procéder à l'abstraction de celui de **forme,** puis de **figure géométrique,...** Il s'agit là d'ailleurs du même processus qui, sur le plan linguistique, conduit aux concepts auxquels la majorité des mots ou expressions font référence: **rouge, table, couleur,** etc.

Voici un exemple plus complexe. On propose à des enfants trois jeux faisant intervenir respectivement des animaux, des blocs et des mots, par exemple, mais incarnant tous une même structure mathématique. Après en avoir assimilé graduellement les règles et la structure, les enfants arrivent à décrire ces trois jeux à l'aide de tables traduisant les résultats de certaines opérations binaires:

⊗	a	b
a	a	b
b	b	a

■	0	1
0	0	1
1	1	0

(a)

*	Δ	○
Δ	Δ	○
○	○	Δ

Après un certain nombre de jeux semblables, variable selon les enfants, ceux-ci prennent conscience de la «ressemblance» des tables, de l'analogie entre les éléments et les règles de ces jeux. Ils se rendent compte que malgré des présentations différentes, il s'agit toujours au fond du «même» jeu. Ainsi naît dans l'esprit de l'enfant une nouvelle abstraction, celle de **groupe d'ordre 2,** propriété commune aux situations qu'ils ont décrites.

Les éléments de la classe formée en compréhension lors d'un processus d'abstraction sont appelés des **concrétisations** du concept ou de la structure à abstraire. Dans le premier exemple, les concrétisations du concept de triangle sont des objets triangulaires; dans le second, les tables ou jeux qui y ont conduit sont des concrétisations du groupe d'ordre 2.

(a) Opération + pour les classes de restes modulo 2.

Ce qui précède fait ressortir l'importance du **principe des concrétisations multiples,** qui, dans l'abstraction d'un concept, souligne la nécessité de partir de concrétisations « nombreuses » et « variées ». Des recherches effectuées à Adélaïde, en Australie, tendent à confirmer la validité de cette hypothèse. Il reste cependant beaucoup de questions à élucider à son sujet. On peut par exemple chercher à préciser ce qu'on entend par concrétisations « nombreuses ». Si cela varie selon les individus, comme on le pense a priori, y a-t-il un nombre de concrétisations **optimum** pour l'abstraction d'un concept donné ? Ce nombre diffère-t-il beaucoup selon les concepts considérés ?

Lorsque, dans un processus d'abstraction, on construit mentalement une propriété commune à plusieurs concrétisations de départ, il faut nécessairement arriver simultanément à négliger, voire à ignorer le « bruit », c'est-à-dire l'ensemble des propriétés qui les différencient et l'information parasite superflue. Ces deux opérations sont complémentaires et indissociables. L'influence du bruit dans l'abstraction constitue un problème d'envergure encore peu exploré. Est-il possible de mesurer ce bruit ? [18] Y a-t-il un bruit **optimum** ? L'étude de ces questions revient à préciser ce qu'on entend par « concrétisations variées ».

2. Phases dans l'abstraction d'un concept

La théorie de Piaget sur le développement mental de l'enfant a suggéré à Dienes une théorie analogue à propos de l'enchaînement de processus d'abstraction consécutifs. Rappelons brièvement qu'à un certain stade (avant 7 ans en général), l'enfant procède à des activités désordonnées et en apparence inutiles pour l'apprentissage. Il joue. Il explore. **Par le jeu, il apprend, inconsciemment.** Au stade suivant (entre 7 et 12 ans en moyenne), l'enfant arrive à **maîtriser** et à **coordonner certaines opérations,** mais seulement **dans des situations concrètes.** Par ses manipulations, par son interaction avec la réalité, il prend conscience d'une structuration progressive de ses actions : processus non systématique certes, mais cependant nettement orienté. Le stade qui suit est celui des **opérations logiques.** L'adolescent parvient alors à analyser ses expériences concrètes, à les partager en classes et à établir des relations entre ces classe. Bref, il arrive à **intériorier** certaines opérations que déjà il maîtrisait sur le plan concret et à en faire l'objet d'opérations nouvelles et réversibles. C'est le début du raisonnement hypothético-déductif ; c'est la naissance de la pensée de l'adulte.

A la suite d'expériences psycho-mathématiques menées dans différents milieux, Dienes a proposé de distinguer analoguement **trois phases dans**

---

[18] Dieter Lunkenbein a entrepris une recherche sur ce sujet au Centre de Recherches en Psycho-mathématique de l'Université de Sherbrooke. Il utilise un appareil spécialement construit à cette fin (à propos du prototype simplifié de cet appareil, voir B. Parkanyi, **« On the construction of an apparatus for learning some group structures »,** Journal of Structural Learning, 1969).

LES NOMBRES EN COULEURS
(Bulletin Cuisenaire)

Index analytique

Numéros 31 à 40 (janvier 1968 à novembre 1969)

Les titres des articles sont en caractères gras. Les noms propres sont en capitales.

Les nombres en chiffres gras indiquent le numéro du bulletin ; ils sont suivis de l'indication de la page (chiffres maigres).

tout processus d'abstraction d'un concept en mathématique. Il recrée donc, pour ainsi dire, à l'échelle microscopique la théorie de Piaget sur le développement mental de l'enfant. Toutefois, les trois phases qu'il distingue peuvent réapparaître en principe indéfiniment, dans des processus d'abstraction consécutifs, où le produit de l'un sert d'élément pour amorcer le suivant.

Au niveau élémentaire, d'après cette théorie, il se présente donc, dans tout processus d'abstraction en mathématique, une première phase qui se résume surtout en une activité ludique: l'enfant entre en interaction avec son environnement, il explore. C'est la phase du **jeu libre** [19], où l'esprit, procédant apparemment dans le désordre et sans but précis, prépare inconsciemment le terrain pour les phases suivantes de processus d'abstraction éventuelle.

Dans une seconde phase de l'abstraction, l'enfant prend conscience de contraintes qu'impose l'environnement. Une certaine structuration s'accomplit dans les situations où précédemment il agissait sans direction précise. Graduellement, à mesure qu'il s'adapte aux contraintes de l'environnement, l'enfant arrive à discriminer et à coordonner des composantes du concept à abstraire. Cette phase est donc orientée vers une certaine organisation finale qui échappe encore à l'esprit. Pour l'enfant, c'est la phase du jeu [19] avec règles artificielles.

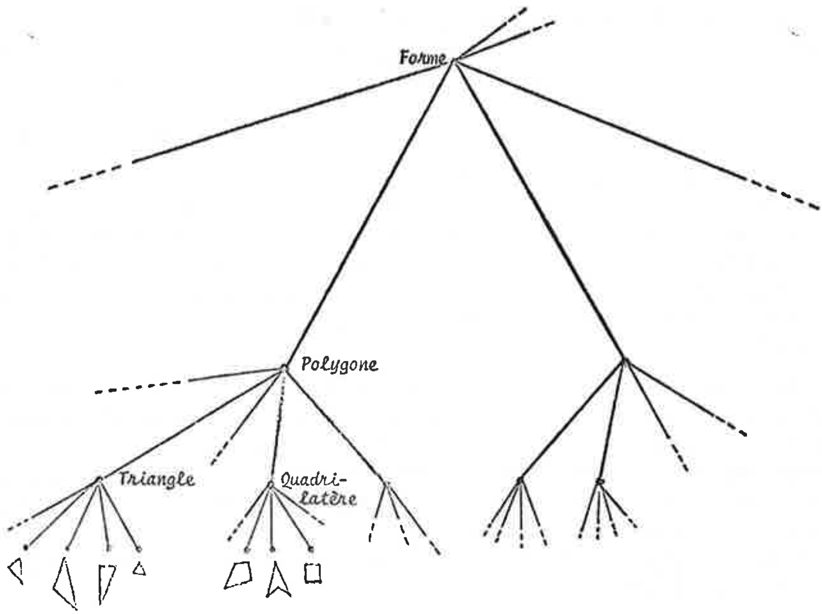
La troisième phase est celle de l'**abstraction** du concept. Lorsque l'enfant a déjà franchi les deux phases précédentes dans des jeux mathématiques suffisamment variés, il prend conscience de propriétés qui leur sont communes. Il procède à l'abstraction du concept ou de la structure qu'ils concrétisent. Ce qu'il vient ainsi de construire mentalement pourra par la suite devenir pour l'enfant l'objet de nouvelles opérations, abstractions et généralisations.

Naturellement, un grand nombre d'abstractions prennent beaucoup de temps à se former; le passage d'une phase à la suivante peut même prendre plusieurs années. Ainsi, l'abstraction de certains concepts ne se fera peut-être que vers la fin de l'Elémentaire, quoique déjà, à l'âge préscolaire, un enfant aura franchi une partie de la phase de jeu libre. Il semble par ailleurs que la formation des concepts mathématiques soit plus ou moins rapide, selon le concept à abstraire et selon les individus. Il faudra donc à l'Elémentaire faire appel à une méthodologie en accord avec la nature et les exigences des processus d'abstraction.

Selon la théorie précédente, les processus d'abstraction en mathématique relèvent d'une **hiérarchisation:** chaque concept, au terme d'une abstraction, peut en principe servir de point de départ à un nouveau processus. Exemple:

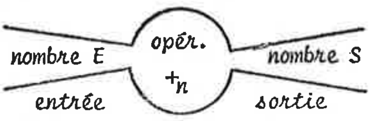
---

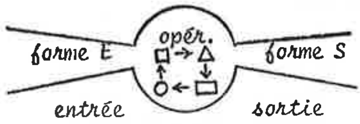
19 La distinction importante faite ici entre **jeu libre** (dans la première phase) et **jeu** (dans la deuxième phase) correspond à celle qui existe, en anglais, entre «free play» et «games».



Les concepts apparaissent ainsi comme **stratifiés,** par « niveaux d'abstraction » superposés. Les plus primitifs prennent racine dans le monde matériel.

Pour illustrer cette théorie, considérons le cas très simple de l'abstraction du concept **d'opérateur** (ou **fonction).** On sait qu'il s'agit là d'une notion-clé dans les programmes modernes de mathématique. Pour amener les enfants à faire cette abstraction à l'Elémentaire, on pourra faire appel à un moyen pédagogique très efficace, qui consiste à représenter chaque opérateur par une « machine »





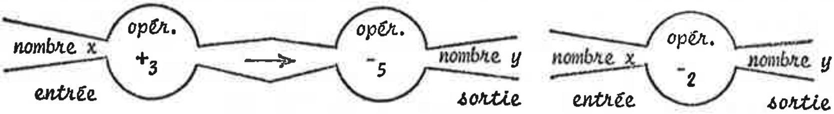
qui fournit, à la sortie, le résultat de l'opération effectuée sur un élément placé dans l'entrée. On matérialisera ou on schématisera une telle machine, selon l'âge des enfants.

On proposera donc à l'enfant des activités faisant intervenir divers types de machines [20] : machine qui ajoute ou qui multiplie..., qui change la forme ou qui effectue certaines mutations..., etc. Il explorera ces situations

---

20 Cf. Z. P. Dienes, **« Les Etats et les Opérateurs »,** Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 1968.

et, dans des phases successives de jeu libre et de jeu, il se familiarisera, sur le plan des opérations concrètes, avec chaque opérateur et le mode de fonctionnement de la machine correspondante. Ainsi, il pourra chercher à trouver S (resp. E), une fois E (resp. S) connu, pour un opérateur donné. Dans la phase suivante, l'enfant arrivera, grâce aux concrétisations précédentes, à abstraire le concept d'opérateur. Par la suite, celui-ci deviendra un élément de départ pour un nouveau processus d'abstraction, un « jouet » de sa pensée. Ainsi pourra s'amorcer l'abstraction des concepts **d'équivalence** et de **composition d'opérateurs,** qui amèneront l'enfant par exemple à constater que la machine de gauche, obtenue par juxtaposition, « fait le même travail » que la machine de droite (c'est-à-dire qu'elle applique un nombre donné x sur $y = x - 2$).



Encore ici, il s'agira de parcourir les trois phases de tout processus d'abstraction, par l'intermédidaire de nombreuses activités.

L'existence et la nature de ces trois phases devraient faire l'objet de recherches nombreuses durant les prochaines années. Les résultats de telles recherches pourraient avoir des implications pédagogiques et méthodologiques importantes pour l'apprentissage de la mathématique à l'Elémentaire.

3 . Le cycle complet d'apprentissage d'un concept

L'abstraction d'un concept ou d'une structure mathématique ne constitue qu'une étape dans son apprentissage. Pour vraiment **comprendre** un concept, il faut de plus arriver à **l'analyser,** à saisir les relations qui existent entre ses composantes, et à **l'utiliser.** Cela permettra d'ailleurs de « jouer » avec lui pour favoriser la naissance d'un nouveau processus d'abstraction.

Dans les travaux qu'il a effectués avec des enfants de l'Elémentaire depuis plusieurs années, Z.P. Dienes a été amener à distinguer, dans l'apprentissage d'un concept mathématique, une quatrième, une cinquième et une sixième phases qui font suite à celles du processus d'abstraction. Nous ne voulons ici que les esquisser et nous suggérons au lecteur intéressé de se référer à quelques publications sur le sujet [21].

Pour arriver à analyser et à utiliser un concept, après en avoir fait l'abstraction, l'enfant doit parvenir à l'extérioriser, à le projeter hors de sa pensée, afin d'être mieux en mesure ensuite de l'« examiner » et de le

---

[21] Cf. Z. P. Dienes, **« Les six étapes de l'apprentissage »**, O.C.D.L., (à paraître) et Z. P. Dienes et E. W. Golding, **« Approach to modern mathematics »**, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 1967. Voir également le texte de la conférence prononcée par Z. P. Dienes lors du Congrès International de l'Enseignement Mathématique tenu en août 1969 à Lyon sous la présidence de Maurice Glaymann et publiée dans les Compte-rendus du congrès.

« disséquer ». Voilà pourquoi, selon Dienes, on amènera l'enfant, dans une **quatrième phase de l'apprentissage** d'un concept ou d'une structure mathématique, à en faire une **REPRÉSENTATION,** c'est-à-dire à s'exprimer à propos de celui-là par écrit ou verbalement, à l'aide d'un dessin, d'un schéma, d'une peinture...

Mais l'enfant s'aperçoit bientôt qu'il lui est possible d'étudier les propriétés des concrétisations qui ont permis l'abstraction d'un concept, en faisant l'étude de sa représentation. Il n'y parvient toutefois pas sans quelques difficultés, puisque cela va le forcer à se décentrer et à regarder **de l'extérieur cette représentation.** Il cherche donc, dans une **cinquième phase de l'apprentissage** d'un concept, à **décrire** les propriétés de la représentation qu'il en a faite. Pour y arriver, il lui faut **créer un langage,** prenant la forme de phrases ou d'équations ou d'énoncés logiques (« si..., alors... ») par exemple. C'est la **phase de SYMBOLISATION,** qui conduit donc, par l'intermédiaire de la représentation, à une description partielle des concrétisations qui ont amorcé le processus d'apprentissage.

Puisqu'il est en général impossible, à partir de la représentation, de décrire complètement les propriétés caractéristiques de la structure ou du concept, une **sixième phase** vient en compléter l'apprentissage. C'est la **phase d'AXIOMATISATION** [22], où l'enfant est amené à découvrir des règles qui permettent, à partir des propriétés déjà décrites, d'en **déduire** d'autres. Les propriétés initiales sont appelées **axiomes,** les autres sont appelées **théorèmes** et les cheminements des premières aux secondes sont qualifiées de **preuves.**

Voilà, en bref, les six phases que distingue Dienes dans l'apprentissage d'un concept mathématique. Nous donnerons, dans la deuxième partie de cet article, quelques ilustrations en arithmétique, en géométrie ou en algèbre, de ce cycle d'apprentissage. Les recherches se poursuivent à propos de cette théorie et visent à montrer que la majorité des enfants peuvent franchir les six phases précédentes dans plusieurs domaines de la mathématique, pourvu qu'on fasse usage d'une pédagogie et d'une méthodologie adaptées.

4. La généralisation d'un concept ou d'une structure

Parallèlement au processus d'abstraction, celui de **généralisation** joue un rôle très important dans l'apprentissage de la mathématique.

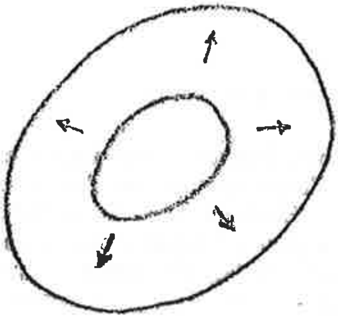
Un concept, en mathématique, peut souvent être appris à divers niveaux de généralité, par exemple selon que l'on étudie l'essentiel de la numération de position dans la base 10 seulement (comme on le faisait traditionnellement) ou bien dans plusieurs bases à la fois (comme on le suggère de plus en plus), ou selon que l'on apprend la géométrie ou l'algèbre linéaire dans deux, trois, quatre,... dimensions.

---

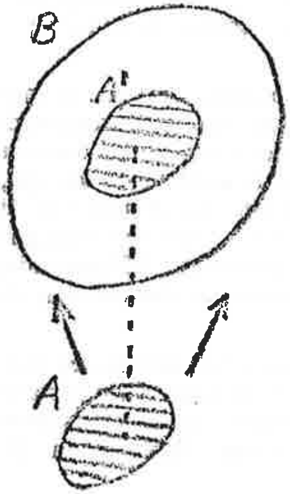
22 Cf. Dienes, **« Introduction à l'axiomatique »** (fiches de travail expérimentales), Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 1967.

Vaut-il mieux, à l'Elémentaire, faire abstraire un concept donné avec peu de généralité pour ensuite le rendre plus général, ou bien vaut-il mieux aborder le concept avec plus de généralité et le faire abstraire ensuite? Peu de recherches ont été faites à ce sujet, mais une expérience menée à Adélaïde [23] indique que, dans certains cas, l'apprentissage d'un concept plus général au départ est plus efficace. C'est le **principe de la « généralisation précoce » (« deep end principle »),** qui contredit partiellement la règle classique « du simple au complexe ».

On peut parler de généralisation d'un concept dans plusieurs sens. Il peut d'abord s'agir d'une **généralisation simple,** où il s'agit d'agrandir la classe formée en compréhension lors de l'abstraction du concept. C'est ce qui se produit, à l'Elémentaire, pour la commutativité de l'addition par exemple. L'enfant remarque que l'ordre dans lequel on ajoute deux nombres naturels n'a pas d'importance. Au début, il s'en rend compte pour un petit nombre d'entiers naturels. Lorsqu'il découvre que cette propriété s'applique aussi à tout l'ensemble des nombres naturels, il fait alors une généralisation simple de commutativité.



Il peut s'agir encore de la **généralisation** que nous appellerons **mathématique,** laquelle se rencontre fréquemment en mathématique. Cette fois, il s'agit de passer de la classe A correspondant au concept à une classe B qui contient une image A' isomorphe à A. Strictement parlant, toutes les extensions suivantes par exemple sont des processus de généralisation mathématique,



$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[dr] & & & \\ \mathbb{N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{C} \\ & \mathbb{Q}^+ \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

ainsi que le passage à un espace de dimension supérieure en géométrie.

Pour procéder à une généralisation mathématique, il faut donc bien connaître les trois ensembles A, B, A', pouvoir construire l'isophormisme entre A et A' et constater l'inclusion de A' dans B.

---

[23] Cf. Z. P. Dienes et M. A. Jeeves, **« Pensée et structure »**, O.C.D.L., 1967.

Le processus de généralisation part de classes ou d'ensembles d'objets; il est donc beaucoup plus difficile que celui d'abstraction. A l'Elémentaire, on facilitera la généralisation d'un concept mathématique en faisant construire par les enfants des isophormismes (ou « dictionnaires ») entre diverses concrétisations de ce concept et de sa généralisation. Encore ici, il reste à mener plusieurs expériences afin de préciser la nature du processus de généralisation et de mettre au point des moyens efficaces pour en faire parcourir les étapes par des enfants de l'Elémentaire. Jusqu'ici, les recherches de Dienes à ce sujet l'ont amené à formuler le **principe de variation mathématique,** lequel souligne la nécessité, pour atteindre à une plus grande généralité des concepts mathématiques, d'en faire faire l'apprentissage dans des contextes mathématiques divers.

Les principes pédagogiques sous-jacents au programme [24]

La mathématique a pour objet des abstractions, lesquelles constituent les points d'aboutissement d'innombrables cycles d'apprentissage. Si l'on veut favoriser un apprentissage optimum de la mathématique par les enfants, tout en demeurant fidèle aux principes psychologiques formulés précédemment, il est indispensable de faire usage d'une **pédagogie adaptée,** qui assure à chaque élève la possibilité d'amorcer et de compléter les processus d'abstraction et de généralisation nécessaires. Or la définition et l'application d'une telle pédagogie présuppose, de la part des autorités et des enseignants, un **changement radical d'attitude** vis-à-vis de l'enseignement, de leur propre rôle, des programmes et des examens.

Notre programme s'appuie en priorité, sur le principe suivant: il faut **centrer l'enseignement sur l'enfant** [25]. Cette nécessité découle directement des principes psychologiques que nous avons posés et s'inspire des données actuelles de la psychogénèse. N'est-ce pas en effet l'enfant **lui-même** qui, avec l'aide du maître, **construira** à travers son **activité,** les abstractions et les généralisations nécessaires en mathématique? Ce principe souligne indirectement l'avantage qu'il y a à concevoir l'enseignement à l'Elémentaire beaucoup plus en termes d'apprentissage qu'en termes de transmission de connaissances.

Or nous savons par expérience qu'il existe beaucoup de différences individuelles entres les élèves, en particulier dans l'apprentissage. Ainsi certains ont besoin d'être familiarisé avec un plus grand nombre de concrétisations d'une structure que d'autres, avant de pouvoir en former l'abstraction. De

---

24 Cf. Z. P. Dienes et E. W. Golding, **«Approach to modern mathematics»,** Université de Sherbrooke, 1967; E. W. Golding, **«Rapport sur la formation des professeurs en mathématique»,** Université de Sherbrooke, 1968.

25 Il s'agit là précisément de l'une des principales recommandations de la Commission Royale d'Enquête sur l'Education au Québec.

même, on observe des différences notables entre les enfants, par exemple dans la durée de la phase ludique qui amorce un cycle d'apprentissage. Il faut donc faire appel à des moyens qui permettent, autant que possible, de tenir compte de telles différences individuelles dans la pratique. L'un de ces moyens, sur lequel nous reviendrons, consiste à réorganiser la classe en équipes et à utiliser des fiches de travail [26].

Naturellement, centrer l'enseignement sur l'enfant, c'est du même coup **redéfinir le rôle du maître.** Traditionnellement, la classe était en général centrée sur l'instituteur, qui d'autorité décidait de tout : horaire, répartition du programme, rythme des leçons, punitions, etc. Il constituait la seule source d'information et on faisait appel à lui pour juger des bonnes et des mauvaises réponses. Mais en procédant à la réorganisation de la classe et en faisant appel à une méthodologie adéquate, il est maintenant possible pour le maître d'assurer plutôt un rôle de **guide** et de **coordonnateur.** Sa tâche consiste alors à encourager et à faciliter **la démarche de l'enfant** à travers les différentes étapes de l'apprentissage, en leur proposant par exemple des activités et des matériels choisis, plus ou moins structurés selon les besoins. Il fait appel à la créativité de l'élève et suscite la recherche objective. Jusqu'à un certain point, les enfants peuvent ainsi progresser à leur propre rythme plutôt qu'à celui du maître ; dans plusieurs situations, l'autorité de ce dernier peut alors faire place à une attitude objective, en face de questions à trancher.

Centrer l'enseignement sur l'enfant et tenir compte des différences individuelles, cela suppose encore **un changement radical d'attitude vis-à-vis des programmes.** Il s'agit en effet de transformer profondément la conception traditionnelle selon laquelle un programme consiste en une liste de sujets devant être **traités par le maître** et **assimilés dans un temps déterminé** par les élèves. D'abord, comme nous l'avons répété déjà, nous proposons de mettre l'accent sur **l'apprentissage par l'enfant** plutôt que sur **l'enseignement par le maître.** Ensuite, il ne saurait être question, dans notre programme, de découper la matière de façon systématique, avec la rigidité et la linéarité des programmes traditionnels. Comme nous l'avons déjà souligné (page 5), les cheminements qui y apparaissent sont un peu arbitraires et s'entre-croisent continuellement. Un cloisonnement vertical aurait pour effet de donner aux enfants une fausse image de la mathématique, qui se veut unifiée, tout en entravant le processus d'abstraction des structures. Par ailleurs, des cloisons horizontales étanches auraient pour conséquences de devoir astreindre la majorité des élèves à un rythme qui gênerait les démarches individuelles de l'apprentissage.

---

[26] Un autre moyen consiste à faire disparaître les degrés du cours élémentaire et à regrouper les enfants par **groupes d'âge** selon des critères fonctionnels. C'est le **progrès continu (enseignement sans degré)** dont l'implantation se fera graduellement au Québec à l'Elémentaire, à la suite des recommandations de la Commission Royale d'Enquête.

Dans la pratique, l'enseignant de l'Elémentaire fera plutôt dans ce programme un choix de sujets, dans un certain ordre de priorité, qui pourront donner lieu à des activités en classe pendant une période de temps donnée. Ce cadre souple lui permettra de mieux s'adapter aux différences individuelles et aux exigences de l'apprentissage de la mathématique. Dans nos classes expérimentales de Sherbrooke et dans plusieurs pays, des suggestions ont été préparées à l'intention des maîtres pour leur faciliter la tâche. Des fiches de travail et des matériels divers sont à leur disposition; graduellement ils s'habituent à les utiliser ou à en produire d'autres, dans le cadre **d'ateliers** tenus à intervalles réguliers.

Mentionnons, sans insister, qu'une telle conception des programmes et de leur application est indissociable d'un **changement d'attitude à l'égard du rôle et de la nature des examens.** Dans plusieurs de nos classes expérimentales le progrès des enfants est enregistré à l'aide de fiches individuelles: les «examens» font places à des exercices individuels ou en groupes, présentés sous forme de fiche ou de jeux ou parfois d'interrogations. Ils permettent de situer chaque enfant dans son processus d'apprentissage et n'ont plus ce caractère sélectif ou éliminatoire.

Pour réaliser les objectifs énoncés précédemment, il devient indispensable de faire appel à une **organisation plus souple de la classe.** Un moyen particulièrement efficace consiste à **faire travailler fréquemment les élèves en équipes** de composition et de grandeur variables. Plusieurs recherches, en particulier celles de Gagné et Smith, ont en effet fait ressortir l'importance de la discussion entre les enfants dans l'apprentissage d'une discipline. Le travail en équipe, malgré les difficultés qu'il pose aux maîtres peu préparés à cette technique, permet cette discussion et facilite le respect des différences individuelles, en plus d'offrir des avantages certains du point de vue social. Naturellement, on ne fera pas appel exclusivement à ce mode d'organisation de la classe. Souvent, en effet, il sera plus efficace, en particulier pour introduire une activité nouvelle, de faire appel simultanément à toute la classe. Par ailleurs, le **travail individuel** demeure très important dans le développement de l'enfant et le maître devra y faire régulièrement appel.

Beaucoup d'enseignants éprouvent une grande insécurité lorsqu'il s'agit de mettre en application les suggestions précédentes: changer les attitudes profondément ancrées n'est pas chose facile pour un adulte, en particulier pour un enseignant d'expérience; mettre en application un programme comme celui-ci est exigeant du point de vue mathématique et méthodologique; procéder à une réorganisation de la classe demande beaucoup de compréhension, de confiance et de patience. Cependant, plusieurs expériences l'ont montré: cela devient réalisable si tous veulent bien collaborer, si l'on fait usage des suggestions et des matériels variés destinés aux maîtres, etc. Dans l'avenir, cela sera d'autant plus réalisable que dès l'école normale ou l'université, on verra à donner au futur maître la préparation et l'entraînement nécessaires. C'est là-dessus que les autorités locales comptent pour généraliser progressivement dans la région de Sherbrooke un programme voisin de celui-ci.

Pour une modernisation de l'enseignement de la mathématique

L'APPORT DE L'ÉQUIPE LYONNAISE

par Maurice Glaymann
Directeur de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement de la Mathématique de Lyon

L'enseignement de la mathématique est aujourd'hui un problème universel. Le premier Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (Lyon, 24-30 août 1969) en est une preuve. Partout dans le monde, des équipes de recherche tentent de trouver des solutions à ce problème; jamais dans l'histoire de l'enseignement un tel mouvement ne s'est encore produit. Jusqu'à ces dernières années, l'enseignant vivait retiré dans sa tour d'ivoire; il était seul face à sa classe et devait par lui-même résoudre toutes ses difficultés; il était indécent, voire même dégradant de faire part à un autre collègue de ses problèmes et chacun gardait pour soi ses échecs et ses réussites. L'homme débute par l'erreur; un immense orgueil pousse chacun de nous à tout rapporter à soi-même; que de fois sommes-nous condamnés à passer par le compliqué et le faux avant de comprendre le simple et le vrai? Ce cloisonnement entre les professeurs des autres disciplines faisait que l'enseignement était figé sur lui-même, dogmatique et bien souvent stérile. Combien d'enfants intelligents et doués ont-ils été perdus pour la science, l'industrie et même l'enseignement?

Or, de nos jours c'est l'effectif en scientifiques qui caractérise le rang d'une nation; l'impératif pour tout pays soucieux de son avenir, de sa liberté et de son indépendance est de former le plus grand nombre de chercheurs, d'ingénieurs, de techniciens et d'enseignants hautement qualifiés, ouverts à l'évolution et capables de penser par eux-mêmes. Chacun sait que la formation scientifique est dans une très large mesure reliée à la formation mathématique, et tant que des générations d'élèves seront hostiles à cette discipline rien ne sera possible.

Mais septembre 1969 sera en France un tournant capital pour l'enseignement de la mathématique. En effet, il va être possible de préparer notre jeunesse à un avenir meilleur en lui ouvrant l'esprit et en ne limitant plus notre enseignement à de purs mécanismes imposés de manière dogmatique. Il sera désormais permis de présenter une mathématique dynamique, ouverte vers ses applications les plus fécondes et plus jamais figée sur elle-même. En fait, la jeunesse a priori ouverte à tout courant, avide de savoir et de comprendre, demande que son intelligence soit développée et exige qu'on lui permette d'agir, faute de quoi elle se révolte; mais à qui donc la faute? Il est essentiel de la conduire en dosant et la liberté et l'enthousiasme vers des idées, des techniques qui débouchent vers des concepts utiles et efficaces. Le premier but du maître doit être d'apprendre à ses élèves à méditer, à critiquer et à créer. C'est en donnant à notre jeunesse de réelles et de profondes motivations que nous lui permettrons d'aller de l'avant sans craindre l'avenir.

Je me propose d'indiquer ici la contribution de l'Equipe Lyonnaise dans le mouvement de rénovation actuel.

Le principal effort de l'équipe a porté sur le premier cycle des Lycées. En octobre 1967 une recherche a commencé en classe de sixième [1]: 21 professeurs dans 7 établissements ont entrepris l'expérience portant sur un effectif de 1260 élèves, soit 37 classes. Les élèves n'ont pas été choisis, seuls les maîtres étaient volontaires. La recherche avait un double but: d'une part expérimenter de nouveaux contenus (préconisés par la Commission Lichnerowicz, voir Math-Ecole No 32, mars 1968) et d'autre part mettre au point des méthodes d'apprentissage et d'organisation de la classe. Les élèves travaillent en groupes de deux ou trois, chaque groupe reçoit sur une fiche un travail à effectuer. Une fois le travail fait et contrôlé par le maître, le groupe reçoit la fiche suivante; nous permettons ainsi aux enfants d'aller de l'avant, indépendamment des autres équipes. De ce fait, l'activité des élèves est sollicitée en permanence; chaque équipe progresse à son propre rythme, mais cependant afin d'éviter de trop grands écarts, des fiches tampons sont prévues, elles permettent aux meilleurs de faire une étude plus poussée d'une question donnée. Après l'étude d'un certain nombre de fiches, une synthèse et faite avec toute la classe sous le contrôle du maître. C'est ainsi que se trouve élaboré le cours, mais ici au lieu d'être imposé a priori, il apparaît comme la mise au point de ce qui a été découvert par le travail de tous. La préparation des fiches exige un travail considérable et pose bien souvent des problèmes d'une très grande difficulté. Les idées proposées aux enfants doivent être organisées de manière à faire prendre conscience de façon progressive des notions importantes de la mathématique. Il est esentiel de poser les problèmes de manière assez ouverte afin que l'enfant ait de l'initiative et cependant, il faut éviter qu'il soit dès le départ neutralisé par trop de difficultés à vaincre.

Les fiches sont préparées par une équipe réduite, puis elles sont proposées à toute l'équipe; après une discussion, elles sont éventuellement refaites et c'est alors qu'elles sont présentées aux enfants. L'équipe rédige enfin un texte définitif qui tient compte cette fois des réactions des élèves.

Cette expérience s'est poursuivie l'an dernier en classe de cinquième; une première conclusion s'est imposée aux expérimentateurs: pratiquement, aucun enfant n'a été contraint à redoubler sa classe à cause des mathématiques.

Cette année nous entreprenons une troisième année de recherche avec ces mêmes enfants, au niveau de la classe de quatrième.

---

[1] Elèves de 11 à 12 ans.

L'équipe a publié sous le nom de E. GALION, les fiches de 6e et de 5e.

Le problème est actuellement celui de la **généralisation** de la recherche. Il faut d'abord former tous les maîtres aux nouvelles méthodes pédagogiques et bien souvent leur apprendre les notions de bases des mathématiques actuelles.

La création en janvier 1969 d'un Institut de Recherche pour l'Enseignement de la Mathématique nous a permis de faire connaître notre recherche à plus de 500 professeurs de l'Académie de Lyon.

Ces maîtres ont travaillé par groupes de trente personnes sous la direction d'un formateur, membre de l'équipe de recherche, à raison d'une séance de trois heures par semaine. Ces maîtres reçoivent un document de travail de sept à huit pages; ils l'étudient chez eux. Durant la séance de travail, le formateur discute avec les maîtres du document et donne soit des prolongements, soit des conseils pédagogiques pour faire passer tel ou tel concept à un niveau donné. Le reste de la séance est consacré à l'étude d'exercices et à la construction de fiches pour les enfants.

Nous évitons ainsi les cours magistraux et invitons les maîtres à travailler en équipe. L'atmosphère est très active, la contestation est de rigueur, pour le plus grand intérêt de tous.

La vitalité et l'efficacité de l'I.R.E.M. permet beaucoup d'espoir. Grâce à de tels Instituts nous pouvons enfin penser à mettre en place une réforme permanente de notre enseignement de la mathématique pour le plus grand profit de nos enfants.

M. G.

COURS DE LUCERNE 1969

La mathématique à l'école primaire

Degré inférieur

Il n'a pas fallu longtemps à notre chef de cours, Mlle Françoise Waridel, pour faire régner dans son groupe une atmosphère de travail intensif et agréable.

Avides d'apprendre, de renouveler leur enseignement, de confronter des idées, d'éclairer les points obscurs, les vingt-neuf participants ont passé ensemble six journées passionnantes. Les contacts, enrichis encore par la diversité des pays et régions représentés (Italie, Nouvelle-Calédonie, Tessin, Genève, Vaud, Fribourg, Neuchâtel) se sont transformés en véritable amitié. Je regrette de ne pouvoir résumer ces six jours. Ils ont été remplis par des exercices, des manipulations, des conseils, et des remarques autant que par des développements rigoureux. Les réglettes, les jeux logiques, les blocs multibases ont conquis chacun et notre bagage de connaissances sur les ensembles, les bases et les puissances s'est fortement alourdi.

Je me plais à relever qu'à côté de toutes les notions, nouvelles pour beaucoup d'entre nous, de cette mathématique moderne dont nous nous sommes imprégnés, Mlle Waridel a apporté des leçons de psychologie, de bon sens, de pédagogie qui nous replongeaient dans la réalité de notre classe. Nous sentions qu'elle se trouvait dans la même situation que nous, avec les mêmes gosses qui nous tiennent tellement à cœur. Nous ne sommes pas prêts d'oublier son souci de la «pédagogie de l'encouragement».

Au bon moment elle lançait un trait d'esprit qui déclenchait l'éclat de rire bienfaisant après l'effort et la concentration.

Avant de conclure, je rappellerai ces paroles de notre professeur qui éclaireront tout notre enseignement:

1. *La maîtresse doit se souvenir qu'il n'y a pas de réussite sans recherche et sans effort personnel.*
2. *Même si les enfants ont l'impression de jouer, la maîtresse doit savoir où elle va, ce que les élèves font et pourquoi ils le font.*

Bravo et merci à vous Mlle Waridel et à travers vous, aux organisateurs qui nous ont offert la chance de passer cette semaine avec vous.

H. Laurent

Degré moyen

C'est par une chaleur très estivale que s'est déroulé le cours de mathématique moderne au degré moyen de Monsieur Dyens. Contrairement à celui de Genève les organisateurs ont renoncé cette année au séminaire de psychologie. Nous nous sommes donc penchés sur le côté pratique de l'enseignement des maths au degré moyen. C'est avec la maestria que nous lui connaissons que Monsieur Dyens nous a décortiqué un programme de troisième année. Nous lui devons en particulier une connaissance plus approfondie des bases et surtout de la méthodologie à utiliser pour en introduire l'usage parmi nos élèves. En parallèle à l'étude des bases, Monsieur Dyens nous propose naturellement l'étude des 6 opérations, des multiples et des nombres répertoriels. Nous avons tous apprécié le côté pratique de son cours, sa méthodologie claire et éprouvée ainsi que sa riche matière. Une fois encore le proverbe a raison et les absents ont eu tort.

Françoise von Gunten - Les Enfers

Comité de rédaction:	**Abonnement:**
Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, G. Guélat, R. Hutin, L. Pauli, N. Savary, S. Roller, rédacteur.	Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 12 - 16713. Paraît 5 fois par an. Service de la recherche pédagogique, 65, rue de Lausanne, 1202 Genève (022 31 71 57).