MATH ECOLE

MAI 1970
9e ANNÉE
43

Le canton de Vaud et l'école romande

Après avoir relaté les expériences genevoises concernant le renouvellement de l'enseignement de la mathématique [1], *Math-Ecole donne aujourd'hui la parole à Messieurs B. Beauverd et Th. Bernet qui mettent au courant ses lecteurs de ce qui est entrepris dans le canton de Vaud. L'extrait du cours vaudois est l'œuvre de Th. Bernet.*

Le canton de Vaud se préoccupe de participer à l'effort romand de réforme de l'enseignement; afin d'être prêt à appliquer au plus tôt le programme mis sur pied par la sous-commission de CIRCE, il organise des **cours de recyclage en mathématique.**

Cet effort se justifie pleinement car l'évolution de la mathématique nous contraint à reconsidérer en totalité notre attitude à l'égard de cette discipline.

Des chapitres nouveaux sont apparus (logique - topologie - ensembles et relations, par exemple) qui donnent à cet enseignement une influence accrue sur le plan de la psychologie. En conséquence la didactique de la mathématique est remise en question; la numération et les opérations qui, jusqu'ici, occupaient tout le temps consacré à cette branche ne représenteront plus que la moitié du nouveau programme, l'autre moitié étant consacrée, elle, à penser juste.

La didactique et la méthodologie de cette discipline sont aussi mises en cause: le travail par groupes occupe une place de choix; il faut que l'enfant puisse discuter avec d'autres enfants des problèmes envisagés, engager sa responsabilité, se sentir concerné; tout autant d'expériences qui seront aussi riches sur le plan social que sur le plan mathématique.

---

[1] Math-Ecole, nunméros 37, 39 et 42.

On veut faire de l'enfant un chercheur et un esprit curieux; c'est dire que la classe deviendra, par la force des choses, un laboratoire de mathématique qui servira plus à structurer le cerveau qu'à le remplir.

Ce sont ces raisons qui poussent le Département à organiser des cours de recyclage pour tout le corps enseignant vaudois.

Ils auront lieu pendant trois années, au moins, à raison de six séances de deux heures par an.

Une vingtaine de moniteurs, tous des collègues de l'enseignement secondaire, sont chargés, sous la direction de M. Th. Bernet, professeur, de ces cours. Nous sommes heureux de cette collaboration qui nous réjouit infiniment.

Ces cours seront complétés, pendant le reste de l'année, par des séminaires où le corps enseignant abordera les problèmes d'ordre pédagogique.

Un cours-test a eu lieu en janvier-mars 1970; il a concerné 22 enseignants de tous les degrés et de tous les ordres, de la maîtresse de classe enfantine au maître de classe supérieure; il a permis de mettre au point le programme suivant:

1re leçon	Ensembles, appartenance. Diagrammes d'Euler. Notation énumérative. Inclusion, sous-ensembles. Usage encore intuitif des attributs. Pas de singletons, ni d'ensemble vide...
2e leçon	Précisions sur les ensembles: notion de variable, donnée d'un ensemble par une propriété caractéristique de ses éléments, référentiel. Intersection, réunion, complémentaire.
3e leçon	Seule notion nouvelle: partition d'un ensemble. Répétition et approfondissement des notions vues jusque-là.
4e leçon	Produit cartésien de deux ensembles. Correspondances, schémas cartésiens, graphes. Appplications (ou fonctions). Notation fonctionnelle.
5e leçon	Composition d'applications. Bijections. Réciproque d'une bijection.
6e leçon	Exploitation de certaines des notions vues, dans leur usage simultané: relations d'équivalence, cardinal d'un ensemble.

Deux thèmes principaux ont constitué l'essentiel de ce cours:

A Notion d'ensemble.

B Notion d'application (ou de fonction).

Chacune des leçons comprend:

1. un aide-mémoire qui apporte le strict nécessaire des connaissances;
2. des compléments théoriques destinés à l'information des participants;
3. des exercices effectués dans la séance même sous la direction du moniteur;
4. des exercices à faire à domicile;
5. des corrigés dont l'enseignant prend connaissance au début de la séance qui suit, ce qui lui permet de confronter ses réponses avec celles du moniteur;
6. des exemples tirés de la pratique scolaire.

Nous nous en tiendrons à ce canevas pour présenter la matière des exercices qui vont suivre.

B. Beauverd

Extraits des parties I, II et III, consacrées à

LA NOTION D'ENSEMBLE

1 – AIDE-MEMOIRE

1. Ensembles, éléments d'un ensemble, appartenance.

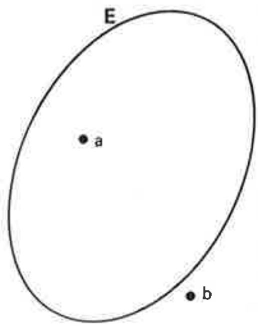
Plus loin, sous "compléments", se trouvent des précisions sur la notion d'ensemble. Nous nous contentons ici de donner quelques indications sur les notations et la terminologie.

Les objets qui constituent un **ensemble** sont les **éléments** de cet ensemble, ils **appartiennent** à cet ensemble.

Pour indiquer qu'un objet a appartient à un ensemble E ,

on écrit $\boxed{\mathbf{a \in E.}}$ On lit : " a appartient à E ",
" a est élément de E ".

Parfois on écrit **E ∋ a.** On lit : " E comprend a ",
" E possède a comme élément".



Pour indiquer qu'un objet b n'est pas un élément de E ,

on écrit $\boxed{\mathbf{b \notin E.}}$ On lit : " b n'appartient pas à E ",
" b n'est pas élément de E ".

On peut aussi écrire **E ∌ b.**

∈ est le signe de l'**appartenance.**

Un ensemble à deux éléments s'appelle une **paire.**

Il peut arriver qu'un ensemble ne possède qu'un seul élément. Certains auteurs appellent **singleton** un tel ensemble.

De plus, il existe l'**ensemble vide** qui ne possède aucun élément et que l'on désigne par le signe **∅** . (Pour plus de précision à son sujet, voir les "compléments" de la partie III.)

2. Quelques types de notations.

a) Lorsqu'un ensemble est donné par énumération (définition en extension), on peut utiliser la **notation énumérative** ou **notation par énumération.**

Exemple : $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$.

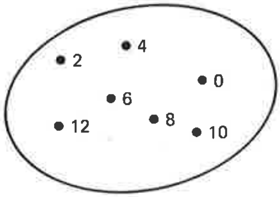
On lit : "l'ensemble composé des nombres 1, 2, 3, 4 et 5".

Il arrive qu'on utilise la notation énumérative dans des cas où elle ne suffit pas à définir l'ensemble qu'elle doit désigner :

$$\{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... \} .$$

On comprend tout de même qu'il s'agit de l'ensemble des nombres pairs (positifs).

b) Lorsqu'un ensemble est donné par une propriété caractérisant ses éléments (définition en compréhension), on peut utiliser la **notation par une propriété caractéristique.**



Exemple : { x | **x est pair** } .[1]

On lit : "l'ensemble des x tels que x est pair".

Cette écriture désigne l'ensemble des nombres pairs.

Note : voir aussi dans les "compléments" de la partie II les précisions données sur les notions de référentiel et de variable.

c) On peut désigner un ensemble par une lettre ou par tout autre signe conventionnel.

Exemples : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$, l'ensemble A , etc.

3. Egalité des ensembles.

Le signe = placé entre deux "notations" signifie que ces "notations" représentent le même objet.

Exemple : 2 + 3 = 15 : 3 (ces deux notations représentent toutes deux le nombre 5.)

Cas des ensembles :

le signe = se place entre deux façons de désigner le même ensemble.

Exemple : $\{x \mid x \text{ est pair}\} = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$.

Propriétés de l'égalité.
1°. Quel que soit A : A = A .
2°. Si A = B , alors B = A .
3°. Si A = B et B = C , alors A = C .

4. Inclusion. Sous-ensembles ou parties d'un ensemble.

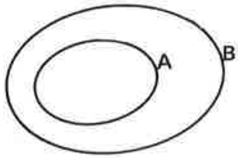
Définition.

Si A et B sont des ensembles, on dit que A est un **sous-ensemble** de B , A est une **partie** de B , A est **inclus** dans B , si, et seulement si, tout élément de A est un élément de B . Autrement dit : dans ce cas, si un élément appartient à A , alors il appartient aussi à B .

1) On rencontre aussi { x ; x est pair } , { x : x est pair } , { x ¦ x est pair } , { x | x est pair } , et d'autres notations proches.

On note $\boxed{A \subset B}$ [1]. On lit : “ A inclus dans B ”.

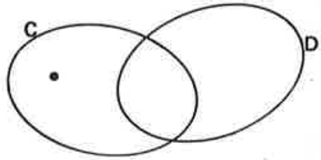
On peut écrire aussi $B \supset A$. On lit : “ B contient A ”.



Si C et D sont des ensembles et qu’il existe dans C au moins un élément n’appartenant pas à D , C n’est pas un sous-ensemble de D .

On note : $\boxed{C \not\subset D}$ ou $D \not\supset C$.

On lit : “ C non inclus dans D ” ou “ D ne contient pas C ”.



Propriétés de l’inclusion.

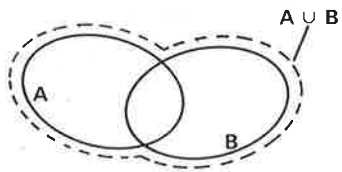
1°. Quel que soit A : $A \subset A$.
2°. Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
3°. Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

5. Réunion

Définition.

On appelle **réunion** de deux parties A et B d’un ensemble, et l’on note $A \cup B$, l’ensemble constitué des éléments appartenant à l’une au moins des parties A ou B .

$A \cup B$ se lit **“A union B”** .



Cas de trois ensembles.

Si A , B et C sont des parties données d’un même référentiel, il est facile de vérifier que

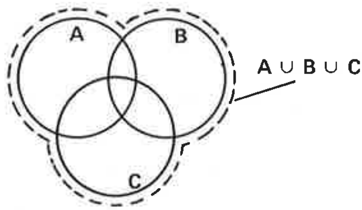
$(A \cup B) \cup C$ et $A \cup (B \cup C)$

représentent le même ensemble.

On peut donc désigner celui-ci par

$$A \cup B \cup C,$$

on l’appelle la “réunion de A , B et C ”: c’est l’ensemble des éléments appartenant à l’une au moins des parties A , B ou C .



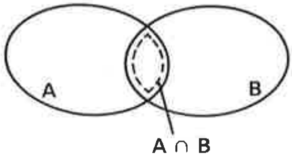
1) Au lieu du signe $\subset$ on trouve aussi $\subseteq$. Dans ce cas, le signe $\subset$ possède un sens plus restreint : $A \subset B$ signifie alors que A est à la fois sous-ensemble de B et distinct de B .

6. Intersection.

Définition.

> On appelle **intersection** de deux parties A et B d'un ensemble, et l'on note $A \cap B$, l'ensemble constitué des éléments appartenant à la fois aux deux parties A et B .

$A \cap B$ se lit **"A inter B"** .



Cas de trois ensembles.

Si A , B et C sont des parties données d'un même référentiel, il est facile de vérifier que

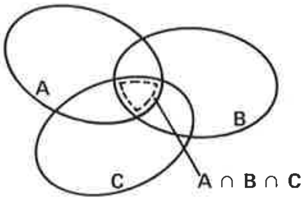
$$(A \cap B) \cap C \qquad \text{et} \qquad A \cap (B \cap C)$$

représentent le même ensemble.

On peut donc désigner celui-ci par

$$A \cap B \cap C,$$

on l'appelle l'"intersection de A , B et C ": c'est l'ensemble des éléments appartenant à la fois aux trois parties A , B et C .



2 – COMPLEMENTS

7. Du bon usage de la notion d'ensemble.

L'idée d'ensemble est certes intuitive; elle est proche de celle de collection, de famille, ... Mais les avantages qu'elle apporte dans le raisonnement sont justement liés à des précisions que le sens intuitif ne suggère pas assez.

a) **Un ensemble doit être pensé comme un tout**, comme *un* objet, et non comme plusieurs objets.

Exemples: "l'ensemble des cantons suisses" (il y en a un) n'est pas "les cantons suisses" (il y en a 22).

1, 2, 3, 4: cela fait 4 objets.

$\{1, 2, 3, 4\}$ est un objet.

b) **Un ensemble doit être considéré comme distinct de ses éléments.** Un ensemble est un objet, ses éléments en sont d'autres.

c) **Un ensemble doit être parfaitement défini.** Pour tout objet, on doit pouvoir déterminer s'il appartient ou non à l'ensemble considéré. (Pour cette raison, nous avons multiplié les exercices avec des réponses du type oui-non.)

Conséquence : tout objet à propos duquel on est amené à se poser la question de l'appartenance doit être parfaitement identifiable (au sens de l'identité judiciaire). Exemple : les côtés d'un triangle ne sont pas ce triangle. Si un triangle est élément d'un ensemble, cela ne signifie pas que ses côtés le soient aussi ...

Conséquence : il faut éviter de définir un ensemble par une propriété sujette à discussion (l'ensemble des enfants blonds de la classe).

Conséquence : un élément ne peut figurer plus d'une fois dans un ensemble. Soit il lui appartient, soit il ne lui appartient pas : ce sont là les seules éventualités possibles.

Exemple : l'ensemble des facteurs premiers de la décomposition de 24 est $\{ 2 ; 3 \}$.

Conséquence : la notion d'ensemble ne contient pas en elle-même l'idée d'ordre.
Exemple : $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ et $\{ 2, 1, 4, 3 \}$ désignent le même ensemble : les mêmes nombres figurent dans les deux énumérations. L'usage d'ordonner les nombres dans la notation énumérative est trompeur, à ce point de vue.

8. A propos des schémas.

L'action de schématiser consiste à faire ressortir *certains* aspects de l'objet représenté. De là résulte que chaque sorte de schéma possède ses avantages propres, et ses défauts ; il n'y en a point d'universelle.

Les schémas dont on fait usage le plus souvent pour représenter des ensembles et leurs éléments portent le nom de **schémas d'Euler** ou **diagrammes d'Euler** (du nom de Leonhard Euler, mathématicien bâlois (1707–1783) qui, le premier, introduisit des schémas analogues pour résoudre certaines questions de logique). On les appelle aussi **diagrammes de Venn** (du nom de J. Venn, logicien américain (1834–1923)).

Il importe de préciser quelques conventions pour que l'usage de ces schémas ne conduise pas à des erreurs.

– Les **ensembles** y sont représentés par des **régions** dont les frontières sont dessinées. Pour faire ressortir une région à laquelle on s'intéresse, on peut avoir recours à divers moyens : la colorier, la hachurer, l'entourer (quand c'est possible) par une boucle, ... On a souvent intérêt à faire usage de couleurs.

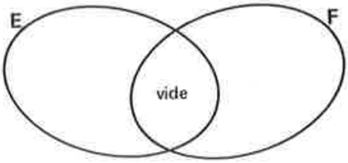
– Les **éléments** du référentiel que l'on veut faire figurer dans le schéma sont représentés par des **points** ou de petites croix.

– Pour indiquer qu'**un élément appartient à un ensemble,** on place le point représentatif à l'intérieur de la région correspondante. Dans le cas contraire, à l'extérieur. Jamais on ne place un point sur la frontière d'une région.

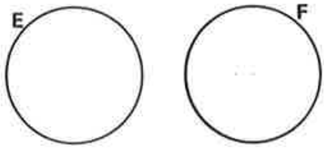
Il est entendu qu'un tel schéma ne renseigne pas sur le nombre exact des éléments appartenant à un ensemble, puisqu'on n'y fait figurer que les éléments auxquels on s'intéresse. En particulier, lorsqu'aucun point ne figure dans une région, cela ne signifie pas qu'elle soit "vide".

Lorsqu'on veut indiquer dans un schéma qu'une région représente un ensemble sans éléments, il faut convenir d'un moyen graphique adéquat. Par exemple, on peut inscrire dans cette région le mot "vide" (mais en aucun cas le signe $\emptyset$, qui symbolise un ensemble et non un adjectif).

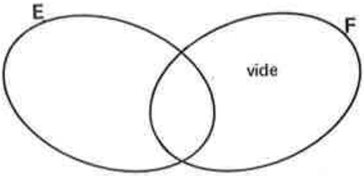
De cette manière les deux schémas que voici sont équivalents.



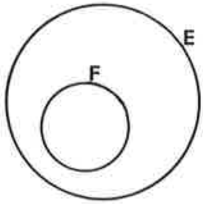
E et F sont disjoints

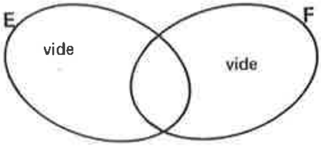


De même ceux-ci, ainsi que les deux suivants.

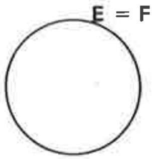


$F \subset E$





$F \subset E$ et $E \subset F$, c'est-à-dire $E = F$

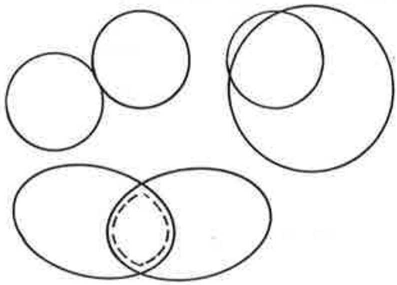


Certains auteurs font la convention de hachurer les régions "vides". Cette façon de faire présente cependant des inconvénients lorsque les boucles ne suffisent plus à représenter les ensembles que l'on veut faire ressortir.

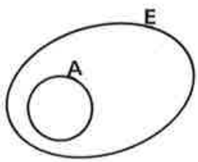
Quelques remarques encore.

Pour obtenir une représentation claire, il faut éviter les boucles tangentes, ou celles qui ne se coupent pas nettement, comme dans les dessins ci-contre.

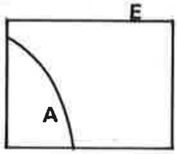
En revanche, il est souvent commode de dessiner des lignes côte à côte (de couleurs différentes, par ex.) alors qu'on les imagine superposées.

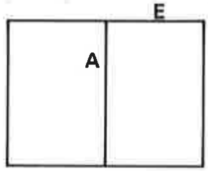


Dans ce schéma, la région représentant le complémentaire de A ne peut être entourée d'une boucle.

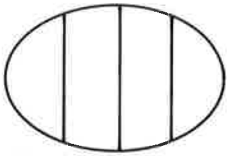


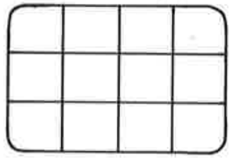
Lorsque la notion de complémentaire intervient, il est souvent commode de faire appel à d'autres types de schémas, comme par exemple ceux-ci, qui sont équivalents au précédent.



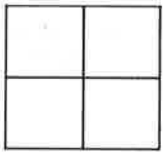


Et voici encore un type de schéma commode pour représenter des partitions (pour le sens de ce mot, voir "compléments" de la partie III). A gauche, une partition en quatre parties. A droite, deux partitions d'un même ensemble, l'une en quatre parties, l'autre en trois.

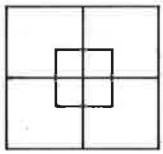




Pour représenter deux ou trois partitions, chacune en deux parties, on peut prendre des schémas de Carroll (Lewis Carroll, 1832–1898, anglais, l'auteur d'Alice au pays des merveilles, qui était passionné de logique). Ils se présentent comme ceci :



2 partitions



3 partitions

9. Notion de référentiel.

En mathématique, il est essentiel de savoir à chaque instant de quoi l'on parle. La notion d'ensemble a apporté dans ce sens beaucoup de clarté.

En particulier il convient, *avant* d'aborder quelque question que ce soit, de préciser le **référentiel** choisi, c'est-à-dire l'ensemble dans lequel on va travailler ou duquel on va partir. L'inobservation de cette règle mène fatalement à des difficultés.

Exemple.

– **Dans N*.** L'ensemble des multiples de 6 est $\{6, 12, 18, 24, \ldots\}$.

L'ensemble des multiples communs de 6 et 4 est $\{12, 24, 36, \ldots\}$.

Définition : le p.p.c.m. de deux nombres a et b est le plus petit nombre qui soit multiple à la fois de a et de b.

Le p.p.c.m. de 6 et 4 est donc 12.

– **Dans N.** L'ensemble des multiples de 6 est $\{0, 6, 12, 18, 24, \dots\}$.

L'ensemble des multiples communs de 6 et 4 est $\{0, 12, 24, 36, \dots\}$.

La définition du p.p.c.m., telle qu'elle est donnée plus haut, n'est plus utilisable ici: le p.p.c.m. de 4 et 6 serait 0!
Dans ce nouveau référentiel, il faut adopter une autre définition:

"Le p.p.c.m. de deux nombres a et b est le plus petit nombre *non nul* qui soit ...".

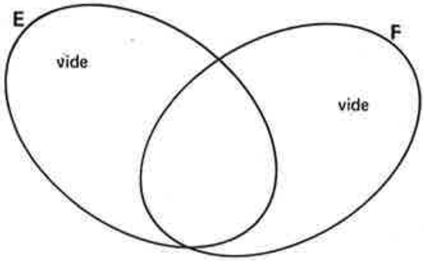
Cet exemple montre qu'on ne peut transférer sans précautions une définition d'un référentiel dans un autre. On verra aussi dans l'exercice N° 21 quel rôle joue le référentiel relativement à la notion de propriété.

10. L'ensemble vide.

Voici quelques précisions plus délicates. On peut les sauter lors d'une première étude, mais leur connaissance est à la longue indispensable. Les méconnaître conduirait en classe à des situations inextricables.

Le "comportement" de l'ensemble vide, et même déjà son existence, surprend au premier abord. C'est l'usage de cette notion qui peut, à la longue, convaincre de l'utilité du point de vue adopté à son sujet, point de vue assurant une cohérence qu'on n'aurait pas autrement.

Il n'y a qu'un seul ensemble vide.



Rappel sur l'égalité des ensembles.

Soit deux ensembles égaux: $E = F$.

Si un élément appartient à E , il appartient aussi à F ,
si un élément appartient à F , il appartient aussi à E ;

ou, ce qui revient au même,

il n'y a pas dans E d'élément n'appartenant pas à F ,
il n'y a pas dans F d'élément n'appartenant pas à E ;

autrement dit encore,

il n'existe pas d'élément x pour lequel on puisse écrire $x \in E$ et $x \notin F$,
ni d'élément y pour lequel on puisse écrire $y \notin E$ et $y \in F$,

il ne peut exister que des éléments pour lesquels on a $\dots \in E$ et $\dots \in F$,
ou $\dots \notin E$ et $\dots \notin F$.

Prenons maintenant le cas de deux ensembles ne comprenant aucun élément: par exemple, dans une classe enfantine C , considérée comme ensemble d'élèves:

$A = \{x \mid x$ a le droit de vote en matière cantonale$\}$,

$B = \{x \mid x$ mesure plus de 1,50 m$\}$.

Passons en revue tous les enfants de C : pour aucun d'entre eux nous ne pouvons écrire

$$\begin{array}{ll} & \ldots \in A \text{ et } \ldots \notin B , \\ \text{ni} & \ldots \notin A \text{ et } \ldots \in B . \end{array}$$

Il faut donc admettre $A = B$;

dans aucun de ces deux ensembles ne se trouve d'élément qui n'appartienne pas à l'autre.

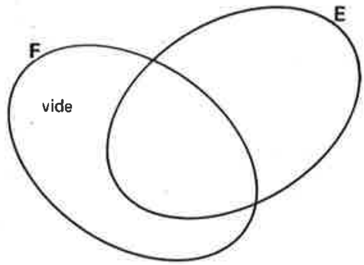
On peut raisonner de façon analogue au sujet de n'importe quels ensembles sans éléments: en fin de compte, ils sont tous égaux.

Plus précisément: toutes les notations représentant des ensembles sans éléments désignent en fait le même ensemble.

Celui-ci est l'**ensemble vide** désigné par le signe $\emptyset$.

Note: le signe $\emptyset$ ne doit jamais être utilisé pour remplacer l'adjectif "vide".

L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.



Rappel sur l'inclusion d'un ensemble F dans un ensemble E :

$F \subset E$ signifie

que, si un élément appartient à F , il appartient aussi à E ,

ou, ce qui revient au même,

qu'il n'y a pas, dans F , d'élément n'appartenant pas à E .

Prenons maintenant $\emptyset$ et un ensemble E . Il est vrai qu'il n'y a pas, dans $\emptyset$, d'élément n'appartenant pas à E .

Le raisonnement peut se faire de même pour tout ensemble E .

Quel que soit E , $\emptyset \subset E$.

11. Quelques ensembles de nombres.

N, l'ensemble des nombres naturels.

Le "comptage" conduit "naturellement" à l'ensemble des **nombres naturels**, que l'on désigne par $\mathbb{N}$.[1)]

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}.$$

1) On rencontre parfois, au lieu des lettres "à double barre" $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, de simples lettres grasses **N** , **Z** , **Q** , **R** .

$\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

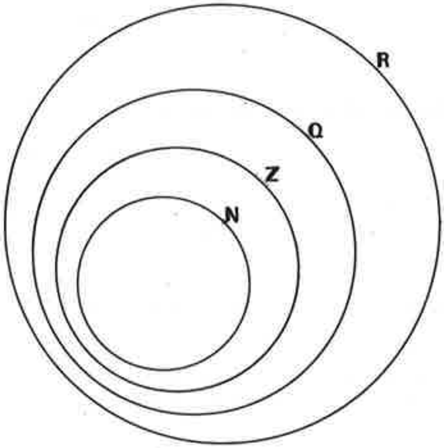
Une méthode pour repérer les points d'une droite à l'aide de nombres est de choisir sur la droite un point origine, auquel on attribue le nombre 0, et un autre point, auquel on attribue le nombre 1. Ces deux points définissent alors une graduation telle qu'à chaque point de la droite il corresponde un nombre bien déterminé, et qu'à chaque nombre il corresponde un point bien déterminé.

Pour ce faire, on utilise l'ensemble des **nombres réels**, que l'on désigne par $\mathbb{R}$.

Les nombres réels sont les nombres que l'on peut figurer à l'aide de l'écriture décimale.

Exemples de nombres réels: π ; $-\pi$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; $-\frac{3}{4}$; 0,4 ; 1 ; -1 ; 0 .

$\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres entiers.



Parmi les nombres réels, on peut distinguer ceux qui sont **entiers.**

$$\mathbb{Z} = \{ \dots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \} .$$

$\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres rationnels.

Parmi les nombres réels, on distingue ceux dont la valeur absolue peut être écrite sous forme de fraction. Il s'agit des nombres que l'on peut obtenir comme quotient de deux entiers. Ce sont les **nombres rationnels.**

Exemples: $\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{3}$; 8 ; -7 ; 0 ; etc.

L'ensemble des nombres rationnels se désigne par $\mathbb{Q}$.

On a $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Quelques autres sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Pour désigner la *partie positive* de l'un des ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, on écrit respectivement $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}_+$, ou $\mathbb{R}_+$.

De même $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Q}_-$ et $\mathbb{R}_-$ désignent respectivement les *parties négatives* de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Attention: 0 étant à la fois positif et négatif, les ensembles $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ comprennent chacun le nombre 0 .

Pour désigner l'ensemble des nombres naturels différents de 0 , on écrit $\mathbb{N}^*$,
pour l'ensemble des nombres entiers différents de 0 , on écrit $\mathbb{Z}^*$,
et ainsi de suite: on utilise de façon analogue les notations $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Z}_+^*$, $\mathbb{Z}_-^*$, ... 1)

1) On rencontre parfois,
- au lieu des lettres "à double barre" $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$: de simples lettres grasses **N** , **Z** , **Q** , **R** ;
- à la place de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}_+^*$: respectivement **N** et $\mathbf{N}_0$, ou ω et ω_0 , ou $\mathbf{N}_0$ et **N** ;
- à la place de $\mathbb{Z}_+$: $\mathbb{Z}^+$.

Les autres notations sont alors modifiées de façon analogue.

3 – EXERCICES

Astérisque : les exercices marqués d'un astérisque sont ceux dont il sera donné un corrigé complet.

Nº 12*.

Dans le public d'une représentation théâtrale réservée aux adultes, on peut distinguer
hommes et femmes,
enseignants et non-enseignants,
personnes venues en voiture et personnes venues autrement.

Quelles catégories de personnes ces distinctions permettent-elles de définir ? Nommer chacune d'elles. Imaginer un schéma, et si possible plusieurs, donnant une vue d'ensemble sur la situation ainsi créée.

Nº 13.

Désignons par D_{18} l'ensemble des diviseurs de 18, par D_{20} celui des diviseurs de 20.

$$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \; ; \quad D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}.$$

Dessiner le diagramme d'Euler représentant ces deux ensembles et tous leurs éléments.

Note : dans un diagramme d'Euler chaque ensemble est représenté par une ligne fermée simple (sans croisements) et chaque élément par un point ou par une petite croix.
Pour indiquer qu'un objet appartient ou non à un ensemble, on place le point correspondant à l'intérieur ou à l'extérieur de la ligne représentant l'ensemble.

Faire ensuite le même exercice avec les ensembles

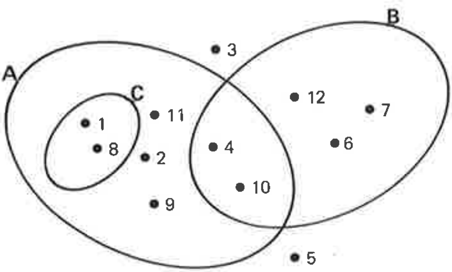
$$A = \{1, 3, 5, 7, 9,\} \text{ et } \quad B = \{2, 4, 6, 8\} \; ;$$

puis avec les ensembles

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ et } \quad F = \{2, 4, 5\}.$$

Nº 14.

Prenons les nombres entiers de 1 à 12 et les ensembles A , B et C représentés ci-dessous :



Compléter les expressions suivantes en écrivant sur les ___ celui des deux signes $\in$ ou $\notin$ qui convient.

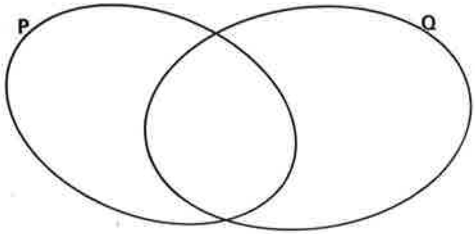
7 ___ A	10 ___ A	8 ___ B
7 ___ B	10 ___ B	8 ___ C
7 ___ C	10 ___ C	3 ___ A
5 ___ B	11 ___ A	3 ___ C
1 ___ A	11 ___ B	4 ___ B

N° 15.

Prenons les lettres (minuscules) de l'alphabet de a jusqu'à i . Concernant celles-ci et les deux ensembles P et Q on a les renseignements suivants:

$a \in P$ et $a \notin Q$	$d \in P$ et $d \notin Q$	$g \notin P$ et $g \in Q$
$b \in P$ et $b \in Q$	$e \notin P$ et $e \notin Q$	$h \notin P$ et $h \notin Q$
$c \notin P$ et $c \in Q$	$f \in P$ et $f \in Q$	$i \notin P$ et $i \in Q$

Représenter les lettres par des points dans le schéma ci-contre.



N° 16.

Que dites-vous des assertions ci-dessous? (Soulignez l'un des mots "vrai" ou "faux".)

a)	Tout Vaudois est suisse.	vrai	faux
a')	Il existe un Vaudois au moins qui n'est pas suisse.	vrai	faux
b)	Tout Suisse est vaudois.	vrai	faux
b')	Il existe un Suisse au moins qui n'est pas vaudois.	vrai	faux

On remarquera que a et a' sont la négation l'une de l'autre. Si l'une est vraie, l'autre est fausse, et réciproquement. Il en est de même pour b et b' .

Soit V l'ensemble des Vaudois et S l'ensemble des Suisses.

Voici des renseignements sur certaines personnes. Notez en regard de chaque nom et dans la colonne voulue si oui, ou non, la personne appartient à V , à S .

Appartient-il	à V ?	à S ?
M. Ackermann est Zurichois	____	____
M. Blanc est bourgeois de Montreux	____	____
M. Coquoz est Valaisan	____	____
M. Dourdakis est Grec	____	____
M. Estoppey est bourgeois de Nyon	____	____
M. Fleming est Anglais	____	____

Note:

Supposons que ces Messieurs ne sont ni doubles-nationaux, ni bourgeois de plusieurs communes.

Observez vos réponses. Il manque l'une des combinaisons oui–oui, oui–non, non–oui, non–non. Laquelle? Que signifie cela?

Résumez toute la situation en dessinant un schéma.

Que dire des ensembles V et S ? ______________________________

N° 17.

Dans $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ on a les ensembles A et B définis comme suit.

A : l'ensemble des nombres qui se terminent par 0 .

B : l'ensemble des nombres divisibles par 5 .

"Si un nombre se termine par 0 , alors il est divisible par 5 ."

Que signifie cela pour les ensembles A et B ? Faire le schéma correspondant.

N° 18.

Dans $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ on a M_4, l'ensemble des multiples de 4,

et M_{20}, l'ensemble des multiples de 20.

$M_4 = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$.

$M_{20} = \{20, 40, 60, 80, 100, \ldots\}$.

Représenter ces deux ensembles et quelques-uns de leurs éléments dans un schéma d'Euler.

Que peut-on dire de ces ensembles? Exprimez-le en mots. Exprimez-le également à l'aide de signes mathématiques.

N° 19.

Plaçons-nous dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ et considérons les deux ensembles suivants.

$A = \{x \mid x \text{ est pair}\}$. A est donc l'ensemble des nombres pairs.

$B = \{x \mid \text{le carré de } x \text{ est multiple de } 4\}$. B est donc l'ensemble des nombres dont le carré est multiple de 4.

En regard de chacun de ces nombres, répondez par oui ou par non!

Ce nombre appartient-il	à A ?	à B ?
5?	____	____
6?	____	____
7?	____	____
3?	____	____
2?	____	____
10?	____	____
41?	____	____
42?	____	____

Observez vos réponses. ____

____

Conclusion? ____

Peut-on dire $A \subset B$? ____________________ $B \subset A$? ____________________

Nº 20.

Référentiel: $\mathbb{N}^*$. $\qquad\qquad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Considérons la propriété "x est un diviseur de 12".

Dans cette expression, remplaçons x successivement par les éléments 1, 2, 3, ... du référentiel. Notons chaque fois, à droite de l'assertion obtenue, si cette dernière est vraie (V) ou fausse (F) .

1 est un diviseur de 12: ____	____ est un diviseur de 12: ____
2 est un diviseur de 12: ____	____ est un diviseur de 12: ____
3 est un diviseur de 12: ____	____ est un diviseur de 12: ____
____ est un diviseur de 12: ____	____ est un diviseur de 12: ____
____ est un diviseur de 12: ____	____ est un diviseur de 12: ____
____ est un diviseur de 12: ____	____ est un diviseur de 12: ____
____ est un diviseur de 12: ____	⋮

Nous pourrions continuer ...

Quel est en conséquence l'ensemble des diviseurs de 12? (En donner une notation énumérative.)

$\{ x \mid x \text{ est un diviseur de } 12 \}$ = ______________________

Nº 21.

Plaçons-nous dans l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} .$$

Donner une notation énumérative pour les ensembles suivants.

A $=_{\mathbb{N}} \{ x \mid x \text{ est inférieur à } 4 \}$ = ______________________

B $=_{\mathbb{N}} \{ x \mid x \text{ est un nombre premier compris entre 20 et } 30 \}$ = ______________________

C $=_{\mathbb{N}} \{ x \mid x \text{ est supérieur à } 100 \}$ = ______________________

D $=_{\mathbb{N}} \{ x \mid x \text{ est carré parfait} \}$ = ______________________

E $=_{\mathbb{N}} \{ x \mid x \text{ est un diviseur de } 17 \}$ = ______________________

F $=_{\mathbb{N}} \{ x \mid x \text{ est un diviseur de 36 supérieur à } 20 \}$ = ______________________

G $=_{\mathbb{N}} \{ x \mid x \text{ est un diviseur pair de } 27 \}$ = ______________________

Changeons de référentiel, et plaçons-nous dans l'ensemble P des nombres naturels pairs.

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\} .$$

L'exercice est le même que précédemment.

A' = $_P\{$ x | x est inférieur à 4 $\}$ = ______

B' = $_P\{$ x | x est un nombre premier compris entre 20 et 30 $\}$ = ______

C' = $_P\{$ x | x est supérieur à 100 $\}$ = ______

D' = $_P\{$ x | x est carré parfait $\}$ = ______

Prenons maintenant comme référentiel l'ensemble V des nombres naturels inférieurs à 25:

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, ... , 24\} .$$

A'' = $_V\{$ x | x est inférieur à 4 $\}$ = ______

B'' = $_V\{$ x | x est un nombre premier compris entre 20 et 30 $\}$ = ______

C'' = $_V\{$ x | x est supérieur à 100 $\}$ = ______

D'' = $_V\{$ x | x est carré parfait $\}$ = ______

N° 22.

Référentiel: **N***.

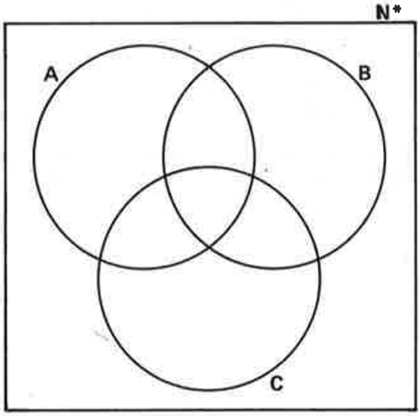
Donner une notation énumérative de chacun des ensembles A , B et C suivants.

A = $\{$ x | x est un diviseur de 16 $\}$ = ______

B = $\{$ x | x est un diviseur de 24 $\}$ = ______

C = $\{$ x | x est un diviseur de 36 $\}$ = ______

Représenter chacun des éléments de A , B et C dans le schéma ci-contre.

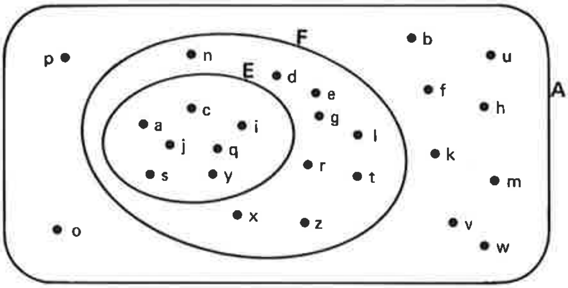


4 – EXERCICES A FAIRE A DOMICILE

Nº 23*.

Soit A l'ensemble des lettres de l'alphabet. $A = \{a, b, c, ..., z\}$.

Ses éléments ont été répartis dans les ensembles E et F selon le schéma ci-dessous.



Dans la tabelle ci-contre, chaque ligne se rapporte à l'un des éléments de A , et chaque colonne à l'un des ensembles E ou F . A chaque intersection d'une ligne et d'une colonne, noter 1 ou 0 suivant que l'élément en question appartient ou non à l'ensemble en question.

On pourrait continuer le tableau pour le reste de l'alphabet. A chaque ligne on trouverait

	0	0,
ou	1	1,
ou	0	1,
ou	1	0.

L'une de ces possibilités est-elle absente du tableau? Pourquoi? Mettre ce fait en relation avec la définition de l'inclusion donnée dans l'aide-mémoire.

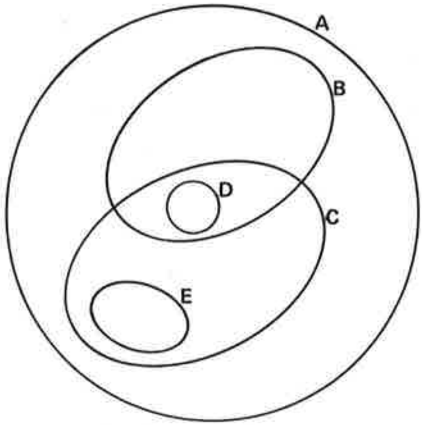
	E	F
a		
b		
c		
d		
e		
f		
g		
h		
i		
j		
k		
l		
.		
.		
.		

N° 24*.

Soit les cinq ensembles représentés ci-contre.

On a $B \subset A$.

Notez de cette manière tous les cas d'inclusion dont vous avez connaissance au vu de ce schéma.



N° 25*.

On sait que tous les mammifères sont des vertébrés.

Autrement dit : si un animal est un mammifère, alors il est un vertébré.

Représenter dans un même schéma l'ensemble M des mammifères et l'ensemble V des vertébrés.

N° 26*.

Plaçons-nous dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. (Il s'agit de l'ensemble des "nombres naturels supérieurs à 0" ou, si l'on veut, celui des "nombres naturels non nuls". Les points de suspension suggèrent que l'ensemble comprend tous ces nombres, aussi grands soient-ils.) L'usage est de désigner cet ensemble par $\mathbb{N}^*$

Si un nombre est multiple de 100, alors il est multiple de 20 !

Représenter dans un même schéma l'ensemble A des multiples de 100 et l'ensemble B des multiples de 20.

N° 27*.

Plaçons-nous encore une fois dans l'ensemble des nombres naturels non nuls.

Peut-on dire que tout nombre premier est impair ? Pourquoi non ?

Soit I l'ensemble des nombres impairs, et P celui des nombres premiers.

Faire un schéma représentant I et P .
Que faudrait-il pour qu'on ait : $P \subset I$?

N° 28*.

En géométrie, on sait que tout carré est un rectangle.

Autrement dit : si une figure est un carré, alors elle est un rectangle.

Représenter en conséquence l'ensemble C des carrés et l'ensemble R des rectangles dans un même schéma.

N° 29*.

Les ensembles A , B , C , ... , G définis ci-dessous sont des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$. Donner pour chacun une notation énumérative.

A , l'ensemble des nombres inférieurs à 7.

B , l'ensemble des nombres compris entre 5 et 10.

C , l'ensemble des diviseurs de 20.

D , l'ensemble des nombres pairs compris entre 20 et 30.

E , l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 30.

F , l'ensemble des nombres pairs.

G , l'ensemble des multiples de 5.

5 – CORRIGES

N° 12*, puis N^os 23* à 29*.

N° 12* C.

La catégorie ...

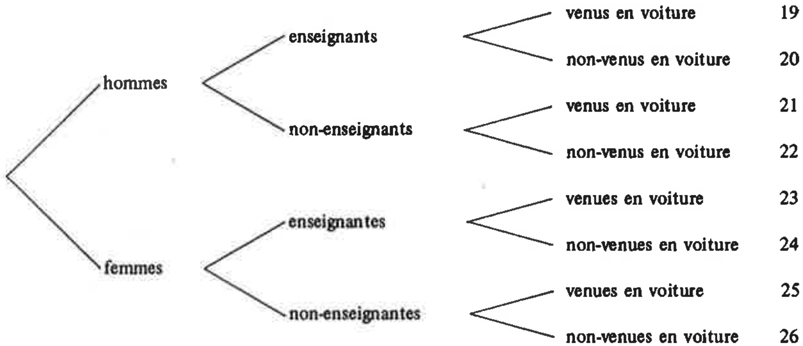
1) des hommes
2) des femmes,
3) des enseignants,
4) des non-enseignants,
5) des personnes venues en voiture,
6) des personnes non-venues en voiture,

7) des hommes enseignants,
8) des hommes non-enseignants,
9) des femmes enseignantes,
10) des femmes non-enseignantes,
11) des hommes venus en voiture,
12) des hommes non-venus en voiture,
13) des femmes venues en voiture,
14) des femmes non-venues en voiture,
15) des enseignants venus en voiture,
16) des enseignants non-venus en voiture,
17) des non-enseignants venus en voiture,
18) des non-enseignants non-venus en voiture,

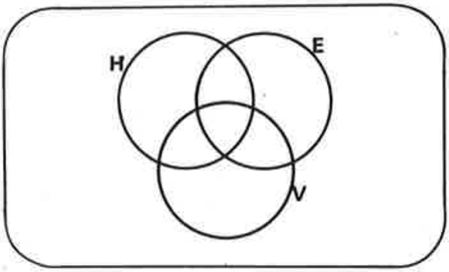
19) des hommes enseignants venus en voiture,
20) des hommes enseignants non-venus en voiture,
21) des hommes non-enseignants venus en voiture,
22) des hommes non-enseignants non-venus en voiture,
23) des femmes enseignantes venues en voiture,
24) des femmes enseignantes non-venues en voiture,
25) des femmes non-enseignantes venues en voiture,
26) des femmes non-enseignantes non-venues en voiture,

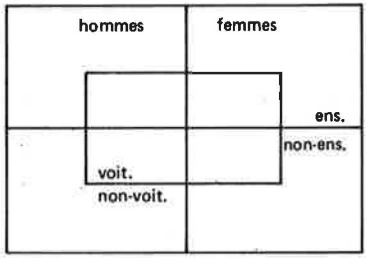
et il y en a encore beaucoup d'autres.

Occupons-nous particulièrement des huit dernières (19 à 26). Un schéma arborescent permet de les obtenir aisément.



Voici encore deux autres schémas (ou diagrammes):





H : ensemble des hommes
E : ensemble des enseignants et enseignantes
V : ensemble des personnes venues en voiture

N° 23* C.

	E	F
a	1	1
b	0	0
c	1	1
d	0	1
e	0	1
f	0	0
g	0	1

	E	F
h	0	0
i	1	1
j	1	1
k	0	0
l	0	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.

On ne rencontre jamais 1 0 , car il n'y a pas dans E d'élément n'appartenant pas à F .

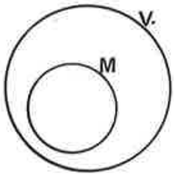
Autrement dit: si un élément appartient à E , il appartient aussi à F .

On a $E \subset F$.

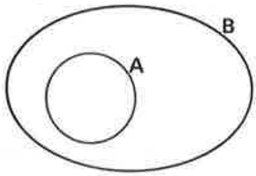
N° 24* C.

$A \subset A$				
$B \subset A$	$B \subset B$			
$C \subset A$		$C \subset C$		
$D \subset A$	$D \subset B$	$D \subset C$	$D \subset D$	
$E \subset A$		$E \subset C$		$E \subset E$

N° 25* C.



N° 26* C.

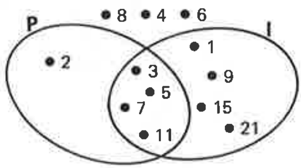


N° 27* C.

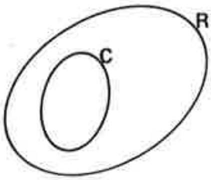
"Tout nombre premier est impair" est faux, car il existe un nombre premier qui n'est pas impair; c'est 2.

Pour qu'on ait : $P \subset I$,

il faudrait qu'il n'y ait aucun nombre appartenant à P sans appartenir à I .



N° 28* C.



N° 29* C.

A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

B = { 6, 7, 8, 9 }

C = { 1, 2, 4, 5, 10, 20 }

D = { 22, 24, 26, 28 }

E = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 }

F = { 2, 4, 6, 8, 10, ... }

G = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, ... }

Pour F et G , le nombre d'éléments notés est affaire d'appréciation personnelle.

6 – EXEMPLES TIRES DE LA PRATIQUE SCOLAIRE

Ces exemples doivent donner aux participants du cours une première idée de la manière dont les notions étudiées se présentent à l'école. Ils ne sont rien de plus qu'une illustration et ne doivent en aucun cas être considérés comme l'ébauche d'une méthodologie.

* * *

Pour constituer des ensembles, on peut prendre :

- les enfants de la classe,
- le matériel de précalcul,
- les "blocs logiques" de Dienes,
- des collections de vignettes représentant des animaux, des objets divers, etc,
- des mots de lecture notés sur de petites cartes,

  etc.

Pour figurer des diagrammes, on peut utiliser, suivant les cas,

- des cordes,
- des "cercles" dessinés à même le sol de la classe, de la salle de gymnastique, du préau, ...
- des barrières du préau ou de champs avoisinants,
- des boucles de cordonnet, de fil électrique,
- des disques d'acétate coloré,
- des cerceaux,
- des "cercles" dessinés sur un vieux tableau noir posé horizontal sur des tréteaux ou sur une table,
- des cartons ouverts placés côte à côte, figurant un diagramme de Carroll,

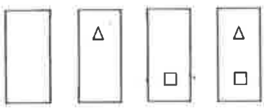
  etc.

* * *

Une simple question posée à la classe, si elle exige une réponse par oui ou par non (par exemple : "qui a terminé ?"), a pour effet de distinguer un sous-ensemble de la classe (dans cet exemple : l'ensemble des élèves ayant terminé).

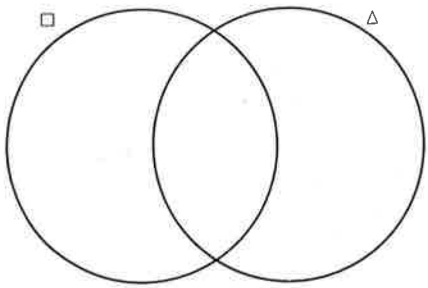
* * *

Le jeu des laisser-passer. On dessine sur le sol 1, 2 ou 3 cercles, ayant chacun un signe distinctif (ici : □ et △). Le maître dispose de cartes qu'il distribue aux élèves. (Ici, quatre sortes de cartes :



)

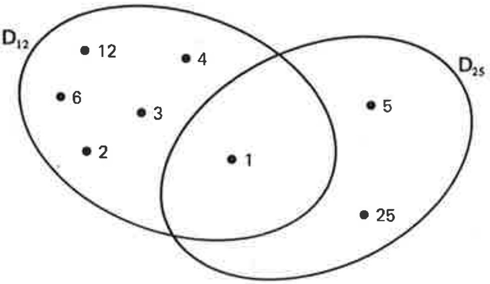
Les élèves doivent aller se placer à l'intérieur de tous les cercles à la fois dont ils ont le signe distinctif sur leur carte.

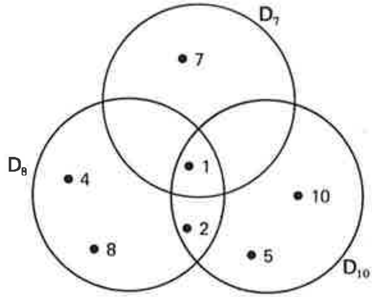


* * *

Cas des nombres premiers entre eux : l'intersection de leurs ensembles de diviseurs est le singleton $\{1\}$.

D_{12} : ensemble des diviseurs de 12, etc.

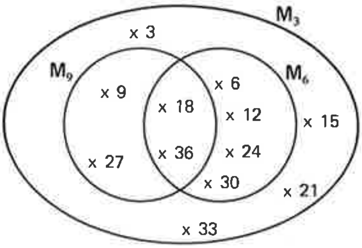


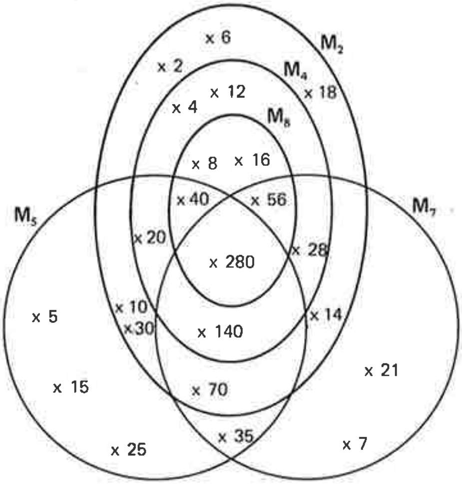


Etude des multiples communs de plusieurs nombres, dans $\mathbb{N}^*$.

M_3 : ensemble des multiples de 3,

M_9 : ensemble des multiples de 9, etc.

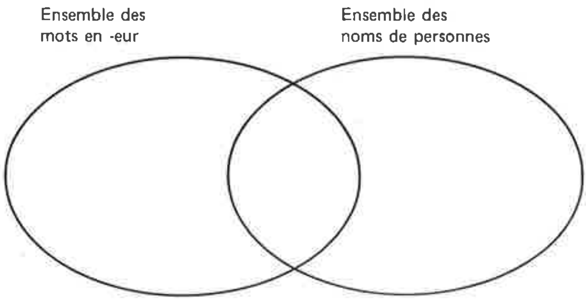




* * *

Mots à classer :

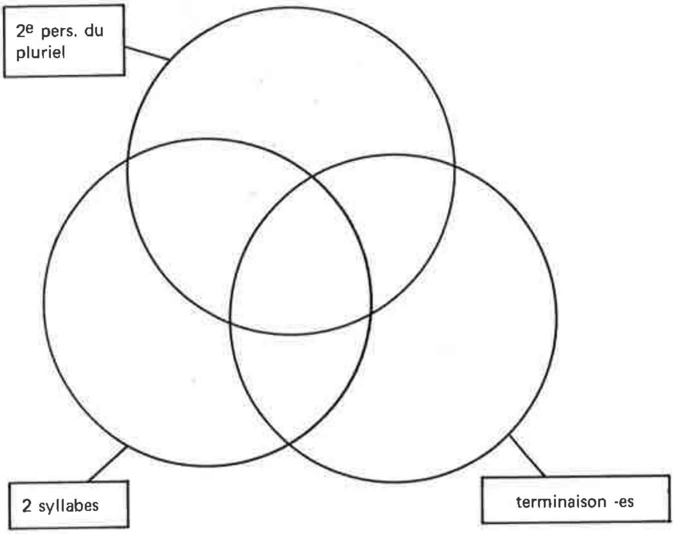
le docteur – la couleur –
l'enfant – le moteur –
le mécanicien – la peur –
le ramoneur – la vapeur –
la maîtresse – le coureur –
le dentiste – le chauffeur –
le tracteur – le paysan.



* * *

Conjuguaison : revision du présent.

Conjugue les verbes au présent puis place-les au bon endroit.



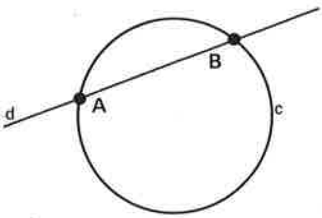
Tu (sauter)
Il (finir)
Nous (obéir)
Vous (dire)
Nous (manger)
Elles (gambader)
Vous (écouter)
On (s'amuser)
Elle (bondir)
Vous (respirer)
Je (attacher)
Vous (dîner)
Tu (terminer)

* * *

En géométrie plane, lorsqu'on admet que le plan est un ensemble de points et que les figures géométriques sont des parties du plan, on obtient des choses comme celles-ci.

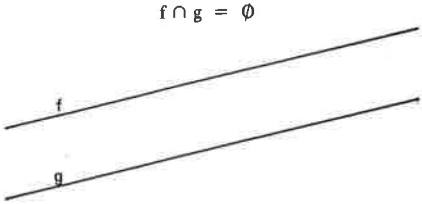
L'intersection de la droite d et du cercle c est $\{A\ ,\ B\}$.

$$d \cap c = \{A, B\}$$



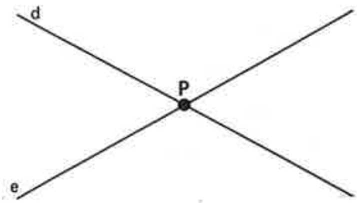
Cas de deux droites f et g parallèles :

$$f \cap g = \emptyset$$

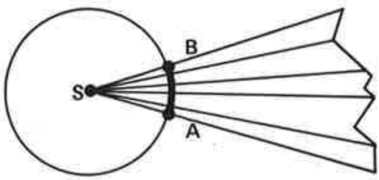


L'intersection des droites d et e est un ensemble à un seul élément.

$$d \cap e = \{P\}$$



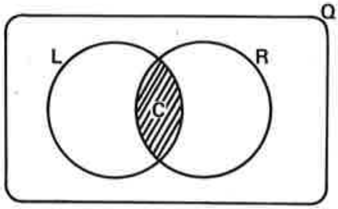
La réunion de toutes les demi-droites issues de S et coupant l'arc de cercle AB est un angle.



Dans l'ensemble Q des quadrilatères plans:

L : ensemble des losanges,
R : ensemble des rectangles,
C : ensemble des carrés,

$$L \cap R = C.$$



* * *

Notion de variable.

En classe, on se donne une propriété telle que: x est allé(e) skier hier.

A tour de rôle, chaque élève énonce la phrase obtenue en y remplaçant x par son nom. Puis il dit si cette phrase est vraie ou fausse.

> "Pierre est allé skier hier, c'est vrai."
> "Antoinette est allée skier hier, c'est faux." Etc.

Finalement ceux qui ont dit "c'est vrai" doivent lever la main, et l'on voit quel est l'ensemble:

$$_{\text{classe}}\{x \mid x \text{ est allé(e) skier hier}\}.$$

* * *

Toute *équation* ou *inéquation* est en fait une propriété, et les "inconnues" sont des variables.

Exemples:

Propriété:	$x = x^2$ ("être égal à son carré ")
Ensemble des solutions:	$_{\mathbf{R}}\{x \mid x = x^2\} = \{0; 1\}$
Propriété:	$3x - 5 = x + 8$
Ensemble des solutions:	$_{\mathbf{R}}\{x \mid 3x - 5 = x + 8\} = \{6\frac{1}{2}\}$
Propriété:	$x^2 + 1 = 0$
Ensemble des solutions:	$_{\mathbf{R}}\{x \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

La résolution d'équations dont le degré est supérieur à 1 se fonde souvent sur la notion de réunion.

Exemple :

propriété :	$x^2 - 5x + 6 = 0$
qui est équivalente à :	$(x-2)(x-3) = 0.$

Ensemble des solutions :

$$_{\mathbf{R}}\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = {}_{\mathbf{R}}\{x \mid (x-2)(x-3) = 0\}$$

$$= {}_{\mathbf{R}}\{x \mid x - 2 = 0\} \cup {}_{\mathbf{R}}\{x \mid x - 3 = 0\} = \{2\} \cup \{3\} = \{2; 3\}.$$

Pourquoi cette révolution?

L'enseignement des mathématiques n'est qu'une partie de l'enseignement général et la première question est de savoir quel est le but de l'enseignement.

Un des moteurs importants de l'évolution des sociétés humaines est la transmission des connaissances de génération à génération, grâce à quoi chaque génération peut profiter du travail de celles qui l'ont précédée. La transmission des connaissances de génération à génération joue pour l'humanité au cours de son histoire le rôle que joue la mémoire pour l'individu.

Assurer cette transmission est le premier rôle de l'enseignement. Mais cela reste encore bien vague:

Faut-il tout transmettre?
Faut-il faire un choix?
Comment faut-il transmettre?

Avant de répondre, il faut encore remarquer que la transmission des connaissances ne se fait que rarement comme celle d'un bien immuable: en général, chaque génération apporte sa contribution en nouvelles connaissances qui s'ajoutent à ce qui était déjà connu ou qui le modifient. L'apport est quelquefois faible, mais les civilisations où il est demeuré longtemps nul ont périclité ou n'ont pas résisté au choc d'autres civilisations.

Notre époque est au contraire caractérisée par un accroissement extraordinairement rapide. Il ne paraît pas exagéré de dire que le XXe siècle a déjà apporté à lui seul plus que tous les siècles précédents réunis. Si le progrès scientifique ne consistait qu'en un simple accroissement de connaissances, il poserait à l'enseignement un problème insoluble et il s'étoufferait lui-même.

En réalité, ce progrès n'est possible que s'il procède tout autant qu'à un accroissement de connaissances à une restructuration et à une simplification des connaissances anciennes:

Le progrès, et c'est particulièrement net en mathématiques, consiste souvent à savoir faire facilement ce que nos prédécesseurs ne savaient faire que difficilement.

Un enseignement qui se contente de donner des recettes manque à sa tâche, et c'est un fait frappant et inquiétant que parmi les nations du XXe siècle, ce soient les moins évoluées dont l'enseignement soit le plus fondé sur des recettes.

Dans ces conditions, on peut commencer à répondre aux questions: que faut-il enseigner et comment faut-il l'enseigner? Devant l'accroissement formidable des connaissances, il est clair qu'il est impossible de tout enseigner, mais cette remarque peut conduire à des décisions catastrophiques:

a) Celle de renforcer la spécialisation à un point tel que le dialogue entre spécialistes devienne très difficile, sinon impossible. Il y a là un danger de stérilisation. C'est pour le combattre que nombre d'esprits sont favorables à ce qu'on appelle la pluridisciplinarité.

b) Celle de réserver à une élite la formation véritable et de se contenter de recettes à courte portée pour le plus grand nombre, à qui l'on enlèvera ainsi toute possibilité de dominer le monde qui les environnera et leur donnera pratiquement un *statut d'esclave.*

Ce danger peut être mortel pour la société.

La solution qui prépare l'avenir est au contraire celle qui vise à faire de nos enfants des esprits libres et responsables.

On est donc amené à donner à l'enseignement des mathématiques les objectifs suivants:

a) *Mettre l'accent sur les idées simples* et fécondes que l'humanité a progressivement dégagées au cours de son histoire, et ne pas s'attarder à des façons de penser maladroites, et de peu de portée. C'est en cela que consiste l'introduction de ce qu'on appelle les mathématiques modernes. Le mot «moderne» est assez malheureux, car il oublie que certaines idées de ces mathématiques ont près de deux siècles d'existence, et il fait croire que l'on rejette en bloc toutes les mathématiques classiques, alors qu'en fait elles y sont entièrement intégrées.

b) *Donner la priorité à l'activité de l'esprit.* Avant d'apprendre un résultat mathématique, il faut se comprendre, mieux il faut l'avoir désiré.

Il faut s'être posé la question à laquelle il répond.

La clé de l'enseignement mathématique est le recours de plus en plus large aux méthodes actives. Cela ne signifie pas que le rôle de la mémoire soit négligé, bien au contraire, mais que le travail de la mémoire aura été préparé et facilité par une réflexion préalable.

Cela ne signifie pas non plus que le rôle des calculs, indispensables en mathématiques, sera négligé: mais, à quoi sert-il de faire un calcul comme un automate si l'on ignore et le sens du calcul et celui de son résultat? Bien raisonner et bien calculer sont des activités très proches.

C'est l'utilisation des méthodes actives qui répondra le mieux au mot d'ordre «apprendre à apprendre».

c) *Choisir parmi les notions mathématiques celles dont la portée est la plus grande.* Les idées et les méthodes mathématiques pénètrent un nombre sans cesse croissant de domaines. Il y a donc lieu de présenter à tous les idées simples et fondamentales et de montrer comment elles interviennent dans les situations concrètes les plus variées.

L'enseignement se doit de montrer les *idées mathématiques en action* et de montrer aussi comment on procède à la *mathématisation d'une situation concrète.*

Les trois directives précédentes sont plus faciles à énoncer qu'à mettre en œuvre. Il n'y a pas de baguette magique qui permette de modifier en un jour et nous ne sommes qu'au début d'un très long effort.

Ce n'est que par un travail patient et persévérant que l'on arrivera à donner à l'enseignement des mathématiques, et au-delà à tout l'enseignement, la possibilité de jouer pleinement son rôle dans la société contemporaine.

L'effort ne doit pas être seulement celui des professeurs qui, réunis dans l'Association des professeurs de mathématiques, ont montré leur lucidité et leur enthousiasme. Il doit être aussi celui des Pouvoirs publics qui ont montré qu'ils étaient sensibles à l'importance du problème en créant successivement un certain nombre d'instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, mais qui doivent poursuivre leur action, soutenus par les parents d'élèves et l'opinion générale.

André Revuz
Professeur
Directeur de la Recherche
pour l'enseignement des mathématiques
à Paris

Extrait de «Paris-Match», No 1087, du 7 mars 1970.

ASSOCIATION CUISENAIRE BELGIQUE

Nous avons le plaisir de porter à votre connaissance que l'Association Cuisenaire-Belgique organise **les 1er, 2, 3 et 4 juillet 1970** dans les locaux de l'Ecole normale de l'Etat à Couvin, et à l'intention des maîtres du Primaire, des journées d'études consacrées à l'expérience de Waterloo d'un enseignement nouveau de la mathématique au premier degré.

Les inscriptions doivent parvenir à **M. Jacques Dutrieux, rue de la Station 5, 1410 Waterloo, tél. 02/54 94 96.**

Thème des journées d'études: LES OPERATIONS ET LES GROUPES.

Comité de rédaction:	**Abonnement:**
Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, G. Guélat, R. Hutin, L. Pauli, N. Savary, S. Roller, rédacteur.	Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 12 - 16713. Paraît 5 fois par an. Service de la recherche pédagogique, 65, rue de Lausanne, 1202 Genève (022 31 71 57).