MATH ECOLE

MAI
1971
10e ANNÉE

48

La problématique du problème

par Roger Sauthier

A l'heure où la mathématique enseignée à l'école primaire subit une profonde mutation, de nombreuses questions se posent à l'enseignant confronté avec la réalité quotidienne. Parmi les domaines qui suscitent le plus de controverses, le problème d'arithmétique occupe une place de choix.

Essayer d'apporter quelques éléments de réflexion sur le renouvellement du problème d'arithmétique, tel est l'objet des lignes qui suivent.

1. QU'ENTEND-ON PAR PROBLEME?

Une réponse à cette question nous est apportée par un dictionnaire: «Un PROBLEME, c'est toute QUESTION où l'on indique le RESULTAT qu'on veut obtenir, et où l'on demande les MOYENS d'y parvenir.»

A cette définition quelque peu abstraite, les «commentaires du programme de mathématique de l'enseignement élémentaire français»[1] apportent un complément intéressant:

«Il y a PROBLEME si, connaissant un certain nombre d'INFORMATIONS concernant une situation, on se propose de déduire de ces informations des RENSEIGNEMENTS non explicités initialement.»

Des remarques de caractère général se dégagent de cette première approche:

— *Le problème est partout. La classe avec sa vie propre, les situations auxquelles nous sommes confrontés quotidiennement relèvent du problème.*

— *Jusqu'à ce jour la notion de problème à l'école primaire était obligatoirement liée à l'idée de nombre: les seules situations dignes de figurer dans nos ouvrages d'arithmétique étaient celles faisant appel aux opérations sur les cardinaux.*
On a délibérément exclu les situations ne faisant pas appel au calcul numérique.

— *Le problème n'est pas exclusivement numérique:*
Chacun doit par exemple s'organiser aussi bien dans son travail que dans ses loisirs et une telle activité relève du problème.

Exemple:[2]

A partir de l'information suivante:

Une ménagère doit aller à la boulangerie, à la boucherie, et dans l'une des deux épiceries de son quartier; quels renseignements seraient utiles? On peut se demander quelle épicerie choisir, dans quel ordre faire les achats. La réponse à ces questions exige, d'une part, un inventaire rapide des diverses possibilités afin de trouver l'ordre le plus favorable et, d'autre part, la prise de conscience des critères qui peuvent guider le choix: longueur des chemins, charges à transporter (bouteilles à rendre, emplettes), approvisionnement des magasins, heures d'ouverture ou de cohue...

Cette situation n'exige aucun calcul; elle met en jeu les notions de dénombrement, de classement, d'ordre, de topologie, d'analyse combinatoire. La phase essentielle de la résolution d'un tel problème réside dans la réflexion — la pratique le prouve! Il est inutile d'élaborer une solution écrite.

La situation du facteur qui organise sa tournée, celle du sommelier qui doit décider, lors d'un afflux de clients, s'il veut prendre les commandes de plusieurs tables à la fois, comment il doit grouper les consommations qu'il apporte, quel chemin choisir entre les tables, sont analogues à la situation de la ménagère.

Certains s'étonneront peut-être que de telles situations puissent faire l'objet d'un problème: de tout temps l'homme a été confronté à de telles difficultés, de tout temps il les a surmontées sans que pour autant l'école y ait fait allusion. Mais l'objectif de l'école n'est-il pas de préparer à la vie, de remédier à certaines lacunes même si celles-ci n'ont pas eu jusqu'ici de conséquences fâcheuses?

Les situations exigeant des décisions rapides et rationnelles deviennent de plus en plus complexes et nombreuses: qu'on pense simplement aux problèmes posés par la circulation dans une ville, domaine où chacun est concerné.

— *L'école se doit de proposer à l'enfant des situations proches de ses préoccupations. Celles-ci peuvent d'ailleurs, présenter une analogie étonnante avec celles de l'adulte.*

Exemple:

Quels moyens de transport utilisent-ils?

Pierre, Hermann, Jean, Véronique et Dorothée sont dans la même classe.

Voici comment ils sont venus à l'école le 10 mars 1971. Pierre a été conduit en voiture par son père jusqu'à la gare de Sierre, puis il a pris le train et a marché de la gare de Sion jusqu'à l'école.

Hermann habite à un quart d'heure à pied de la gare de Chamoson; il a pris le train et est descendu à Sion où le père de Jean l'a pris en voiture et déposé devant l'école.

Jean habite Châteauneuf, son père le conduit tous les matins à l'école: Jean devra faire du sport car il n'a jamais l'occasion ainsi de faire de la marche à pied.

Véronique ne prend jamais de moyens de transports, elle habite à 5 minutes à pied de l'école.

Dorothée qui habite Bramois vient tous les jours en autobus. L'arrêt est à 300 mètres de l'école.

Ce texte fournit des informations. Celles-ci apparaissent embrouillées. Afin d'en tirer parti, il faut les organiser, les décanter.

On le fera, par exemple, au moyen du tableau suivant:

a utilisé, le 10 mars 1971	Pierre	Hermann	Jean	Véronique	Dorothée
l'autobus					×
la voiture	×	×	×		
le train	×	×			
la marche à pieds	×	×		×	×

— *La mathématique est une langue dans laquelle s'exprime la réalité.*

— *Le problème n'est pas un contrôle d'acquisition de concepts. D'une part, il y a des situations faisant problème; d'autre part, il y a des concepts qui sont des outils permettant de dégager des renseignements non explicités.*

Par exemple, l'introduction de la proportionnalité[3] est préalable à l'étude de toute situation faisant intervenir la «règle de trois».

L'acquisition des concepts nécessite un entraînement sérieux: afin d'obtenir des résultats sur le plan technique, il faudra multiplier les exemples, les **exercices.** Par contre, le **problème** étant en fait aboutissement, sa résolution fera appel aux techniques acquises par les exercices.

D'autre part, il faudra éviter que les problèmes deviennent routine et perdent ainsi leur valeur: que penser par exemple d'une répétition lassante des situations analogues que nos livres d'arithmétique proposent; la ressemblance des situations amène rapidement la création d'automatismes et conduit, à plus ou moins longue échéance, à l'application de «règles», de trucs. On réalise ainsi un dressage qui fait croire à la compréhension; **aucun dressage n'est porteur de valeur intellectuelle ou mathématique!**

Dans la suite de cette étude nous nous bornerons aux problèmes numérisques, car c'est dans un domaine que l'on croit exploré à fond depuis si longtemps qu'il est le plus difficile de se renouveler.

2. LE PROBLEME NUMERIQUE A L'ECOLE PRIMAIRE

> «Les thèmes de problèmes seront des plus divers. Ils permettront en particulier une certaine initiation des élèves à la vie courante de leur époque, que l'enseignement élémentaire se doit de leur donner. Toutefois, les situations retenues dans ce domaine correspondront aux préoccupations et aux intérêts des enfants.»[1]

Mais alors que penser des problèmes dits «raisonnés» qui foisonnent dans nos livres d'arithmétique et qui ne déclenchent chez l'enfant qu'antipathie et désintéressement.

Certes, il est facile de critiquer ce qui existe, mais comment du point de vue méthodologique renouveler la découverte du problème?

A ce propos laissons la parole à une pédagogue émérite, Madeleine Goutard[4]:

> «Dans les problèmes, il est toujours question de billes, ou de bonbons à partager, de crayons à acheter... ou bien d'intérêts à calculer ou de cuves à remplir, selon l'âge des enfants auxquels ils s'adressent. Ces problèmes reflètent la mentalité de l'adulte qui essaie soit d'imaginer les intérêts propres des enfants soit de leur faire partager les siens. Ces problèmes pour enfants n'ont en fait rien d'enfantin...
>
> Chaque fois que l'enfant se révèle d'une manière authentique, il témoigne de bien plus de profondeur et de vraie candeur.
>
> Ne pourrait-on pas sortir de ces problèmes si éternellement fades, ennuyeux et terre à terre, en suscitant l'éclosion de problèmes spécifiquement enfantins, c'est-à-dire *composés par des enfants* et témoignant de leur mentalité propre.
>
> Ce n'est pas toujours facile et le danger, ici comme ailleurs, est une intervention prématurée et inopportune de l'adulte qui apporte un modèle. Les enfants ne font que le copier et les résultats sont d'une banalité navrante: tous les problèmes se ressemblent. Il faut savoir susciter sans montrer, faire surgir sans indiquer la voie. Une volonté trop impérieuse ou simplement un peu trop de précipitation peuvent être nuisibles. Il faut savoir attendre, reconnaître et apprécier les créations enfantines: elles ne manqueront pas de venir s'il leur est fait un climat propice; elles auront un cachet qui les rend inimitables; elles seront la marque d'un esprit inspiré qui trouve aliment en soi et dans ses relations multiples avec le monde...
>
> Lorsqu'il n'imite pas un modèle proposé par l'adulte, c'est son propre univers que l'enfant introduit dans ses problèmes.»

En mathématique, comme dans tout autre domaine, l'école doit développer les facultés créatrices et imaginatives de l'enfant: la découverte du problème sera un terrain de prédilection pour atteindre un tel objectif.
Certes, cette découverte n'ira pas sans engendrer des essais maladroits, sans amener des résultats souvent décevants. N'oublions toutefois pas que rien ne remplace l'expérience personnelle avec les errements et les déconvenues que cela implique.

Cependant, il faut souligner le rôle essentiel que l'école joue dans cette phase. Le problème ne surgira que si l'école procure à l'enfant un climat propice à la créativité et une atmosphère où l'éclosion pourra avoir lieu: la

liberté laissée à l'enfant ne sera profitable que si l'action éducatrice est sous-jacente: le maître doit savoir créer des situations qui feront surgir le problème.

Certes, une fois l'élan pris et la richesse d'inspiration venue, les thèmes des problèmes dépasseront le cadre de l'école et seront le reflet des préoccupations et des intérêts des enfants.

Au départ, néanmoins, le problème s'identifie à un **jeu;** il met en scène le monde imaginaire de l'enfant.

Puis, sa participation à la vie sociale l'amènera petit à petit à s'intéresser à des problèmes qui requièrent une solution en raison d'un **besoin** issu lui-même de l'action (construction de jouets, installations électriques...).

Le type ludique tend à faire découvrir ce que pourrait être un problème; le type pratique favorise davantage la recherche.

Amener l'enfant à voir des problèmes, à en poser, voilà le rôle premier de l'école. Cet objectif atteint, l'attitude de l'enfant face au problème qu'on lui pose sera stimulante: à une passivité trop souvent ressentie lors de résolution de problèmes fera place un enthousiasme et un esprit de recherche étonnants. La discussion que suscitera chaque situation sera fructueuse; elle permettra aux enfants de s'assurer dans leurs propres voies.

Chaque fois que les problèmes se réfèrent à une donnée actuelle, à des événements survenus dans la vie scolaire, la vie familiale ou la vie sociale, ce sera le moment de faire naître le souci des références les plus exactes possibles.

Les enfants seront amenés à percevoir que, par exemple, certaines données sont inutiles, que d'autres, manquantes, sont absolument nécessaires; il faut donc se mettre en campagne pour les trouver.

Si des enfants, à qui est proposé le problème suivant:

> Un ouvrier a travaillé les 3/12 de l'année chez un patron et les 7/12 chez un autre. Quelle portion de l'année est-il demeuré chez les deux ensemble?

démontrent par une attitude critique qu'il s'agit d'une énigme insoluble si l'on ne donne pas des précisions supplémentaires, on pourra en déduire qu'ils ont une saine conception de ce qu'est un problème.

En conclusion l'école devrait non pas présenter à l'enfant des situations types dont il n'aura peut-être que faire (il serait prétentieux de prédire quels seront les problèmes pratiques des hommes de demain!) mais elle devrait leur faire acquérir une aptitude à dégager la problématique de situations qui sont celles de leurs expériences d'enfants. Ils agiront de façon analogue face à toute circonstance nouvelle de la vie.

Un tel objectif nécessite qu'on porte une attention particulière à la formulation des informations.

Accueillir d'abord les possibilités créatrices de l'enfant, entreprendre ensuite une action éducatrice et systématique, voilà une ligne de conduite, une attitude à avoir face au problème. Ajoutons à cela les prolongements que suggèrent des situations étudiées et leur exploitation comme centres d'intérêt.

Exemple: Un voyage

La famille Fenouillard passera les vacances de Pentecôte chez des amis à Locarno. Pierre, Jacques et Catherine attendent avec impatience le moment du départ. Sans cesse, ils questionnent leurs parents:

— Est-ce loin? demande Jacques.

Recherche de la distance séparant Sion de Locarno

a) en consultant une carte géographique, en mesurant la distance sur la carte et en traduisant le résultat dans la réalité (problème d'échelles);

b) en se servant d'un horaire CFF détaillé permettant une lecture immédiate des distances.

— Traversera-t-on le tunnel du Simplon? demande Catherine.

Oui. Si, à l'intérieur du tunnel, les lampes qui l'éclairent sont distantes de 100 mètres, combien y en aura-t-il?

Recherche de la longueur du tunnel en consultant un document, discussion relative au nombre d'espace entre les lampes...

— Est-ce que le voyage coûte cher? s'inquiète Pierre.

Calcul du prix du transport sachant que le billet 2e classe Sion-Locarno et retour coûte 37 F par adulte. Pour les enfants dès 6 ans, les CFF accordent une réduction de 50 % sur le billet d'adulte.

— Ne peut-on pas obtenir de réduction pour les voyages en famille? demande Catherine.

Oui. Consultation de prospectus émis par les CFF à ce sujet.

— A quelle heure partirons-nous? demande Jacques.

Etablissement de l'horaire en tenant compte de la rapidité des trains, des changements de trains à effectuer, de l'heure à laquelle leurs amis les attendent.

Remarque: Dans la même ligne, l'obligation faite à une classe, organisée en coopérative scolaire, de prendre en mains toute l'organisation d'une excursion est particulièrement motivante et source de multiples problèmes.

3. LES ETAPES DE RESOLUTION DU PROBLEME

> «Résoudre un problème, c'est analyser la situation et les informations données, dégager éventuellement des chaînes de situations élémentaires, les schématiser afin de mettre en évidence les relations mathématiques qui les décrivent, utiliser ces relations et leurs propriétés pour en déduire les renseignements cherchés.»[1]

Jusqu'ici, nous nous sommes attachés à **l'attitude** que l'enfant devrait avoir face au problème. Cette prise de conscience étant réalisée, la mise en ordre des données peut commencer.

Il s'agit maintenant de donner aux enfants une **méthode de travail** aussi générale que possible pour aborder un problème, pour grouper les informations et ensuite les traiter en fonction de ce qu'on a besoin de trouver.

Etape 1: Elaboration et compréhension de l'énoncé

Nous avons mis l'accent plus haut sur la formulation des problèmes: l'école doit d'abord inciter l'enfant à imaginer des problèmes avant d'exiger de lui l'adresse nécessaire en face de situations que l'adulte lui soumet.

La compréhension d'une situation sera considérée comme acquise lorsque au terme d'un échange, d'une discussion, on aura pu dresser d'une part l'inventaire des données, d'autre part la liste des connaissances utiles pour mener à bien l'étude commencée.

Dans cette phase très importante, on sera peut-être amené à critiquer les données:

— données inutiles (voir l'exemple «moyens de transports»);
— données incomplètes exigeant une enquête, une consultation de documents (voir l'exemple «un voyage»).

Etape 2: Schématisation de la situation, organisation des données

Cette étape, qui en réalité est souvent menée de front avec la précédente, consiste à «fabriquer» un **modèle** adéquat, un **schéma,** permettant de dégager et d'organiser le contenu de l'énoncé.

Les enfants ayant appris, par exemple, à représenter des ensembles par des diagrammes, savent utiliser de tels schémas pour fixer de nombreuses situations qui leur sont soumises.

Avec beaucoup de logique ils traduiront graphiquement les données, prendront conscience qu'il s'agit là d'une symbolisation, d'un support pour aborder la mathématisation proprement dite.

Des ensembles étant représentés, les indications numériques apparaîtront comme étiquettes de ces ensembles, c'est-à-dire comme leur propriété numérique. Ces étiquettes numériques seront dépouillées des unités de mesure associées aux nombres: la mesure ne peut faire l'objet d'une représentation connue du tout jeune écolier. Peu à peu, la schématisation se fera plus condensée, et dans bien des situations se réduira à la traduction des données dans un tableau.

Faire un schéma conduit à l'analyse, dans le détail, de la situation décrite par le texte. Il est donc évident que le schéma doit précéder la résolution du problème. Il peut consolider la compréhension de l'énoncé et sert de «pont» entre la réalité décrite et les concepts mathématiques qui serviront à l'élucider.

Un danger guette cependant enseignants et enfants: nous voulons parler des schémas-types; il est paralysant, pour l'imagination, de forcer par exemple tout problème à se traduire en diagramme de Venn!

Par contre la découverte par l'enfant de schémas différents pour représenter une même situation sera bénéfique. On évitera ainsi, que tout schéma se dégrade en stéréotype. D'autre part l'enfant prenant conscience que plusieurs situations peuvent être représentées par un schéma de même type classera et comparera les situations plus aisément.

Etape 3: Des schémas aux opérations

Grâce au modèle, il sera plus facile de saisir les relations existant entre les données.

Les enfants ayant appris à représenter des ensembles seront à même d'associer à la réunion d'ensembles disjoints l'addition de leurs cardinaux. Ils ont découvert la multiplication à partir de la réunion d'ensembles disjoints de même cardinal et du produit cartésien d'ensembles.

D'autre part, ils se seront familiarisés avec les machines à additionner et à soustraire et auront découvert leur interdépendance. Il en sera de même pour les machines à multiplier et à diviser.

Enfin, au degré moyen, la découverte de la proportionnalité sera d'une puissance inespérée pour bien des situations.

S'il faut classer les problèmes, on le fera, non pas selon leur contenu concret, mais d'après les moyens techniques auxquels ils font appel; il est inutile de faire résoudre une multitude de problèmes identiques sur le plan mathématique, ne variant que par les données numériques et l'expression verbale qui le présente.

Etape 4: Mise en équation et résolution

Il s'agit ici de l'application des techniques de calcul à la réalité. Que penser alors de procédés nullement mathématiques qu'on fait utiliser aux enfants — «règle» des mélanges —, et d'un vocabulaire trop rigide — «règle de trois» — voire erronné — «0,25 fois plus».

Une attention particulière doit être portée à la formulation.

La réunion d'un ensemble de deux ballons et d'un ensemble de six poupées est un ensemble de huit jouets.

Par contre, l'addition, la soustraction... sont des opérations qui portent sur les nombres et non sur les ensembles auxquels sont liés ces nombres.

Ainsi:
on **réunit** des ensembles d'objets
on **additionne** des nombres

C'est par abus de langage qu'on a pu écrire des expressions telles que:

$$2 \text{ ballons} + 6 \text{ poupées} = 8 \text{ jouets}$$

qui n'appartient en fait ni au langage mathématique, ni au langage usuel.

On écrit: le nombre de jouets est 8, résultat qu'on a obtenu en complétant l'équation suivante:

$$6 + 2 = .$$

De plus, l'enseignement du problème d'arithmétique tel qu'il a été conçu jusqu'à ce jour faisait apparaître couramment des notions non abordables par l'enfant.

Ainsi par exemple, au lieu de l'équation:

$$12 \times 4 = 48$$

qui est à la portée de l'enfant de 2e année primaire, on utilisait des équations du type:

$$12 \text{ F} \times 4 = 48 \text{ F}$$

qui font apparaître une **loi de composition externe** qu'on peut introduire avec profit au plus tôt en 5e primaire!

L'enfant ne peut pas pénétrer dans un monde qui lui est mystérieux, ou alors on le contraint à prendre des élucubrations obscures pour du raisonnement, à apprendre des «règles», des «trucs», même s'ils sont en désaccord avec la logique.

Rien d'étonnant si de tels procédés, loin de développer chez l'enfant clarté d'esprit et vigueur du jugement, suscitent chez lui apathie et désintéressement.

Mise en équation et résolution d'un problème, au niveau numérique, sont des fruits que l'on ne cueillera qu'après avoir soigneusement parcouru les étapes précédentes: le renouvellement proposé par la mathématique moderne situe l'enseignement devant l'alternative suivante: ou bien l'enfant dispose de connaissances mathématiques suffisantes pour conduire ses calculs; ou bien ce sera pour l'enseignant l'occasion motivante d'introduire le concept manquant.

Etape 5: Critique des résultats et réponse dans la langue de l'énoncé

En ce qui concerne la façon d'exprimer les résultats numériques, il convient de tenir compte des points suivants:

— évaluation rapide, globale de l'ordre de grandeur et comparaison avec le résultat obtenu par le calcul;

— précision en rapport avec les quantités en présence (on ne peut pas payer 3,224 F pour une marchandise alors qu'on peut peser 5,625 kg de viande).

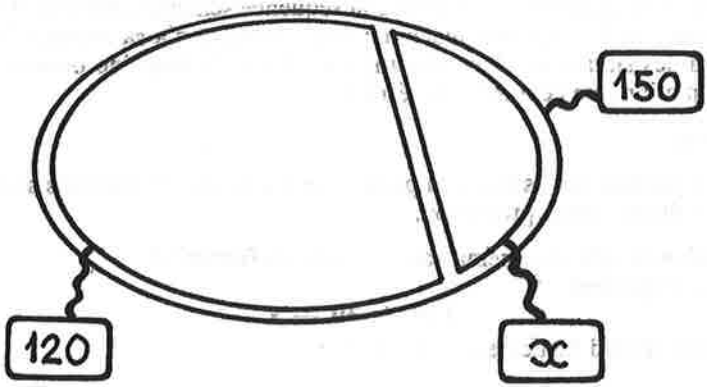
Enfin, on rédigera un bref texte de réponse dans la langue de l'énoncé: l'unité y sera alors mentionnée.

4. EXEMPLES

Une salle de cinéma compte 150 fauteuils. 120 spectateurs ont assisté à la projection d'un film.

Combien de fauteuils sont restés inoccupés?

a) **Schéma résultant de la compréhension de l'énoncé**



b) **Mise en équation et résolution**

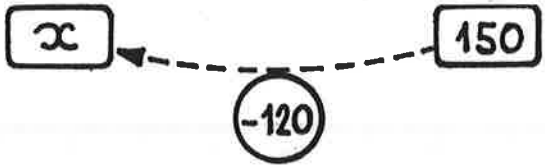
L'équation:

$$x + 120 = 150$$

résulte du schéma.

Sous cette forme elle est difficilement maniable.
Il est utile de la traduire en langage machine:

L'inconnue se trouvant à l'entrée de la machine, on fera appel à la machine inverse:



Elle correspond à l'équation suivante:

$$150 - 120 = x$$
$$x = 30$$

c) **Réponse: 30 fauteuils** sont restés inoccupés.

Remarque:

Si dans tout problème on retrouve la séquence schéma-équation, il n'en est pas de même de la séquence machine: cette dernière n'a sa raison d'être que dans certaines situations: dans l'exemple ci-dessus la machine permet d'obtenir une équation que l'enfant peut résoudre.

Le problème:

120 personnes ont assisté à la projection d'un film. 30 fauteuils sont restés inoccupés durant cette projection.

Combien la salle de cinéma compte-t-elle de fauteuils?
conduit à l'équation:

$$120 + 30 = x$$

que l'enfant résoud facilement sans machine.

Pour qu'un rideau «tombe bien», il faut mettre un anneau tous les 10 cm. Combien maman en utilisera-t-elle pour les 4 rideaux de la salle à manger?

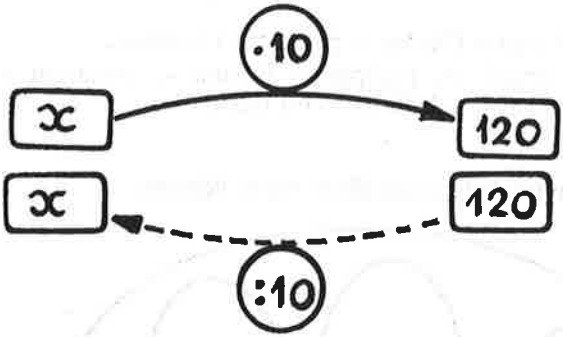
a) **Compréhension de l'énoncé**

Il manque une donnée absolument nécessaire: la largeur des rideaux.
Est-ce que tous les rideaux ont la même largeur? Oui.
Mesure de l'un d'entre eux: 120 cm.
Maman coudra-t-elle un anneau à chaque extrémité du rideau?
Oui, car elle veut qu'il «tombe bien».

b) **Schéma**

c) **Mise en équation et résolution**

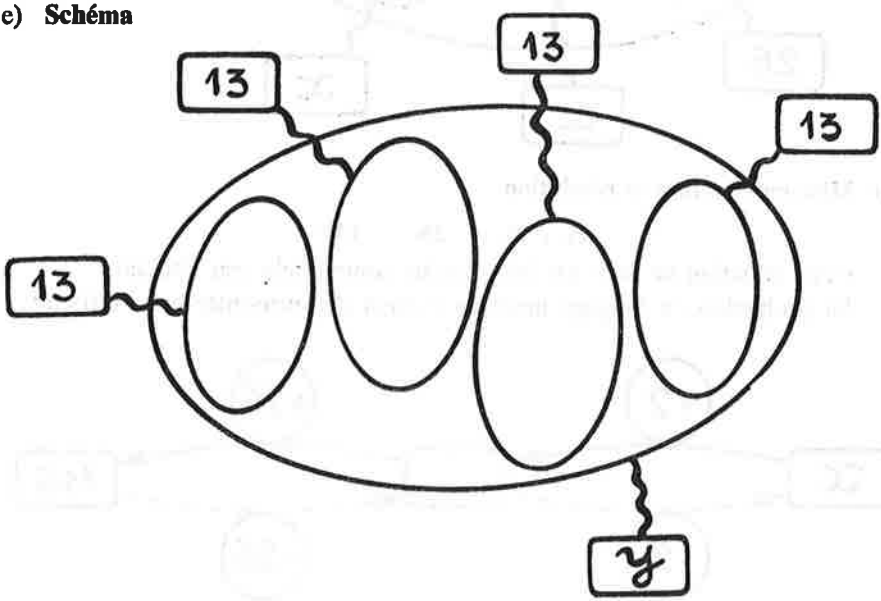
$$x \cdot 10 = 120$$



$$120 : 10 = x$$
$$x = 12$$

d) **Réponse intermédiaire:** Il y a 12 espaces par rideau et un anneau de plus que d'espaces: donc il y a 13 anneaux par rideau.

e) **Schéma**



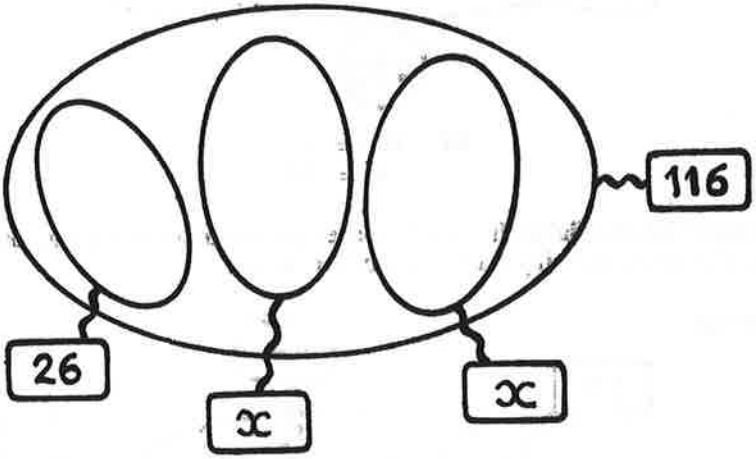
f) **Mise en équation et résolution**

$$13 \cdot 4 = y$$
$$y = 52$$

g) **Réponse:** Maman utilisera **52 anneaux** pour les rideaux de la salle à manger.

Jean, Philippe et Etienne se partagent 116 billes.
Jean en prend 26. Philippe et Etienne se partagent le reste en parts égales. Combien de billes reçoit Etienne?

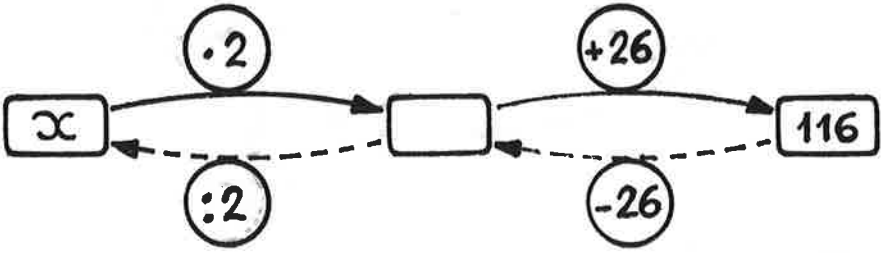
a) **Schéma résultat de la compréhension de l'énoncé**



b) **Mise en équation et résolution**

$$(x \cdot 2) + 26 = 116$$

Cette équation ne peut pas être résolue comme telle par l'enfant.
Sa traduction en langage machine permet de surmonter cette difficulté:



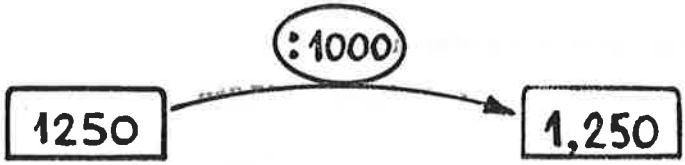
$$(116 - 26) : 2 = x$$
$$90 : 2 = x$$
$$x = 45$$

c) **Réponse:** Etienne reçoit **45 billes.**

Un bidon de miel pèse 17,25 kg; vide, il pèse 1250 g.
Ce miel ayant coûté 121,60 F, calculez:
1) le poids du miel
2) le prix de 5 kg de miel de même qualité.

1) a) **Compréhension de l'énoncé**

L'énoncé donne de façon maladroite les poids.
En effet deux unités sont employées: il faut en choisir une seule, par exemple le kg:



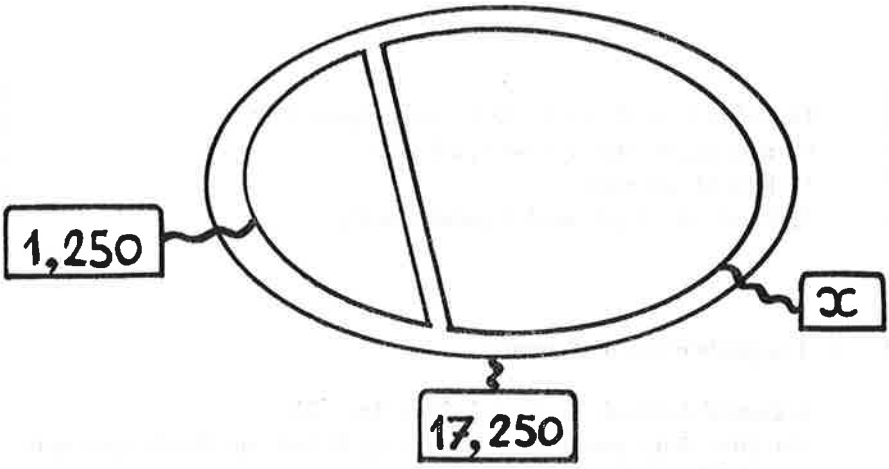
Il est question de kilogrammes; dans une telle situation, il est préférable d'aller trois chiffres après la virgule. L'énoncé donne: 17,25 kg cela signifie que l'on se contente d'une précision, certainement obtenue lors de la pesée, s'arrêtant au dag.

L'écriture 17,25 kg peut aussi bien être la traduction de 17,253 kg arrondi, que celle de 17,250 kg. Dans la suite, on travaillera avec 17,250 kg.

Remarque: Le **kg** est une unité de **masse** et non de poids. Ne pourrait-on pas éviter cette erreur et inculquer à nos enfants la différence entre masse et poids?

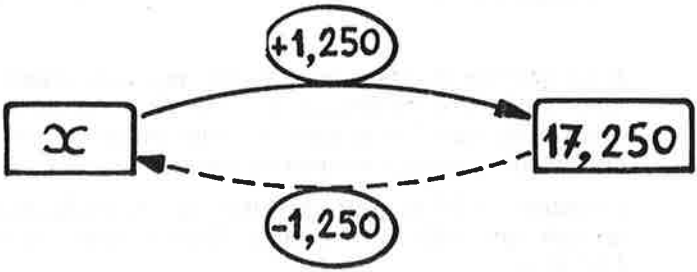
La conquête de la Lune nous offre une illustration intéressante de ces deux concepts:
— La **masse** d'un homme sur la Terre et sur la Lune est la **même.**
— Le **poids** d'un homme sur la Terre est approximativement **six fois plus** grand que sur la Lune.

b) **Schéma**



c) **Mise en équation et résolution**

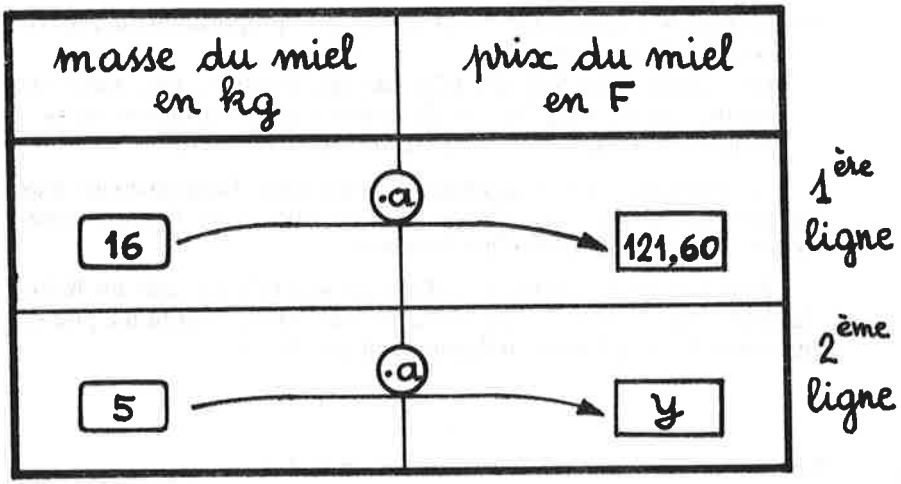
$$x + 1{,}250 = 17{,}250$$



$$17{,}250 - 1{,}250 = x$$
$$x = 16$$

d) **Réponse:** Il y a **16 kg** de miel dans le bidon.

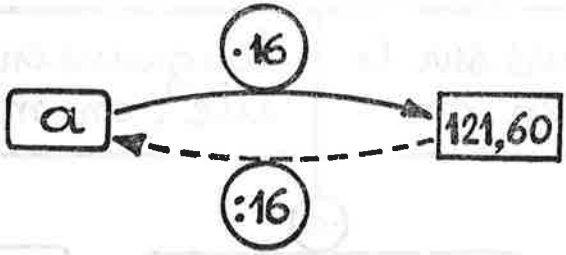
2) a) **Schéma résultant de la compréhension de l'énoncé**
Le **prix** du miel est **proportionnel** à la **masse.**



b) **Mise en équation et résolution**

1re ligne: découverte du facteur de proportionnalité

$$16 \cdot a = 121{,}60$$
$$a \cdot 16 = 121{,}60 \qquad \text{(commutativité de la multiplication)}$$



$$121{,}60 : 16 = a$$
$$a = 7{,}60$$

2e ligne:

$$5 \cdot 7{,}60 = y$$
$$y = 38$$

c) **Réponse:** Pour 5 kg de miel de même qualité on payera **38 F.**

Remarques: Dans l'optique traditionnelle — règle de trois — les étapes mathématiques étaient masquées par une verbalisation mécanique et souvent touffue, conduisant à l'équation globale:

$$y = \frac{121{,}60 \cdot 5}{16}$$

— La notion d'application linéaire, clé de la proportionnalité, apparaît dans le tableau.
— Les calculs sont toujours faits sur des nombres. Les unités de mesure apparaissent en tête de colonne et se retrouvent au moment de la traduction du résultat sur le plan concret.

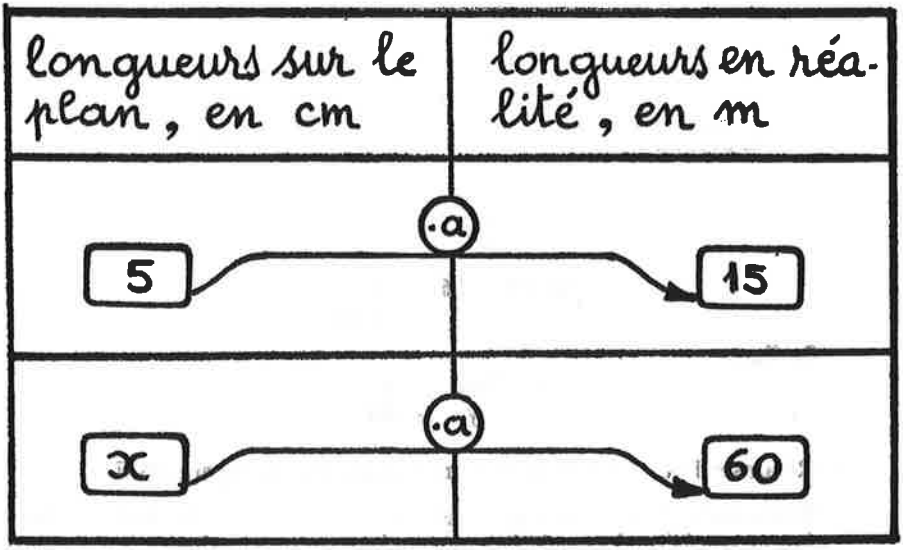
Le problème précédent aurait pu être posé d'une manière plus dynamique, exigeant une discussion pour trouver les données manquantes, voire l'utilisation d'une balance:

Paul Fauchère, apiculteur à Evolène m'a fait parvenir un bidon de miel et une facture de 121,60 F. Un ami, André Martin me prie de lui en vendre 5 kg. Combien demanderai-je à André?

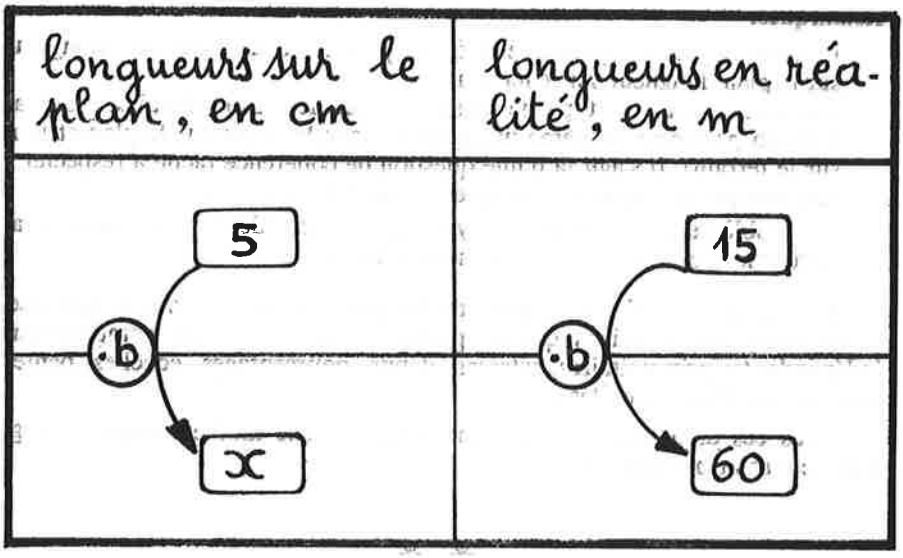
5 cm sur un plan représentent 15 mètres en réalité.
Par quelle longueur faut-il représenter sur ce plan 60 mètres?

Schémas résultant de la compréhension de l'énoncé

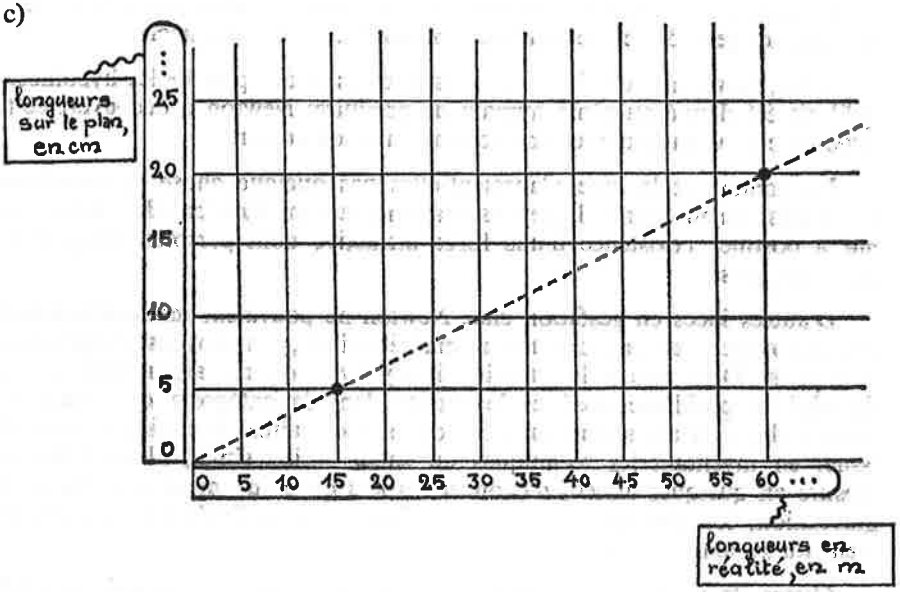
a) La **longueur sur le plan** est **proportionnelle** à la **longueur en réalité.**



b) Le **rapport** d'une longueur en réalité à celle d'une autre longueur en réalité est équivalent au **rappport** de sa longueur sur le plan à celle de l'autre longueur sur le plan.



c)



Cette dernière représentation est plus une illustration des schémas a) et b) qu'une façon nouvelle de schématiser la situation. D'autre part, elle permet des prolongements immédiats intéressants.

Remarques:

— Le choix des unités peut être différent pour les deux longueurs (longueur sur le plan, longueur sur le terrain).
Par contre pour un type de mesure, il est nécessaire d'utiliser tout au long du problème la même unité, (par exemple le cm sur le plan et le m sur le terrain). Il s'agit là d'une question de cohérence facile à respecter si l'on indique au sommet de chaque colonne l'unité choisie.

— Ce problème étant du même type que le précédent, nous laissons au lecteur le soin de mener à terme sa résolution.

Les situations qui font apparaître la proportionnalité sont nombreuses et couvrent des domaines qui au premier abord paraissent complètement indépendants: prix unitaires, vitesses, débits, pourcentages, échelles, pentes, taux, changements d'unités...

Tous ces domaines relèvent d'un même modèle mathématique: il s'agit d'un seul et même problème.

*
* *

L'histoire des sciences nous fournit des exemples intéressants de problèmes que les gens de science ont dû surmonter au cours des siècles.

Ainsi, Newton, bâtit l'une des plus grandes et des plus belles hypothèses qu'il ait été donné au génie humain de produire: Newton a découvert cette hypothèse en voyant tomber une pomme dans son verger.

La pomme et la lune n'auraient-elles pas quelque chose de commun? C'est ainsi qu'au départ d'une observation pourtant bien banale, Newton se mit à postuler l'existence d'une force attractive dont personne jusqu'alors ne s'était avisé.

D'autres idées en gestation chez Newton ne pouvaient malheureusement pas déboucher sur une traduction mathématique, les moyens d'expression manquant. Dans une telle situation il n'y avait qu'une alternative: laisser de côté le problème posé et le ranger dans la catégorie des situations inexplicables ou alors construire les outils nécessaires. Il choisit la seconde issue: en inventant les techniques du calcul infinitésimal, Newton fut en mesure en quelques années d'énoncer les lois du mouvement et celles de la gravitation, lois fondamentales qui expliquent en particulier le fonctionnement du système solaire.

Certes, la situation des enfants face au problème est quelque peu différente. La connaissance, l'intériorisation antérieure des concepts auxquels il devra faire appel facilite son travail; pourtant l'esprit de recherche étant en éveil, on peut entrevoir la richesse et les possibilités qu'offre une conception scientifique du problème.

On pourrait comparer le comportement de l'enfant face au problème à celui de l'homme face au cerveau électronique:

— les étapes 1, 2 et 3 correspondent à l'élaboration du programme

— l'étape 4 au travail fourni par la machine.

Si le programme est bien fait, le travail de la machine sera exécuté sans encombre.

En suivant pas à pas le cheminement tracé dans les lignes précédentes on évitera de se trouver en présence d'enfants qui devant tout problème se jettent littéralement sur les nombres: appliquant des règles, devinant des trucs, essayant des recettes.

Le travail de mathématisation de situations tel que proposé portera ses fruits à la condition qu'il soit poursuivi avec assiduité et lenteur dès la première année de l'enseignement primaire.

Le problème c'est l'aboutissement de toute étude, quelle qu'elle soit, c'est là que l'enfant peut vraiment mettre en œuvre ses ressources d'invention et de logique. Le **problème** *ne s'identifie pas à un* **exercice**; *l'exercice ne sert qu'à fixer une technique nouvellement acquise. Dans les activités suscitées par un problème, l'enfant trouvera son épanouissement; il se préparera à entrer dans la vie non pas avec une somme de trucs accumulés sur les bancs d'école, mais avec un esprit exercé à la réflexion.*

[1] Extraits des commentaires du programme de mathématique de l'enseignement élémentaire français.
Bulletin Officiel de l'Education Nationale. BOEN No 5, 29.1.70.

[2] D'après Th. Bernet: Pourquoi faut-il enseigner les mathématiques modernes? Math-Ecole 40, novembre 69.

[3] F. Brunelli: Comparaisons - Rapports - Proportionnalité, Math-Ecole 46, janvier 71.

[4] Madeleine Goutard: Les mathématiques et les enfants. Editions Delachaux & Niestlé, Neuchâtel 1963.

Roger Sauthier

Monsieur Roger Sauthier, diplômé en mathématique et en physique de l'Université de Fribourg, est maître de mathématique et de physique au Collège de Jeunes filles et à l'Ecole normale des Institutrices à Sion. Il participe à la formation du personnel enseignant primaire dans le secteur de la mathématique moderne. Il est membre de la CMEM (Commission des moyens d'enseignement en mathématique).

ORIENTATION SPATIALE

Un «nouveau» matériel: Pourquoi?

Une série de fiches se rapportant à l'orientation spatiale vient de sortir de presse dans le canton de Vaud. Elle a été élaborée par un groupe de maîtresses enfantines et primaires. En effet, ces dernières ressentaient le besoin d'approfondir et de mieux contrôler l'acquisition de certaines notions d'orientation spatiale chez leurs enfants.

Ces fiches sont destinées aussi bien à l'école primaire qu'à l'école enfantine. Elles peuvent être obtenues auprès des fournitures scolaires vaudoises.

Rue César-Roux 34, 1000 Lausanne, tél. (021) 22 73 87.

Elles se présentent sous la forme suivante:

— 28 fiches avec dessin (format A 4 et A 5) ne comportant volontairement aucune consigne, ceci pour permettre à chaque enseignant d'adapter le travail à sa classe en fonction des besoins du moment.

— 2 feuilles (intitulées «Mode d'emploi» et «Les fiches») suggèrent quelques consignes.

Toutefois, l'utilisation de ces fiches ne se fera qu'après un long travail préparatoire. Il est indispensable, avant tout contrôle, que l'enfant vive avec son corps, manipule divers matériels et dessine la notion abordée.

1. Corps (vécu)
2. Matériel — enfants
   mobile (milieu, chaise, objets)
   statique (flanellographe)
3. Dessin — plan vertical
   plan horizontal
4. Fiches

La table des matières présentée en première page ne correspond pas à un ordre déterminé d'enseignement. L'enseignant seul saura choisir la notion à aborder: il sentira à quel moment il doit la laisser «reposer», pour la reprendre plus tard (temps de maturation).

Tout travail d'orientation spatiale nécessite une certaine prudence.

Des exigences trop hâtives conduiront à une mécanisation stérile, voire dangereuse, et on prendra garde de savoir si l'on pose les questions en fonction de la position de l'enfant ou de la position d'objets.

Exemple pratique vécu par 5 enfants de 5 à 8 ans

Notions SUR — SOUS

a) **Expérience vécue par l'enfant**

Matériel: chaise — poupée

— Faire monter l'enfant sur la chaise, lui demander où il est.

— Poser la poupée sous la chaise, demander à l'enfant où se trouve la poupée.

— Demander à l'enfant de découvrir sur quelles parties de son corps il peut poser la poupée (sur la tête, sur l'épaule, sur le ventre, sur le pied... connaissance de son corps).

— Se coucher sur le dos, sur le ventre.

b) **Avec du matériel mobile**

Matériel: gomme — crayon — papier (feuille)

— Poser la gomme sur la table.

— Poser la feuille de papier sur la gomme.

— Demander où est la gomme par rapport à la table, puis par rapport à la feuille.

— Poser le crayon sur la feuille.

— Demander à l'enfant d'exprimer les diverses positions de ces objets les uns par rapport aux autres.

L'enfant par rapport à l'enfant
L'enfant par rapport aux objets
Les objets par rapport à l'enfant
Les objets par rapport aux objets

Travailler les notions d'orientation spatiale d'une manière lente et approfondie, c'est contribuer à la maîtrise de nombreux domaines.

Par exemple:

Lecture: non confusion de et — te, pé — bé...
Ecriture: sens gauche-droite, de haut en bas, entre les lignes...
Calcul: numération positionnelle...
Géographie: lecture d'une carte...
Histoire: chronologie (passé, présent, futur)...
Sciences: à l'intérieur et à l'extérieur d'un animal...
Gymnastique: de face, de profil, dos à dos...
Composition: déroulement d'actions...

Une page intitulée «Remarques générales» résume ces idées.
Un questionnaire permettra à chacune d'émettre des critiques constructives.

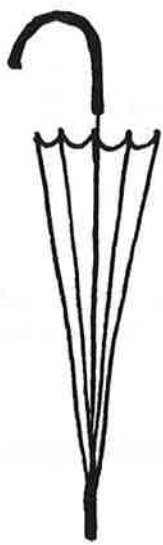
NOTIONS ABORDEES

1. Court — long. 2. Cheminement. 3. Entre. 4. Intérieur — extérieur. 5. Devant — derrière. 6. Sur — sous. 7. Près de — loin de. 8. Avant — après. 9. En haut — en bas. 10. En avant — en arrière. 11. De face — de profil. 12. Au milieu de — autour de — au bord de.

Cette liste n'est pas exhaustive. Certaines notions nous ont semblé délicates à représenter graphiquement (gauche — droite — contre — face à face — au-dessus de — dos à dos...). Elles seront toutefois exercées dans le cadre de la classe.

Etude d'une fiche: la notion «ENTRE»

— Devine pourquoi ces 2 parapluies sont éloignés!
— Colle une gommette entre les deux parapluies!
— Dessine un canard entre les parapluies!
— Qu'as-tu fait?
— Que devais-tu faire?
— Est-ce juste?



— Que vois-tu sur cette feuille?
Je vois une porte entre les fenêtres.
Je vois des rideaux entre les volets.
Je vois des fenêtres de chaque côté de la porte.
— Pourrais-tu placer une fenêtre entre 2 portes? Est-ce possible?

— Pourrais-tu placer des volets entre les rideaux?

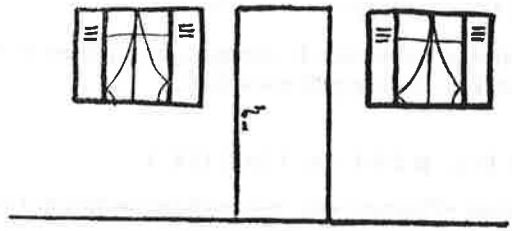
— Pourrais-tu mettre des volets entre les fenêtres?

— Biffe ce qui est entre les fenêtres! (L'enfant peut biffer la porte, mais aussi les 2 volets intérieurs).

— Qu'as-tu fait?

— Que devais-tu faire?

— Est-ce juste?



— Que pourrais-tu faire?
Je peux colorier le deuxième lapin.
Je peux mettre une fleur entre les 2 premiers lapins.

— Explique ce que tu veux faire, pourquoi? (Anticipation — développer l'abstraction).
Je colorie le premier lapin en jaune, le deuxième en rouge, le troisième en vert et le dernier en bleu. (Importance de l'expression verbale, essayer d'obtenir des phrases complètes).

— Où se trouve le lapin vert? (entre le lapin rouge et le bleu).

— A côté de quel lapin se trouve le lapin bleu? (à côté du lapin vert).

— Quel lapin a le jaune pour voisin? (le lapin rouge).

— Où se trouve le lapin gris? (il n'y en a pas).

— Pourrais-tu lui trouver une place?

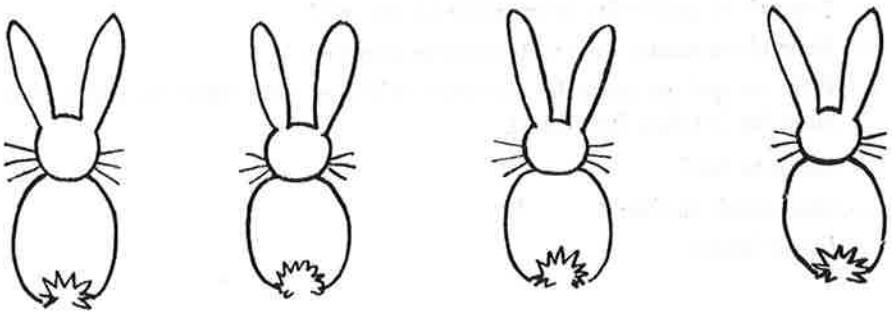
— Où vas-tu le mettre?

— Découpe une fleur, place-la entre 2 lapins!

— Qu'as-tu fait?

— Que devais-tu faire?

— Est-ce juste?



— Appelle Jean, Lise et Paul, place Lise entre les deux garçons!
— Place Jean et Lise de chaque côté de Paul!

Y. Cook, maîtresse enfantine; E. Jacques, institutrice; F. Mirza, maîtresse enfantine, rééducatrice de la psychomotricité.

POUR VOTRE BIBLIOTHEQUE

● Gilbert Walusinski **«Pourquoi une mathématique moderne».** Coll. «Guide blanc». Paris, Armand Colin, 1970. 135 × 210 mm; 208 pages.

Pourquoi une réforme de l'enseignement mathématique? Pourquoi enseigner une mathématique moderne à tous les enfants de la Maternelle à l'Université? Faut-il souhaiter cette refonte simultanée des programmes et des méthodes dès le cours préparatoire, dès les débuts de l'enseignement secondaire? Tous les parents et beaucoup de citoyens se posent ces questions, non sans inquiétude parfois. Tous ressentent le besoin de comprendre les motifs et les buts des réformes qui sont peu à peu mises en place.

Pour répondre à ces questions, Gilbert Walusinski, professeur de mathématiques au lycées de Saint-Cloud, a écrit ce guide en s'appuyant et sur son expérience de l'enseignement dans les deux cycles secondaires et sur celle que lui ont value plus de quinze années d'activité au sein de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, dans les équipes de formation permanente des maîtres ou dans des réunions d'information des parents d'élèves.

Ce «Guide blanc»

— Vous explique pourquoi la réforme est inéluctable et comment l'enseignement rénové préparera mieux la jeunesse à affronter le monde qui sera le sien dans dix ou vingt ans;

— Vous décrit les objectifs scientifiques et pédagogiques de cette réforme;

— Vous explique pourquoi la mathématique moderne n'est pas réservée à une certaine élite mais développe des facultés essentielles, imagination et rigueur en particulier, capacité d'abstraire surtout, chez tous les esprits;

— Vous informe sur les programmes actuellement en vigueur dans les enseignements primaire et secondaire.

En vous informant et en vous donnant des explications sur la réforme de l'enseignement mathématique, ce guide veut vous aider à mieux remplir le rôle d'éducateur que tout citoyen d'une démocratie doit assumer.

Le professeur Walusinski fut un des premiers à reconnaître la valeur des réglettes Cuisenaire. Il leur consacre plusieurs pages de son ouvrage et, avec beaucoup de raison, conclut ainsi: «De toute façon, quel que soit le matériel utilisé, il faut bien, un jour ou l'autre, se rendre compte qu'il n'a été qu'un outil. Et c'est là que je verrai, pour un matériel didactique comme pour un pédagogue, le critère de sa qualité: *qu'il enseigne à se passer de lui!*» Ce que Georges Cuisenaire a toujours dit et pensé.

S. R.

Le maître. Témoignage d'un temps révolu!

«Le maître constitue pour l'écolier un modèle d'une espèce très particulière. Le pédagogue que l'enfant aura eu sous les yeux pendant des milliers d'heures n'est ni un artiste, ni un inventeur, ni un artisan attaché à sa besogne; ce n'est pas un homme qui cherche, qui fait des hypothèses, qui se trompe, qui se remet à sa tâche avec ardeur et dont l'activité serait contagieuse. C'est un monsieur instruit qui s'adresse à un public de jeunes ignorants. S'il lui arrive de commettre une erreur, ses élèves échangent des sourires. C'est quelqu'un qui connaît d'avance la réponse à chacune des questions réglementaires qu'il aborde dans ses leçons.

Et quelle que soit la finesse de sa nature, il lui est difficile de ne pas le laisser voir, car depuis quinze ou vingt ans il enseigne les mêmes choses.

Ce ne sont pas des EFFORTS, ce n'est pas une activité créatrice que l'on propose à l'imitation de l'enfant quand il est à l'école. S'il imite ses maîtres, c'est en leur empruntant leurs formules définitives. Et voilà pourquoi, à notre époque, l'ignorant est si fréquemment la caricature du savant.

Quand on attachera moins de prix à la docilité intellectuelle des écoliers, on leur donnera plus d'entraîneurs et moins de professeurs.»

Henri ROORDA

«Le pédagogue n'aime pas les enfants». Lausanne, Payot, 1918, p. 41-42.

Comité de rédaction:	**Abonnements:**
Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame, D. Froidcœur, G. Guélat, F. Oberson, L. Pauli, S. Roller, rédacteur.	Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43 fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).