228

RMé
REVUE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE

SEPTEMBRE 2017

ISSN : 2571-516X

SOMMAIRE

EDITO

La Revue de Mathématiques pour l'école vous présente son numéro de rentrée. Vous y trouverez de quoi alimenter vos séances de classes et vos réflexions concernant l'enseignement des mathématiques. Pour cela nous vous invitons à résoudre le problème des châteaux de cartes proposé à la page suivante pour ressentir toute la complexité de la tâche et vous lancer dans la lecture de l'article de Maud Chanudet. Elle nous présente une analyse de diverses productions d'élèves autour de la narration de recherche concernant ce problème. L'analyse de productions d'élèves est aussi à le sujet de l'article de Sylvie Blanquart - Henry et Patrick Gibel. Les auteurs s'intéressent à une situation de communication en géométrie à la transition entre l'école primaire et le secondaire 1. Les analyses des élèves sont complétées par une prospection des actions des enseignants. Sylvain Vermette et Vincent Martin nous emmènent de l'autre côté de l'Atlantique et nous invitent pour une réflexion autour de la formation des enseignants sur le thème des divisions de fractions. Jérémie Vial étudiant à l'université de Genève nous présente une étude accomplie dans un centre médico-pédagogique. Il s'intéresse à une activité de tri réalisée par une élève de 6 ans. Enfin nous nous rendrons au Bénin avec l'article d'Henri Dandjinou et Alain Bronner. Les auteurs nous présentent une recherche concernant l'apprentissage de la probabilité avec des élèves de fin de secondaire 2.

Nous espérons que ces brefs descriptifs vous ont donné l'envie de dévorer ce nouveau numéro. En complément de ces articles, n'oubliez pas de prolonger votre visite du site à travers ses diverses rubriques. Vous trouverez les actualités présentées dans ce numéro mais aussi les prochains évènements à venir. Vous retrouverez l'ensemble des numéros de la revue ainsi que les Labos-Maths. Nous vous rappelons que l'objectif de cette rubrique est de proposer aux enseignants des situations de recherche mathématiques à partir d'un contexte afin qu'ils puissent conduire de véritables explorations avec leurs élèves Les situations proposent des recherches qui peuvent conduire à une multiplicité de découvertes et donc de "réponses". Nous en profitons pour vous inviter à partager vos expériences, savoir comment vos élèves répondent à la recherche d'un Labo-Maths. Nous sommes également curieux de connaître les explications, les justifications et les raisonnements que font vos élèves.

Enfin vous pourrez vous rendre dans la rubrique *Appel à contribution* afin de préparer votre prochaine participation à notre revue ! Pour rappel voici l'adresse de notre site : www.revue-mathematiques.ch.

En attendant le prochain numéro prévu pour mars 2018 nous vous souhaitons une bonne lecture.

Pour le comité éditorial

Sylvia Coutat

LE PROBLEME DES CHATEAUX DE CARTES

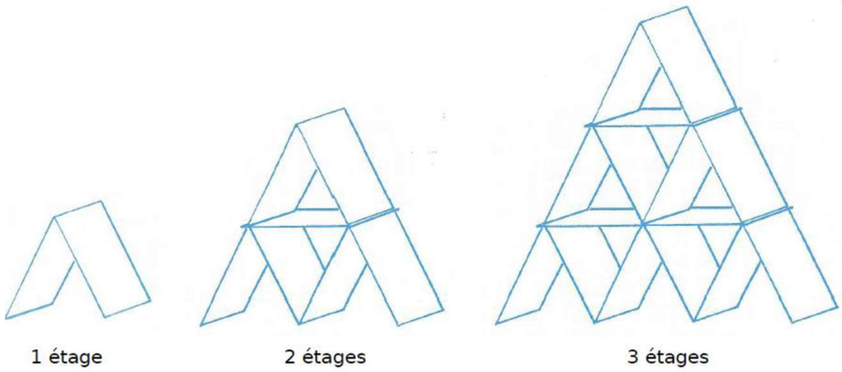
Maud Chanudet[1]

Université de Genève

Nous nous intéressons dans cet article au problème dit des châteaux de cartes. Après avoir présenté le contexte de l'étude, nous faisons une brève analyse a priori de ce problème. Nous nous appuyons ensuite sur l'analyse de quatre-vingt-quatre productions d'élèves de 10e LS dans le cadre du cours de *Développements en mathématiques* pour illustrer les différentes procédures mises en œuvre par les élèves et présentons enfin quelques pistes en vue d'une institutionnalisation.

LE PROBLÈME

Pour construire un château de cartes à un étage, il faut 2 cartes. Pour un château de cartes à deux étages, il faut 7 cartes. Et pour un château de cartes à trois étages, il faut 15 cartes. Combien faut-il de cartes pour construire un château à 7 étages ? A 30 étages ? A 100 étages ?



Ce problème est présenté sur le site Sesamaths[2] et destiné à des élèves de 3ème (14-15 ans). Nous l'avons proposé à des élèves de 10e LS[3] option scientifique du cycle d'orientation à Genève, dans le contexte du cours de *Développements en mathématiques.*

LE COURS DE DÉVELOPPEMENTS EN MATHÉMATIQUES

Ce cours dispensé à raison d'une période de 45 minutes par semaine vise « au renforcement et au développement des capacités et des compétences des élèves dans les stratégies de résolution de problèmes et les activités de situations mathématiques » (DIP, 2013, p. 18).

Les objectifs d'apprentissage de ce cours ne sont pas centrés sur des savoirs mathématiques spécifiques (résoudre une équation du second degré à une inconnue, additionner deux fractions de même dénominateur, etc.) ou des domaines mathématiques particuliers (espace, algèbre, etc.), mais visent des compétences plus transversales, liées à la résolution de problèmes. Le document de spécificité cantonale qui est le document curriculaire de référence incite en ce sens les enseignants à proposer aux élèves de résoudre des problèmes ouverts (Arsac, Germain & Mante, 1991).

[1] Cette recherche s'est effectuée dans le cadre du projet fiancé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique–FNS (Subside no 100019_173105 / 1) : « La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes. »

[2] http://manuel.sesamath.net/

[3] Il s'agit des élèves de 13-14 ans ayant choisi la filière littéraire et scientifique.

LA NARRATION DE RECHERCHE COMME DISPOSITIF D'ÉVALUATION

Ce document invite par ailleurs les enseignants à évaluer leurs élèves à partir de leur narration de recherche (Bonafé, 1993). Il s'agit pour l'élève de raconter

> « la suite des actions qu'il ou elle a réalisée au cours de sa recherche. Un nouveau contrat est passé avec l'enseignant-e : l'élève s'engage à raconter du mieux possible toutes les étapes de sa recherche, à décrire ses erreurs, comment lui sont venues de nouvelles idées ; en échange, l'enseignant-e s'engage à faire porter son évaluation sur ces points précis sans privilégier la solution » (DIP, 2013, p. 22).

Un des objectifs visés par ce dispositif est de permettre à l'enseignant un accès à la partie recherche du travail mathématique de l'élève. Bien souvent l'enseignant n'a pas accès à cette partie qui reste de l'ordre du travail privé de l'élève, auquel, ce dernier ne donne à voir que la réponse qu'il estime correcte ou en tout cas susceptible de l'être. Mais ce dispositif vise aussi à développer chez les élèves des compétences en communication, compétences considérées comme importantes en résolution de problèmes. Les élèves doivent ainsi communiquer leur recherche, la mettre en forme et la structurer pour la rendre intelligible par autrui (en particulier par l'enseignant, mais aussi par les autres élèves).

BRÈVE ANALYSE A PRIORI DU PROBLÈME

La résolution de ce problème nécessite peu de connaissances préalables spécifiques. Il semble toutefois préférable que les élèves aient déjà quelques notions d'algèbre, notamment en ce qui concerne l'élaboration d'expressions littérales à partir d'énoncés de problèmes, de figures géométriques ou d'expressions verbales.

Variables didactiques

Les deux variables didactiques importantes de ce problème sont le nombre d'étages proposés (n) et le nombre de cas proposés. Le choix des valeurs de ces variables va en effet influencer les stratégies mises en oeuvre par les élèves.

Si tous les cas à étudier sont des nombres d'étages faibles ($n = 7$ par exemple), les élèves vont pouvoir se contenter d'une stratégie de comptage sur le schéma. En posant la question pour un nombre d'étages élevé ($n = 100$ par exemple), on incite implicitement les élèves à abandonner la stratégie de comptage sur le schéma. En effet, cette stratégie devient longue et la probabilité de se tromper en comptant le nombre de cartes sur le schéma élevée.

Le fait de proposer un seul cas à étudier avec un nombre d'étages assez grand ($n = 100$ par exemple) va permettre de travailler la réduction temporaire de la complexité du problème. Les élèves vont ainsi devoir penser à simplifier le problème en étudiant des cas avec un nombre d'étages plus faible et faire des choix sur les valeurs de sous cas en vue d'une généralisation. A l'inverse, en proposant plusieurs cas à traiter ($n = 7$, 30 et 100 par exemple), dont des nombres d'étages faibles (ici $n = 7$), on s'assure que tous les élèves s'approprient le problème. En effet tous peuvent débuter la résolution du problème par une représentation de la situation et une stratégie de comptage sur le schéma. Mais dans ce cas, le travail sur la réduction temporaire de la complexité d'un problème est moindre, voire nulle, puisque différents cas sont déjà proposés.

Stratégies

1. Comme noté précédemment, les élèves peuvent compter simplement le nombre de cartes nécessaires à partir de leurs schémas. Bien qu'efficace pour des nombres d'étages faibles ($n = 7$ par exemple) cette stratégie devient longue et fastidieuse au fur et à mesure que le nombre d'étages augmente.

2. Les élèves peuvent considérer une suite et chercher comment passer d'un terme de la suite (u_n) au suivant (u_{n+1}). La récurrence s'exprime formellement[4] sous la forme de $u_{n+1}=u_n+3n+2$ avec $u_1=2$. Une fois le pas de récurrence trouvé, les élèves peuvent alors déterminer de proche en proche la liste des termes de la suite. Cette stratégie est, elle aussi, longue puisque les élèves doivent calculer l'intégralité des termes de la suite, de u_1 jusqu'à u_{100}. On peut par ailleurs chercher à exprimer u_n comme fonction de n, à partir de la relation de récurrence exprimée ci-dessus.

3. Les élèves peuvent chercher à établir une formule qui exprime le nombre de cartes nécessaires pour construire le château en fonction du nombre d'étages. C'est cette stratégie qui est en particulier visée chez les élèves à qui on a proposé le problème. Les élèves peuvent alors soit expliquer sous forme de texte comment calculer le nombre de cartes, soit donner la formule sous forme d'une expression littérale.

Ce problème amène à considérer une suite arithmétique de degré 2, c'est à dire que son terme général est un polynôme de degré 2. En effet, pour construire un château de cartes à *n* étages, on a besoin de $2n+3((n-1)+(n-2)+\cdots+2+1)$ c'est à dire de $\frac{1}{2}(3n^2+n)$ cartes. Mais le calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique n'étant pas au programme de la classe de 10e, nous n'attendons pas des élèves qu'ils sachent que l'expression $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$ peut s'exprimer sous la forme de $\frac{n(n-1)}{2}$. Cette transformation peut cependant faire l'objet d'un travail spécifique avec les élèves. Sans celle-ci, le calcul du nombre de cartes nécessaires pour construire un château à 100 étages peut s'avérer long.

Une autre difficulté posée par ce problème est qu'il est rarement possible pour les élèves de prouver que l'expression algébrique qu'ils ont trouvée est correcte. Ils peuvent seulement montrer, à partir de quelques tests et de la comparaison avec les résultats obtenus par comptage sur les schémas, qu'elle n'est pas invalidée, ou encore montrer qu'elle est équivalente à d'autres formules obtenues.

Notons enfin que si les élèves avaient eu accès à un tableur, ils auraient pu penser à s'en servir pour programmer le calcul de proche en proche du nombre de cartes nécessaires, pour tous les cas jusqu'à *n= 100*, ou encore pour se décharger de certains calculs tels que la somme des *n* premiers entiers.

Objectifs d'apprentissage

En proposant ce problème aux élèves, on ne vise pas le développement de connaissances mathématiques spécifiques mais des compétences plus transversales de résolution de problème, ce qui correspond aux objectifs visés dans le cours de *Développements en mathématiques.*

Si l'on se réfère au Plan d'Etude Romand[5], les éléments pour la résolution de problèmes mis en jeu dans ce problème sont :

– la mise en oeuvre d'une démarche de résolution ;

– la pose de conjectures, puis validation ou réfutation (validation et réfutation qui s'appuient ici sur la comparaison entre le nombre de cartes obtenu par une formule et celui déterminés par comptage sur le schéma) ;

– la réduction temporaire de la complexité d'un problème (en particulier dans le cas où seul le cas *n = 100* étages est proposé) ;

[4] Un tel formalisme n'est bien évidemment pas attendu dans les productions des élèves de 10e LS.

[5] Le plan d'études romand définit les objectifs et les finalités de l'école publique dans les cantons de Suisse romande.

– la vérification, puis communication d'une démarche et d'un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats (enjeu important de la narration de recherche).

De façon plus spécifique, les élèves sont amenés dans ce problème à calculer la somme des n premiers entiers et à élaborer des expressions littérales à partir d'une situation, voire ensuite à identifier des expressions littérales équivalentes.

SYNTHÈSE DES PROCÉDURES MISES EN OEUVRE PAR LES ÉLÈVES

Contexte du recueil des données

Dans le cadre d'un recyclage auquel a participé la quasi-totalité des enseignants dispensant en 2016-2017 le cours de développements en mathématiques, nous avons demandé aux participants de proposer le problème des châteaux de cartes à leurs élèves. Chacun d'eux nous a ensuite envoyé deux narrations de recherche d'élèves qu'ils considéraient comme des productions « moyennes » (c'est à dire ni trop bonnes, ni trop mauvaises et représentatives du travail des élèves). Nous avons analysé ces 84 narrations de recherche. Nous présentons ci-dessous une synthèse des différentes procédures mises en œuvre par les élèves[6].

Procédure basée sur la proportionnalité

Quelques élèves ont questionné l'application du modèle proportionnel dans ce problème[7]. Un seul élève a appliqué un raisonnement proportionnel sans le remettre en cause. Tous les autres élèves qui ont tenté d'appliquer le modèle proportionnel l'ont ensuite rejeté et se sont lancés sur d'autres pistes de résolution (Fig. 1).

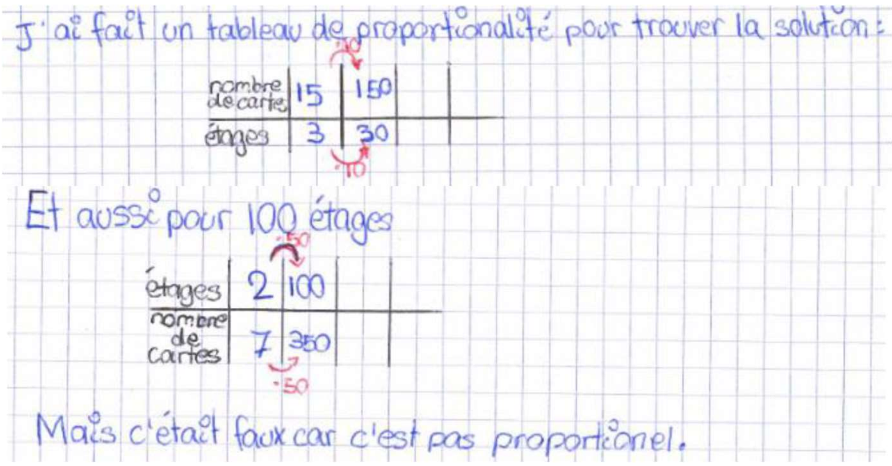


Fig. 1[8] : Narration 1

[6] Nous présentons les procédures majoritairement mises en oeuvre par les élèves. Nous passons sous silence quelques procédures isolées identifiées dans les narrations.

[7] 11 élèves sur 84 ont réfléchi à propos du caractère proportionnel ou non de la situation.

[8] Toutes les figures présentées ci-après sont extraites de narration de recherche d'élèves.

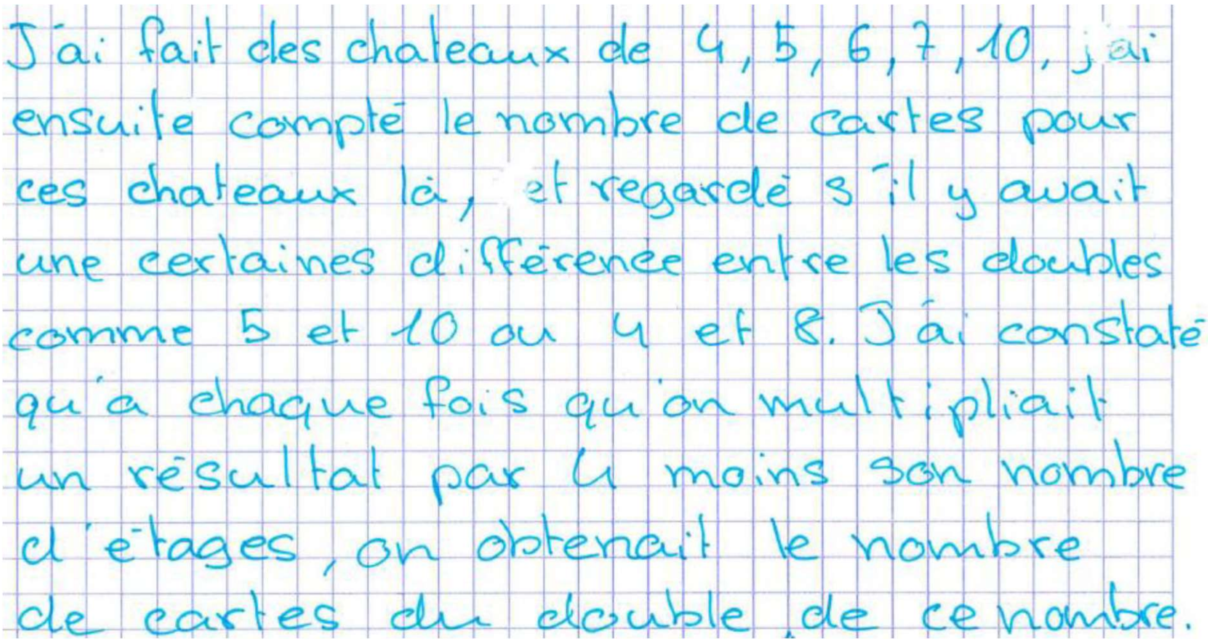

J'ai fait des chateaux de 4, 5, 6, 7, 10, j'ai ensuite compté le nombre de cartes pour ces chateaux là, et regardé s'il y avait une certaines différence entre les doubles comme 5 et 10 ou 4 et 8. J'ai constaté qu'à chaque fois qu'on multipliait un résultat par 4 moins son nombre d'étages, on obtenait le nombre de cartes du double de ce nombre.

Fig.2 : Narration 2

Certains élèves ont plus largement cherché des régularités entre les nombres de cartes nécessaires, dans le cas où les nombres d'étages considérés sont multiples l'un de l'autre. Ils ont ainsi par exemple cherché à savoir s'il y avait un lien entre le nombre de cartes nécessaires pour *n* étages et le nombre de cartes nécessaires pour *2n* étages (Fig. 2).

Procédure par récurrence basée sur la recherche d'une suite logique

Un certain nombre d'élèves a considéré l'enjeu de ce problème comme relevant de la recherche d'une suite logique[9]. Après avoir représenté les premiers cas (*n = 2, 3, 4*, etc.) et compté le nombre de cartes nécessaires à la construction des châteaux à partir de leurs schémas, ils ont cherché une « règle » qui permet de passer d'un nombre de cartes pour un nombre d'étages donné (*n*) au nombre de cartes nécessaires pour le nombre d'étages suivant *(n+1)* (Fig. 3).

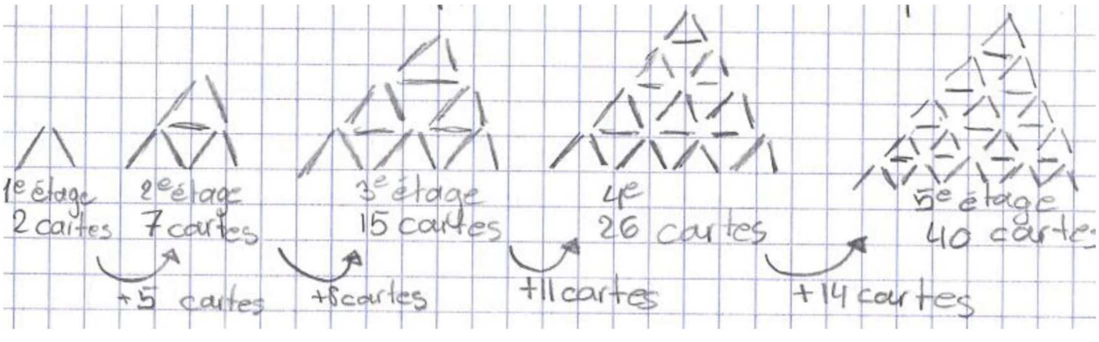
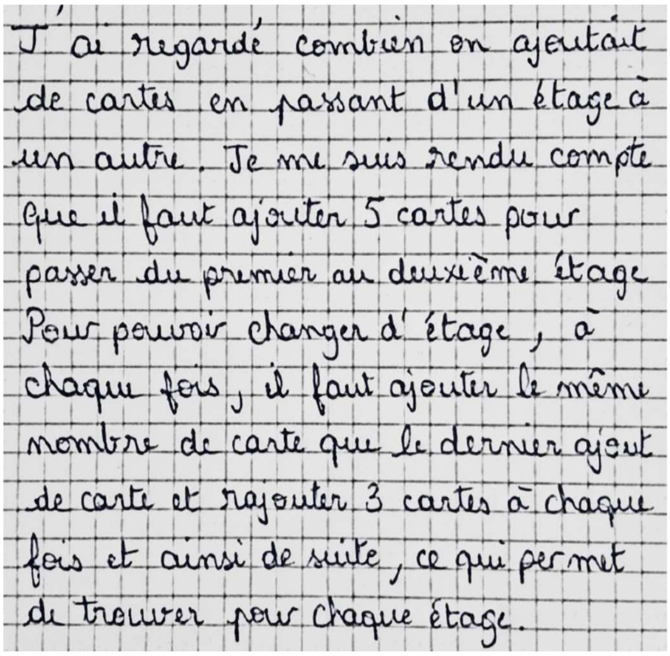


Fig.3 : Narration 3

[9] Cette approche a été adoptée par 26 élèves sur 84.



J'ai regardé combien on ajoutait de cartes en passant d'un étage à un autre. Je me suis rendu compte que il faut ajouter 5 cartes pour passer du premier au deuxième étage Pour pouvoir changer d'étage, à chaque fois, il faut ajouter le même nombre de carte que le dernier ajout de carte et rajouter 3 cartes à chaque fois et ainsi de suite, ce qui permet de trouver pour chaque étage.

Fig. 4 : Narration 4

Ces élèves ont remarqué que pour déterminer le nombre de cartes nécessaires pour un château de $n+1$ étages, il suffisait d'ajouter au nombre de cartes nécessaires pour un château de n étages, le nombre de cartes ajouté pour passer du cas n-1 au cas n, augmenté de 3 (Fig. 4). Ils ont ensuite raisonné de proche en proche, jusqu'aux valeurs demandées ($n = 30$ et 100).

Après avoir représenté les premiers cas et compté le nombre de cartes correspondant, les élèves ont donc raisonné de façon indépendante du problème, sans s'appuyer sur la manière dont ont été construits les châteaux. Cette procédure par récurrence s'est avérée toutefois longue et certains élèves l'ont abandonnée au profit d'autres stratégies dans le but de traiter des calculs plus simples.

Procédure basée sur la recherche d'une formule générale

D'autres élèves ont cherché une formule, une manière de calculer, qui permette de connaitre le nombre de cartes nécessaires pour construire les châteaux dans le cas général, le nombre de cartes nécessaires étant exprimé comme une fonction du nombre d'étages du château[10].

Parmi ces élèves, une grande partie d'entre eux a cherché à établir une formule à partir de la façon dont sont construits les châteaux. Ils ont ainsi décomposé les châteaux en triangles ou en montagnes (Fig. 5), ils ont distingué les cartes situées à la base des châteaux et celles des étages, ils ont distingué les cartes « verticales » et les cartes horizontales (Fig. 6). Toutes ces façons différentes de « voir » les châteaux ont donné lieu à un grand nombre de méthodes de calcul différentes.

Beaucoup d'élèves ont exprimé la méthode de calcul obtenue sous forme de texte. Certains élèves ont illustré leur raisonnement par un calcul sur un cas générique (Fig. 5). Cela signifie que les élèves ont raisonné sur un nombre d'étages donné ($n = 9$ dans l'exemple ci-dessous), mais que ce raisonnement s'entend comme valable pour toute autre valeur de n. Les raisonnements s'opèrent sur un nombre d'étages qui est « un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus » (Balacheff, 1987, p. 165).

[10] 40 élèves ont raisonné de cette manière.

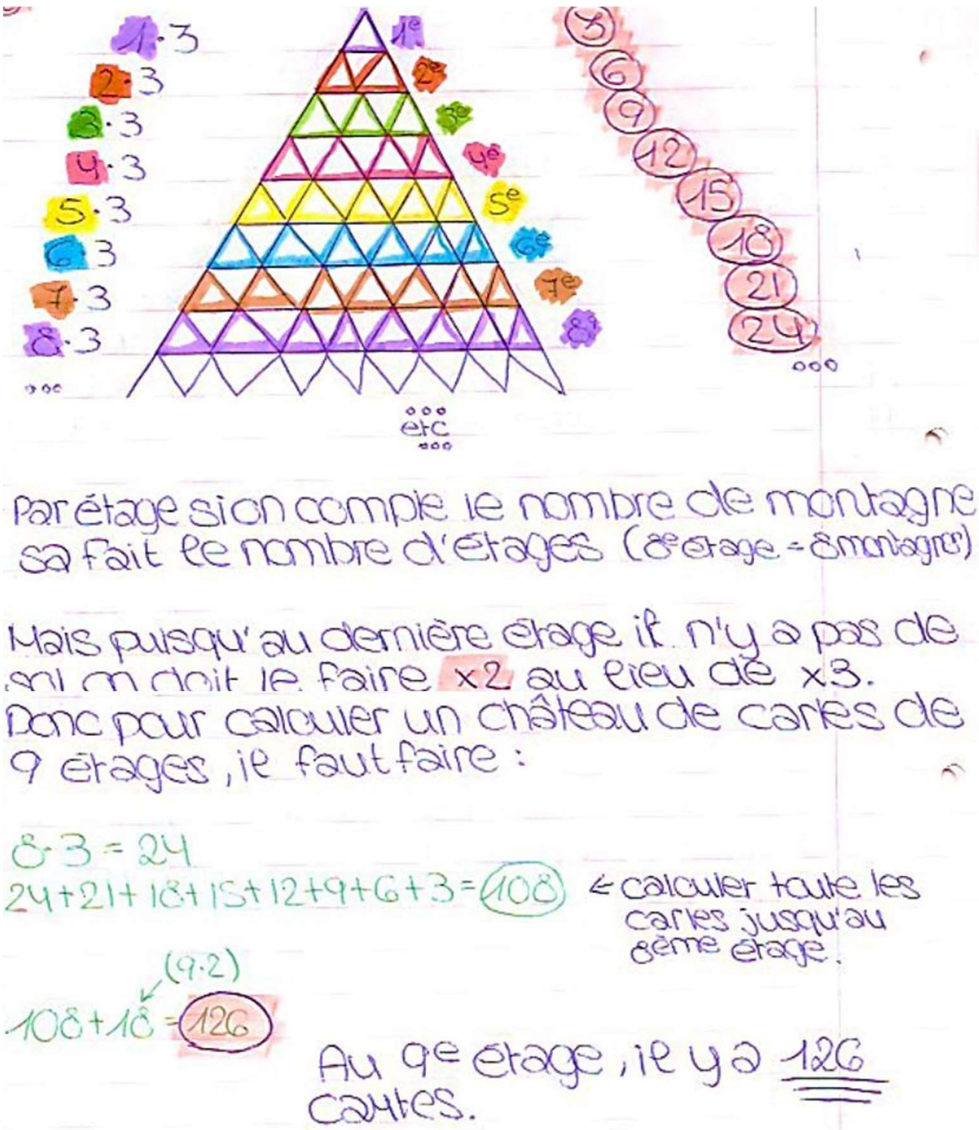


Fig. 5 : Narration 5

Ces élèves ont abouti pour la grande majorité à une formule faisant apparaitre la somme des termes d'une suite arithmétique, les bloquant parfois dans l'expression d'une formule algébrique simple. Quelques élèves ont cependant exprimé leur méthode sous forme d'une expression littérale, plus ou moins correcte et plus ou moins complète.

Peu d'élèves ont réussi à trouver une méthode de calcul correcte qui ne fasse pas appel à la somme des termes d'une suite arithmétique (Fig. 6).

étage	C. horizontale	C. oblique	Total
1	0	2	2
2	1	6	7
3	3	12	15
4	6	20	26
5	10	30	40
6	15	42	57
7	21	56	77
8	28	72	100

Nous avons essayé de trouver un théorème puis nous l'avons trouvé.
Pour trouver le nombre de cartes obliques dans un étage nous avons multiplié le nombre de étages en question et le nombre d'étage suivant pour trouver le nombre de cartes obliques. Ex 5 étages $5 \cdot 6 = 30$
Pour trouver le nombre de carte horizontale dans un étage nous avons multiplier le nombre d'étage en question et le nombre d'étage précédent puis on divise par 2 pour trouvé le résultat de nombre de carte horizontale
Ex avec 5 étages : $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Fig.6 : Narration 6

Pour les autres élèves ayant cherché à contourner la difficulté liée au calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique, les formules proposées semblent bien souvent « tombées du ciel » (Fig. 7). Une majorité d'élèves a résolu le problème et rédigé sa narration de recherche sur deux périodes à une semaine d'intervalle. Cela peut expliquer que certains élèves aient été chercher des réponses sur Internet ou se soient faits aider.

méthode 2 :
on peut calculer le nombre de carte en :
divisant le nombre d'étages que l'on veut (n étages = n)
la division : il faut le multiplier par n additionner par 1 multiplier par 3 moins n.
la Formule est : $(n : 2) \cdot (n+1) \cdot 3 - n$

Fig. 7 : Narration 7

Synthèse des formules

Après l'analyse des 84 narrations de recherche des élèves, nous avons identifié 14 manières différentes de calculer le nombre de cartes en fonction du nombre d'étages. Nous présentons ci-dessous quelques-unes de ces manières.

Soit N le nombre de cartes nécessaires pour construire le château, et n le nombre d'étages[11].

M1 : $N = u_n$ avec $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3n + 2$

M2 : $N = 2n + 3.\sum_{k=1}^{n-1} k$

M3 : $N = 2.\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{j=1}^{n-1} j$

M4 : $N = 3.\sum_{k=1}^{n} k - n$

M5 : $N = \sum_{k=0}^{n}(2n - 2k) + \sum_{j=1}^{n-1} j$

M6 : $N = \frac{3}{2}(n^2 + n) - n$

M7 : $N = \frac{3n^2+n}{2}$

M8 : $N = n.(1{,}5n + 0{,}5)$

PISTES EN VUE D'UNE INSTITUTIONNALISATION

Ce problème nous semble avoir des potentiels (recherche, résistance, débat et didactique), au sens de Georget (2009), intéressants pour une exploitation en classe.

Un bon *potentiel de recherche* tout d'abord puisque les élèves cherchent un problème nouveau qui ne se réduit pas à la seule application de techniques connues et qu'ils peuvent l'aborder de différentes manières. De plus d'après le retour des enseignants, ce problème semble avoir suscité l'intérêt et la curiosité des élèves. Le choix de commencer par proposer le problème pour sept étages favorise aussi la dévolution et l'implication des élèves dans la tâche et la dévolution.

Il a aussi un bon *potentiel de résistance* puisque ce problème résiste aux tentatives des élèves pour le résoudre, et un bon *potentiel de résistance dynamique* puisque cette résistance évolue au cours de la recherche. En effet au début de la recherche les élèves ne voient pas comment répondre aux questions pour les cas 30 et 100, mais leurs essais successifs leur permettent d'avancer vers une solution. Le milieu assure de plus une rétroaction (lorsqu'ils travaillent sur des nombres d'étages faibles) puisque les élèves peuvent s'assurer de l'adéquation entre le nombre de cartes qu'ils obtiennent avec leur formule et le nombre de cartes qu'ils ont comptées sur les schémas et qu'ils savent donc être exact.

Un *potentiel de débat* peut être exploité si l'on présente aux élèves les autres procédures mises en oeuvre par les élèves de la classe et que l'on amène un questionnement sur l'équivalence des expressions algébriques obtenues. Il semble par contre difficile de débattre de la validité des formules trouvées (pour autant qu'aucune des valeurs numériques testées ne mette en défaut la formule trouvée).

Enfin il possède enfin un bon *potentiel didactique*. Il met en jeu des compétences en résolution de problème comme nous l'avons vu dans l'analyse a priori. Il nous semble que suite au travail des élèves sur ce problème, l'institutionnalisation peut porter sur :

[11] Pour simplifier, nous avons synthétisé les méthodes observées sous forme d'expressions algébriques formalisées bien qu'elles ne soient pas exprimées ainsi dans les narrations des élèves.

- l'application du modèle proportionnel. En effet, si ce problème relevait de la proportionnalité, il serait alors beaucoup plus simple à résoudre, il est donc pertinent de se questionner sur ce point. C'est l'occasion de revoir avec les élèves ce que signifie le fait que deux grandeurs sont proportionnelles et comment prouver sur des exemples numériques qu'elles ne le sont pas ;

- la réduction de la complexité du problème, le choix des sous cas à traiter. Cela est d'autant plus pertinent si on a demandé aux élèves de ne traiter que le cas $n = 100$. On peut sinon en profiter pour leur faire noter que l'on s'est intéressé à des cas plus petits avant de traiter un cas plus général et que cette réduction de la complexité qui a cette fois été prise en charge par l'enseignant sera par la suite de leur responsabilité ;

- l'utilisation de l'algèbre pour exprimer une formule ;

- tester une formule sur des exemples dans le but de s'assurer qu'elle n'est pas invalide. On peut en particulier mettre en avant des exemples de formules incorrectes qui auraient pu être invalidées sur quelques tests avec des valeurs simples (recherche de contre-exemples) ;

- différencier preuve, validation, invalidation. En particulier, il est intéressant de voir qu'ici les élèves ne peuvent bien souvent pas prouver que la formule qu'ils ont trouvée est correcte, mais seulement montrer qu'elle n'est pas invalidée (sauf dans le cas d'un raisonnement par récurrence) ;

- montrer que les différentes formules obtenues par les élèves sont équivalentes, et ce en s'appuyant sur la propriété de distributivité. Par exemple, on peut montrer que les méthodes M6, M7 et M8 sont équivalentes ;

- de façon plus spécifique, en profiter pour voir avec les élèves une manière astucieuse de calculer la somme des termes d'une suite arithmétique.

CONCLUSION

Le problème des châteaux de cartes nous semble être intéressant à proposer dans les classes pour développer les compétences des élèves en résolution de problème. Les élèves se l'approprient facilement et la dévolution se maintient tout au long de la résolution. Bien que la stratégie experte soit difficilement accessible à des élèves de 10e, on a pu voir que ces derniers mettent en oeuvre beaucoup de procédures différentes, et que cela peut permettre d'institutionnaliser des aspects importants de la résolution de problème, et du travail en algèbre : comment réduire la complexité d'un problème ? Quelle est la différence entre prouver, tester, invalider ? Comment montrer que deux expressions algébriques sont équivalentes ?

BIBLIOGRAPHIE

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème.* IREM de Lyon.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147–176.

Bonafé, F. (1993). Les narrations de recherche, un outil pour apprendre à démontrer. *Repères IREM, 12*, 5–14.

Département de l'Instruction Publique, de la culture et du sport. (2013). Programme cantonal, littéraire-scientifique, profil sciences (S).

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* (Thèse de doctorat en didactique des mathématiques). Université Paris Diderot. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00426603/fr/

SITUATION DE COMMUNICATION EN GEOMETRIE A LA TRANSITION ECOLE-COLLEGE

Sylvie Blanquart - Henry, Patrick Gibel

Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris-Diderot ; Laboratoire Epistémologie et Didactiques des disciplines, Université de Bordeaux

INTRODUCTION

Cet article vise à étudier la mise en œuvre d'une séquence de géométrie en cycle 3, en France, dans deux classes : une classe de CM1-CM2 (fin d'école primaire, 21 élèves de 9 à 11 ans) et une de sixième (début de collège, 22 élèves de 11 à 12 ans). Cette séquence a été élaborée par les auteurs en vue d'une expérimentation dans le cadre d'un mémoire de Master en didactique (Henry, 2014) sur le thème de l'enseignement de la géométrie en cycle 3 (Brousseau, 2000). La fiche de séquence associée est proposée en annexe. Cette séquence, dont nous avons transmis le déroulement et les principaux objectifs aux enseignants, comporte deux séances et s'articule autour d'une situation de communication (Brousseau, 1998), ayant pour finalité la reproduction, par les récepteurs, d'une figure modèle (plane) donnée aux émetteurs. Ces derniers doivent produire un message écrit, ne comportant aucun tracé, destiné aux récepteurs afin qu'ils construisent une figure superposable à la figure modèle.

Les figures modèles sont de même nature : il s'agit de losanges construits par l'enseignant, découpés dans du papier, dont les caractéristiques sont mentionnées en annexe. Dans la classe de primaire, les élèves ont travaillé précédemment sur ce type de figures.

Nous étudierons d'une part les messages élaborés par les élèves des deux classes, d'autre part la manière dont chacun des enseignants choisit de conduire la séquence. Nous utiliserons certains concepts de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau, 1988), présentés dans la première partie, afin d'expliciter les situations didactiques et adidactiques qui structurent le déroulement de cette séquence. Dans la deuxième partie, nous réaliserons une analyse *a priori* de la situation de communication. Ensuite nous étudierons les productions des élèves ainsi que les choix didactiques effectués par les enseignants afin de faire vivre les phases de dévolution, de vérification et de mise en commun. Plus particulièrement nous nous attacherons à apporter des éléments de réponse à la question suivante :

Par quels moyens l'enseignant, en situation didactique, parvient-il à réunir les conditions nécessaires à la réalisation de l'institutionnalisation des savoirs géométriques mobilisés explicitement ou implicitement lors de la situation de communication ?

LE CADRE THÉORIQUE DE L'ÉTUDE : LA THÉORIE DES SITUATIONS (TSD)

Le schéma ci-dessous vise à représenter l'articulation des différentes situations didactiques et adidactiques au cours des deux séances qui constituent la séquence objet de notre étude.

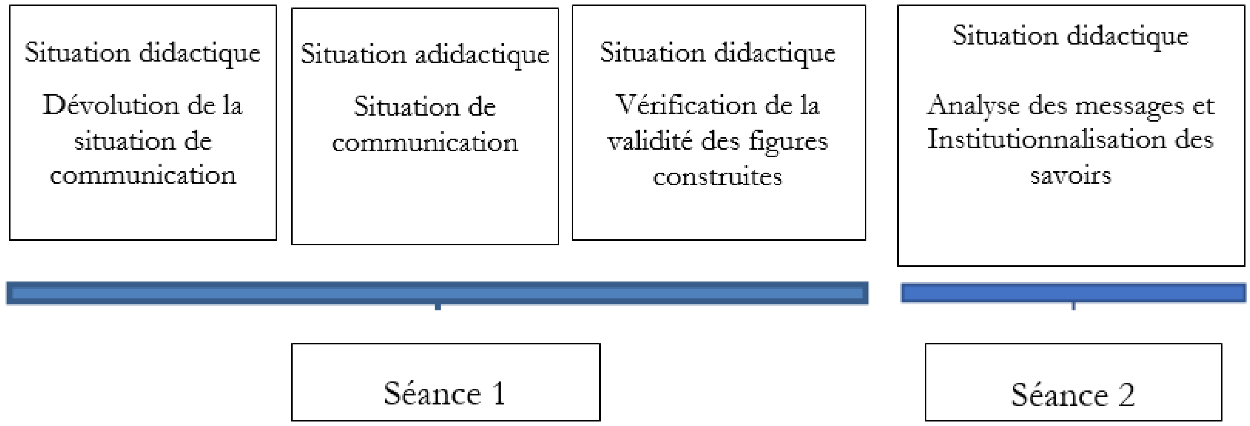


Fig. 1 : Déroulement de la séquence : Les différentes situations didactiques et adidactiques

Les situations didactiques consistent essentiellement à :

- Faire dévolution de la situation de communication en explicitant l'organisation matérielle et humaine, les règles du jeu, les ressources à disposition des élèves et les contraintes.
- Vérifier en présence de l'équipe la validité des figures construites en regard de la règle du jeu.
- Réaliser une mise en commun, prenant appui sur une analyse des messages élaborés par les différentes équipes et éventuellement institutionnaliser des savoirs (disciplinaires, langagiers, transversaux/méthodologiques).

La situation adidactique, qui constitue l'élément central de cette ingénierie est une situation de communication. Nous allons, dans la section suivante, présenter le schéma d'une situation de communication en TSD et expliciter les enjeux didactiques correspondants.

Enjeux didactiques d'une situation de communication

Dans ce type de situation, la communication sous une forme déterminée par l'enseignant doit être le seul moyen pour les élèves de parvenir au but fixé.

Nous proposons ci-contre le schéma de la situation de communication (Brousseau, 1998)

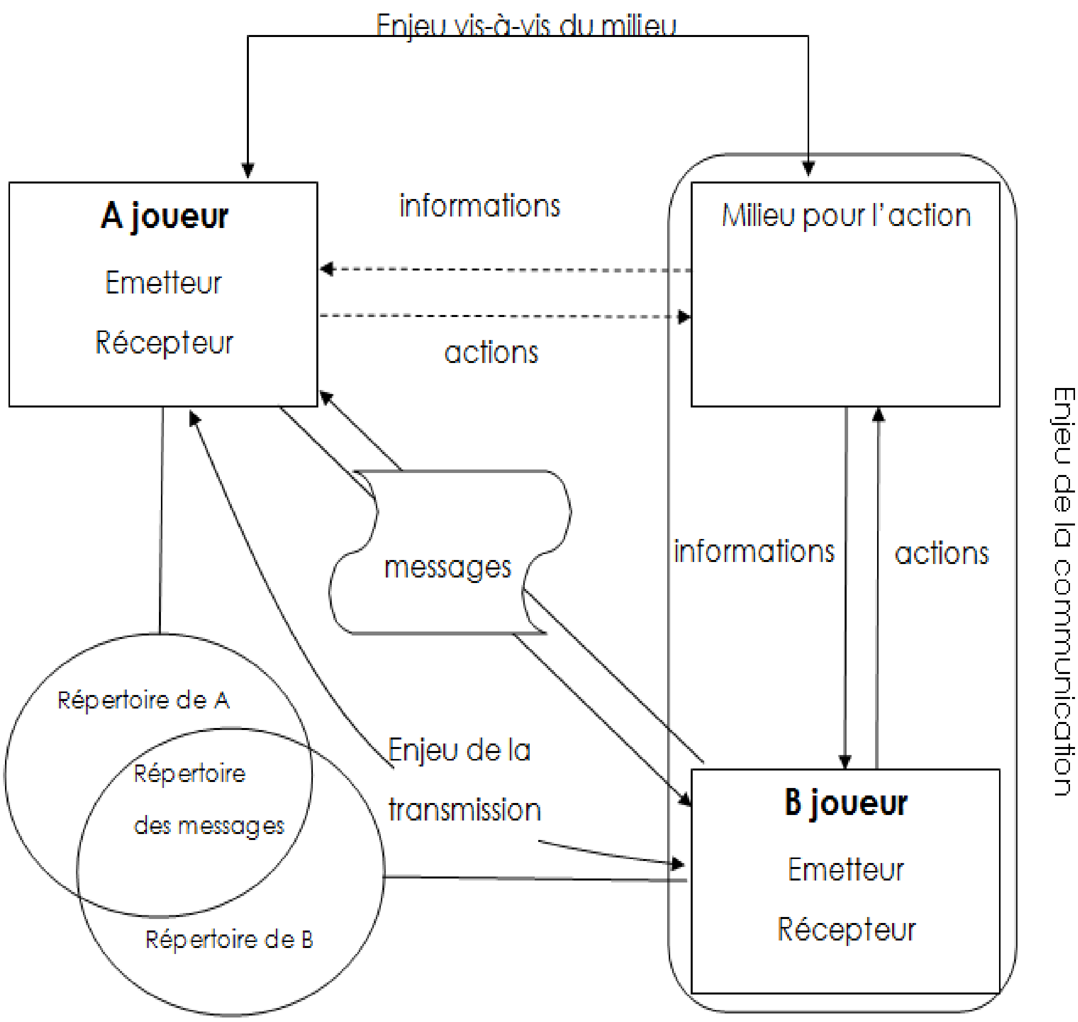


Fig. 2 : Schéma de la situation de communication (Brousseau, 1998, p. 106)

Le schéma ci-dessus s'appuie sur le concept de « répertoire », aussi nous allons commencer par définir ce terme dans le cadre de la TSD.

Définition et usages du répertoire en situation de communication

L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue le répertoire didactique de la classe. Par conséquent l'enseignant identifie un répertoire qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue. Le répertoire didactique de la classe désigne aussi l'ensemble des moyens qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances à partir de ses connaissances antérieures (Gibel, 2015).

Le répertoire d'un élève, autrement dit le répertoire utilisé par un élève lorsqu'il est confronté à une situation, peut différer du répertoire didactique de la classe (Gibel, 2004).

Quand les émetteurs et récepteurs utilisent des répertoires différents au niveau des connaissances mathématiques ou de la maîtrise des codes de communication, ils doivent nécessairement procéder à des ajustements pour que la communication soit efficace. Dans ce cas, les deux interlocuteurs exercent l'un sur l'autre des rétroactions. Dans le contexte de la situation de communication étudiée, cela est renforcé, car les récepteurs sont autorisés à retourner le message aux émetteurs en demandant une explication complémentaire.

En fixant les règles d'échange du message, il est possible d'influencer le type et le sens des messages obtenus. Le code de communication lui-même peut être amené à évoluer, s'enrichir tant au niveau des signes utilisés que de la syntaxe, en particulier quand les messages sont écrits. (Brousseau, 1998)

PRÉSENTATION ET ANALYSE A PRIORI DE LA SITUATION DE COMMUNICATION

Présentation succincte de la situation

La séquence étudiée a été proposée aux deux classes. L'organisation des élèves est la suivante : les élèves travaillent par binômes, deux binômes constituent une équipe.

Les élèves sont disposés de telle sorte que les binômes d'une même équipe ne puissent pas communiquer oralement ou visuellement. Les messages sont échangés par l'intermédiaire de l'enseignant qui joue ainsi le rôle de facteur.

La figure que les émetteurs devront décrire à leurs coéquipiers est un losange découpé dans du papier de couleur. Les figures choisies (notées de *a* à *g*) ont les caractéristiques suivantes :

Losange	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
Mesure du côté (cm)	11	12	14	13	12	13	14
Mesure d'un angle (°)	70	85	70	60	70	85	60

Fig. 3 : dimensions des figures modèles

Éléments d'analyse *a priori* de la situation de communication

Cette séquence a pour objectif de mobiliser les connaissances et les savoirs concernant le losange. Son déroulement est présenté en annexe, il permet de détailler chacune des phases.

L'enjeu pour un binôme est de rédiger un message qui permette avec certitude aux récepteurs de construire une figure superposable au modèle, et seulement celle-là. Selon Pierrard (2004), trois types d'opérations sont nécessaires à cette élaboration : une analyse mathématique de la figure, la sélection des informations à communiquer et enfin l'ordonnancement de ces informations.

Nous présentons dans cette analyse *a priori* ce qui relève de l'analyse mathématique de la figure avant de nous centrer sur la formulation du message.

ANALYSE MATHÉMATIQUE DE LA FIGURE : PROCÉDURES POSSIBLES

Pour le losange plusieurs types de constructions sont envisageables.

Un premier type de procédure utilise les propriétés des diagonales d'un losange qui sont perpendiculaires et ont même milieu. Sont successivement tracés une diagonale, la deuxième diagonale perpendiculaire et de même milieu, puis les côtés du losange.

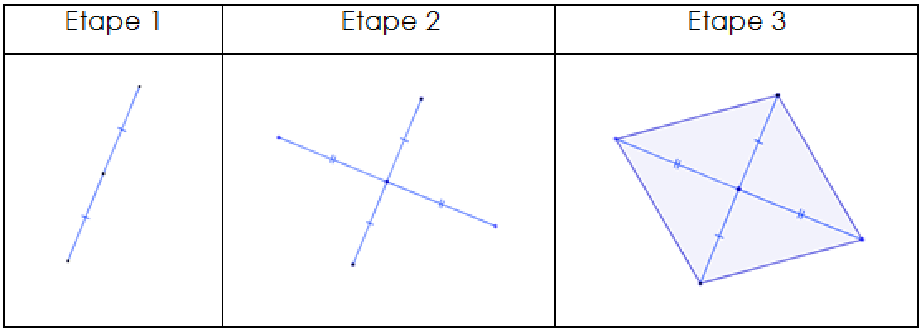


Fig. 4 : procédure 1

La seconde procédure se base sur la décomposition du losange en deux triangles isocèles isométriques de même base. Après le tracé d'une diagonale, un triangle puis un second sont construits. Cette construction de triangles peut se faire uniquement par des reports de longueur.

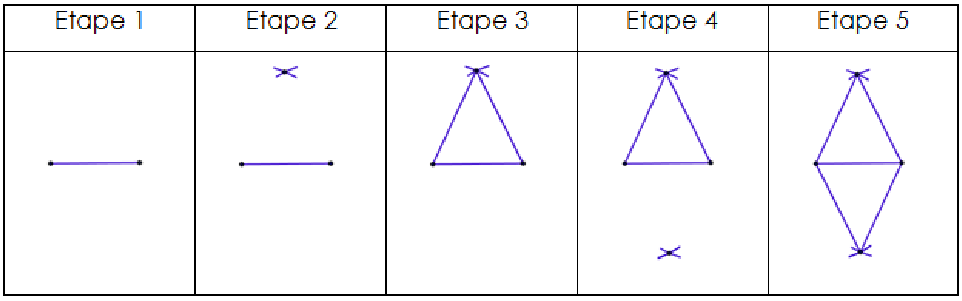


Fig. 5 : procédure 2

Une troisième procédure se base sur une décomposition du losange en quatre triangles rectangles.

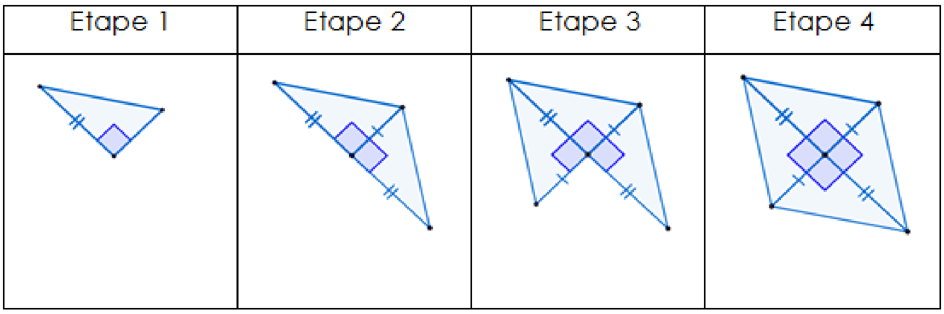


Fig. 6 : procédure 3

ANALYSE DIDACTIQUE

Les principales variables didactiques sont les caractéristiques des losanges donnés en modèle. Du point de vue des dimensions :

- si la grande diagonale du losange mesure plus de 21 cm, il faut tenir compte de l'orientation du losange pour le reproduire sur une feuille A4 ;

- si le losange possède des angles proches de 90°, une vérification instrumentée est nécessaire pour éviter une confusion avec le carré.

Le support utilisé est aussi déterminant. Les losanges modèles, découpés dans du papier, permettent la validation des tracés par superposition et autorisent le pliage pour prélever des informations.

FORMULATIONS ATTENDUES ET DIFFICULTÉS ENVISAGÉES

Pour caractériser les messages produits, nous nous appuyons sur les travaux de Pierrard (2004) et Henry (2014).

Au niveau de la syntaxe, nous distinguons les textes descriptifs qui organisent une présentation de la figure et les textes prescriptifs qui énumèrent des consignes de tracé. Pour répondre à l'enjeu de la situation de communication présentée, un texte prescriptif est plus adapté.

En ce qui concerne les informations délivrées, un texte pertinent permet la construction d'une figure et une seule. Il est minimal, s'il ne contient pas d'information redondante ou inutile.

Nous qualifions de cohérent un message centré uniquement sur le domaine de la géométrie. Les difficultés de formulation pourront amener les élèves à utiliser un vocabulaire non géométrique : spatial (en haut, de l'autre côté) ou figuratif.

Du côté des élèves, le choix des informations à communiquer dépend de l'analyse de la figure qui est réalisée. Par exemple, pour la procédure (1) le passage à la rédaction du message nécessite de communiquer plusieurs informations pour définir la position relative des deux diagonales. Il n'y a pas congruence au sens de Duval (2005) entre le registre graphique et le registre discursif. De plus, les informations à donner ne relèvent pas toutes de la même appréhension de la figure : identifier le point d'intersection des diagonales nécessite de décomposer la figure en lignes et points. Par conséquent, les premiers messages produits ne seront sans doute pas pertinents. Cela devrait conduire les récepteurs à une difficulté dans leur construction, les amener à formuler une question et/ou échouer dans leur tâche de reproduction du modèle. Cette dialectique ne peut fonctionner que si les récepteurs respectent les consignes telles qu'elles sont prescrites. Ayant eu à décrire eux aussi un losange, ils peuvent imaginer que les figures sont similaires et mobiliser des propriétés de la figure qui ne sont pas explicitées. Cela peut être une limite de la situation dont les rétroactions ne seront pas toujours suffisantes pour invalider les productions erronées.

VALIDATION

La figure élaborée par les récepteurs est validée par l'équipe, en présence de l'enseignant, par superposition de la figure modèle et de la figure construite. L'écart doit être inférieur à 1 mm.

ÉTUDE COMPARATIVE DES MISES EN ŒUVRE DE LA SÉQUENCE

Comparaison des déroulements de la première séance dans les deux classes

La préparation matérielle est similaire dans les deux classes, conformément aux prescriptions de la fiche séquence. Cependant nous avons observé que des différences significatives apparaissent dans la manière dont les enseignants font vivre la séquence à leurs élèves, plus précisément lors de la dévolution de la situation et lors de la mise en commun.

L'enseignant de primaire énonce les consignes relatives à chacune des phases (reproduction de la figure, écriture du message, validation) au fur et à mesure du déroulement tandis que l'enseignant de collège dévolue l'ensemble des activités en début de séance.

En fin de séance l'enseignant de primaire effectue un bilan collectif. Pour l'ensemble des binômes, il réunit dans un tableau le message produit, la figure modèle et celle tracée. Il ajoute E pour « échec » ou « R » pour réussite. De son côté, l'enseignant de collège passe d'équipe en équipe pour valider les productions avec les élèves sans faire de retour avec l'ensemble de la classe.

Les schémas ci-dessous illustrent les déroulements effectifs dans chacune des classes. Nous y retrouvons en primaire un temps de recherche de 43 minutes, segmenté par des phases de dévolution (D) collectives qui imposent la chronologie des activités. En collège, la séance plus courte comporte deux minutes de temps collectif avant un temps de recherche variant de 35 à 39 minutes selon les groupes. Le temps dédié spécifiquement à la validation est similaire dans les deux classes.

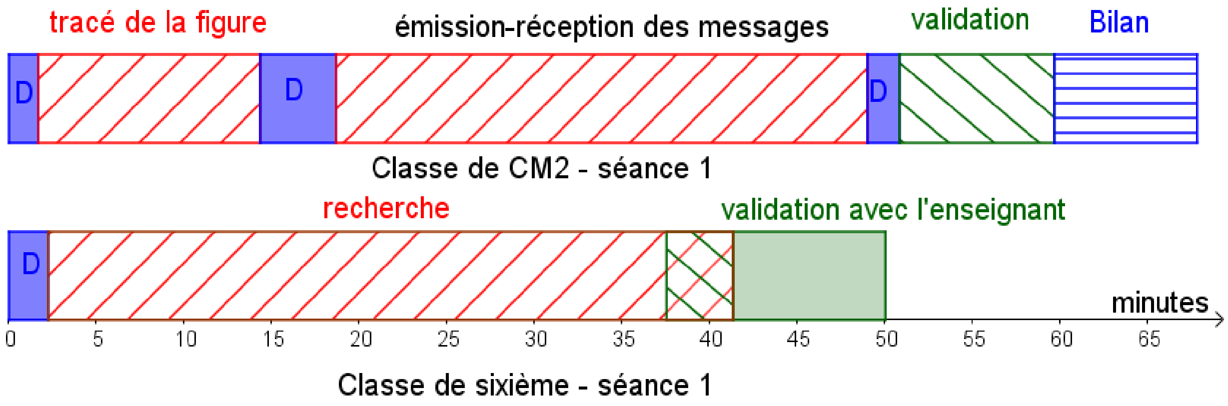


Fig. 7 : Comparatif des déroulements de la séance 1

Dans les deux classes, la deuxième séance se déroule quelques jours après la première. Ce délai permet à chaque enseignant d'étudier les messages produits et ainsi d'adapter son projet de mise en commun aux connaissances mobilisées (ou non) par les élèves dans le but d'institutionnaliser les savoirs qu'il veut privilégier.

L'analyse de l'ensemble des messages produits est nécessaire afin d'étudier les choix didactiques effectués par les deux enseignants. Nous la structurons en nous référant à la grille d'analyse de Pierrard adaptée par Henry (2014) structurée par rapport aux trois types d'opérations précitées : l'analyse de la figure effectuée par les émetteurs, le choix des informations communiquées et leur organisation.

Pour identifier les connaissances et savoirs mis en œuvre par les élèves dans leur analyse de la figure nous cherchons les figures simples auxquelles ils se réfèrent, les relations qui les lient, les propriétés mobilisées explicitement ou implicitement.

En ce qui concerne le choix des informations, nous notons si les textes produits sont cohérents, pertinents ou minimaux. Nous regardons aussi si un codage est utilisé pour désigner des objets ou des relations. Enfin, nous observons si le message met en évidence de manière claire la succession des étapes.

Analyse de messages produits par les élèves en séance 1

Nous avons analysé l'ensemble des messages rédigés dans les deux classes (Henry, 2014). Nous présentons dans cet article deux messages par niveau, particulièrement représentatifs de l'ensemble des productions.

Premier message – classe primaire

La figure à reproduire est le losange *b (12cm, 85°).*

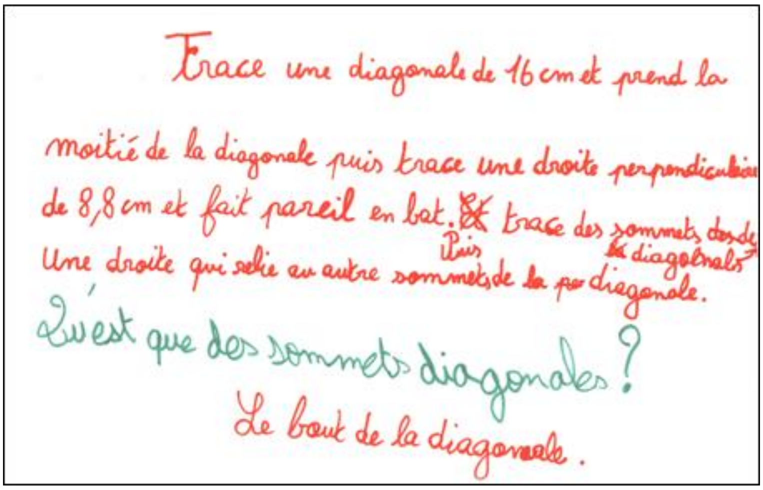

Trace une diagonale de 16 cm et prend la moitié de la diagonale puis trace une droite perpendiculaire de 8,8 cm et fait pareil en bat. ~~Et~~ Puis trace des sommets des ~~de~~ diagonales une droite qui relie au autre sommets de la ~~per~~ diagonale.
Qu'est que des sommets diagonales ?
Le bout de la diagonale.

Fig. 8 : Message 1 à propos de la figure b – classe primaire

Ce message est un texte prescriptif. Il se présente sous la forme de consignes successives séparées par des marqueurs temporels. La propriété des diagonales est utilisée comme modèle implicite d'action, mais la formulation des différentes informations est problématique. Les émetteurs distinguent trois étapes de tracé (une diagonale, la seconde, le « contour »). Chaque étape doit contenir plusieurs informations et cette coordination pose problème. En particulier « Trace une droite perpendiculaire » n'indique pas que la seconde diagonale doit passer par le milieu de la première. En ce sens ce message n'est pas pertinent, comme décrit dans l'analyse *a priori*. Il n'est pas non plus cohérent car il fait référence à une orientation spatiale (en bas).

Les récepteurs vont cependant construire une figure conforme au modèle.

Deuxième message – classe primaire.

La figure à reproduire est le losange *a (11cm, 70°)*

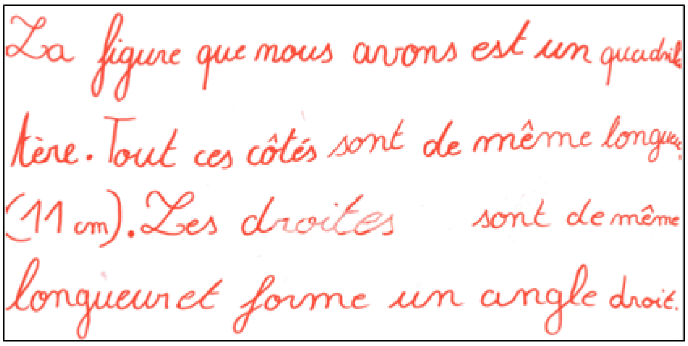

La figure que nous avons est un quadrilatère. Tout ces côtés sont de même longueur (11 cm). Les droites sont de même longueur et forme un angle droit.

Fig. 9 : Message 2 à propos de la figure a - classe primaire

Ce message est un texte descriptif. Les propriétés des diagonales sont évoquées de façon partiellement erronée : les droites (diagonales ?) sont de même longueur (se coupent en leur milieu ?). Le texte n'est pas pertinent car il manque une donnée pour construire une figure superposable au modèle. Les élèves n'ont pas compris que la donnée des longueurs des côtés du losange est insuffisante pour le construire et qu'il faut une information supplémentaire, qui peut être la longueur d'une diagonale.

Ce message n'a pas permis de tracé de la part des récepteurs.

Ensemble des messages – classe primaire

Les messages se répartissent équitablement entre des textes descriptifs, des textes prescriptifs ou des textes alternant ces deux fonctions.

Les dix binômes semblent avoir perçu la nature de la figure à reproduire, mais un seul décompose le losange en sous-figures : il y voit quatre triangles rectangles. La majorité des équipes mobilisent implicitement une ou plusieurs propriétés des diagonales, mais aucun ne parvient à donner la totalité des informations requises. Concernant le lexique, le terme « milieu » n'apparait dans aucun message.

La moitié des binômes utilise des informations spatiales dans leur message (horizontal, vertical, gauche, droite, en bas).

Message 1 classe de sixième

La figure à reproduire est le losange *a*

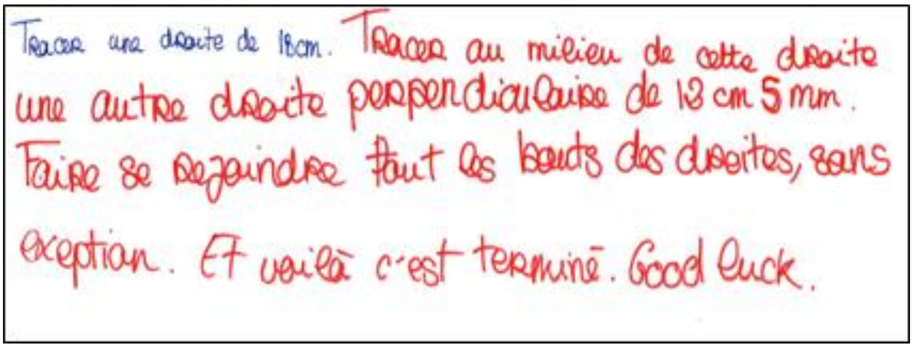

Tracer une droite de 18cm. Tracer au milieu de cette droite une autre droite perpendiculaire de 13 cm 5 mm. Faire se rejoindre tout les bouts des droites, sans exception. Et voilà c'est terminé. Good luck.

Fig. 10 : Message 1 à propos de la figure a - classe de sixième

Ce texte est prescriptif et cohérent. Les actions sont correctement ordonnées sans référence spatiales ou étapes clairement indiquées. Les propriétés de la figure mobilisées sont celles des diagonales : la position relative des diagonales semble perçue mais n'est pas formulée clairement. Au niveau du lexique, « droite » est employé à la place de « segment ».

La figure tracée par les récepteurs est correcte par « effet de contrat » ou parce que ces élèves ont le même modèle implicite : les diagonales ont le même milieu alors que le message ne le précise pas.

Message 2 classe de sixième

La figure à reproduire est le losange *a*.

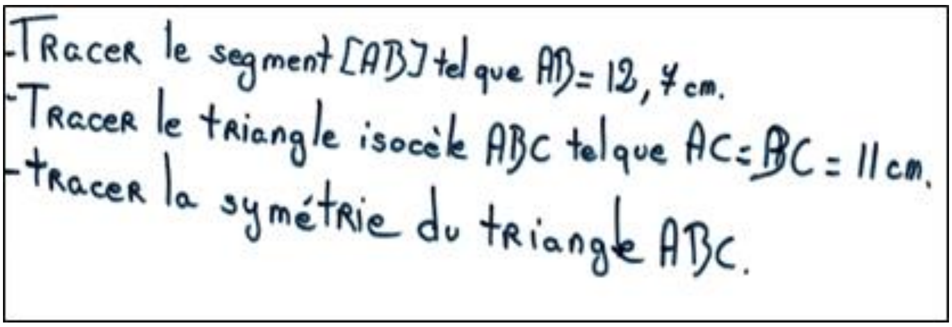

-Tracer le segment [AB] tel que AB = 12,4 cm.
-Tracer le triangle isocèle ABC tel que AC = BC = 11 cm.
-tracer la symétrie du triangle ABC.

Fig. 11 : Message 2 à propos de la figure a - classe de sixième

Nous sommes en présence d'un texte prescriptif avec des étapes de construction clairement ordonnées. Le texte est également cohérent, économe avec un usage adapté de codages et notations mathématiques. La figure est décomposée en deux triangles isocèles et il est fait référence à la symétrie axiale. La seule information manquante pour avoir un texte tout à fait pertinent est la donnée explicite de l'axe de symétrie.

Ce message permet aux récepteurs de réussir car ils mettent en œuvre implicitement la seule information manquante.

Ensemble des messages – classe de collège

L'analyse de l'ensemble des messages produits montre que tous les messages sont des textes prescriptifs correctement ordonnés, mais souvent non pertinents car incomplets. Pourtant, les seuls échecs des récepteurs sont dus à une imprécision des tracés. On peut voir dans cette réussite « malgré tout » deux explications. Tout d'abord des informations non formulées sont néanmoins utilisées implicitement par les récepteurs. Ensuite, les élèves peuvent avoir perçu que toutes les figures sont des losanges. Comme décrit dans l'analyse a priori, par effet de contrat, ils reproduisent un losange sans tenir compte des indications réelles du message. Par ailleurs, quatre binômes sur dix utilisent des références spatiales (horizontal, haut, bas, de chaque côté) et un cinquième le terme figuratif « la croix ».

DÉROULEMENTS DE LA DEUXIÈME SÉANCE DANS LES CLASSES DE CM2 ET DE SIXIÈME

En classe primaire

Pour la séance 2, un tableau récapitulatif des messages produits en séance 1 est affiché. L'enseignant dispose à côté d'un tableau blanc.

Après un retour sur la séance précédente, l'enseignant présente un message qui a été rédigé en séance 1. Chaque élève doit construire la figure correspondant à ce message avant un temps d'échanges collectifs qui aboutit à l'élaboration d'un message commun. Durant cette phase, l'enseignant réfute les propositions des élèves lorsqu'elles ne sont pas conformes à ses attentes. Il focalise leur attention sur l'emploi de certains termes géométriques. Le message obtenu est le suivant :

C'est un losange
1°) Tracer une diagonale de 16 cm de longueur.
2°) Prendre le milieu de la diagonale.
3°) Tracer une droite perpendiculaire à la diagonale de 8,8 cm de longueur et qui passe par le milieu.
4°) Relier les sommets des diagonales.

Il reflète déjà les éléments que l'enseignant veut institutionnaliser : l'emploi des termes diagonale et milieu, l'expression « x cm de longueur » sur laquelle il insiste. La distinction entre droite et segment n'est pas abordée.

L'enseignant demande ensuite aux élèves de construire le tracé correspondant à ce message puis revient sur le texte produit pour le compléter. Un deuxième message produit en séance 1 est à son tour testé avec une phase de tracé individuel et des échanges collectifs pour l'améliorer.

Pour finir, l'enseignant conclut la séance par « *ce qu'il faut garder en mémoire pour écrire un message* » et écrit au tableau sous la dictée des élèves :
- donner le nom de la figure
- noter les étapes de construction : il faut faire attention à l'ordre
- faire attention au vocabulaire de géométrie.

En sixième

Pour la séance 2, l'enseignant de collège dispose d'un tableau blanc traditionnel du côté gauche de la salle, et sur le côté droit d'un tableau blanc interactif (TBI).

Il a enregistré les textes des différents messages, émis par les élèves lors de la séance précédente, dans différents fichiers qu'il peut projeter avec le TBI selon ses besoins. Le déroulement général est similaire à celui de la classe de CM2 : l'enseignant commence par projeter un message et demande aux élèves d'effectuer le tracé correspondant. Suit une phase d'échanges collective afin d'améliorer le message présenté. Il prend ensuite appui sur un deuxième message produit afin d'aboutir à la rédaction d'un message idoine. La séance se termine par la distribution de nouveaux modèles à reproduire (losanges et parallélogrammes) pour lesquels les élèves devront rédiger un programme de construction à la maison.

Même si certains élèves ont compris l'effet de contrat qui a fait tracer un dessin valide à partir d'un message erroné, aucun ne perçoit l'information manquante dans le message. Pour pallier cette difficulté, l'enseignant adopte une posture d'opposant face aux formulations des élèves et utilise comme argument un dessin qui respecte les consignes données par le message. Il supplée ainsi à une insuffisance des rétroactions de la situation qui ne permettent pas dans ce cas aux élèves de valider ou invalider eux-mêmes leurs propositions. Il souhaite faire émerger les contradictions des messages avec un double objectif. D'une part, mettre en défaut les références spatiales (en haut, à gauche) et les formulations incomplètes et d'autre part favoriser la vision de la figure en termes de points désignés par des lettres. Pour cela il passe successivement du tableau blanc au TBI. Sur le tableau blanc, il produit de nombreux dessins pour illustrer les propositions des élèves, tandis qu'il affiche au TBI le message à étudier ou à modifier, comme l'illustre le schéma ci-dessous où l'usage du TBI est représenté par des hachures et celui du tableau blanc par une zone grisée.

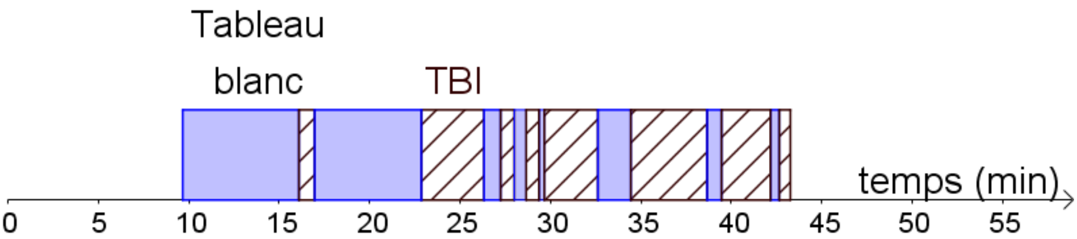


Fig. 12 : Usage des tableaux pendant la mise en commun

Ce faisant le professeur engage la classe dans une dialectique en vue de faire évoluer les formulations. Les formulations maladroites, imprécises, qui utilisent un lexique non mathématique sont notées provisoirement par l'enseignant sur le TBI.

En procédant ainsi il accorde une place aux formulations provisoires, traduisant ainsi sa capacité à reconnaitre « des idées mathématiques qui sont inclusives dans des ostensifs non canoniques » (Bloch, 2009, p.33). Dans un second temps il amène les élèves à les corriger pour parvenir au message suivant :

« Tracer un segment [AB] de 18 cm. Tracer la médiatrice de ce segment. Notons M le milieu de [AB]. Placer les points C et D sur la médiatrice de façon qu'ils soient équidistants de M à 6,2 cm. Tracer [AC], [CB], [BD] et [DA]. »

Conclusion

Cet article a pour objet de mettre en lumière la richesse et la complexité des situations de communication en géométrie à la transition école-collège. L'analyse *a priori*, menée dans le cadre de la Théorie des situations didactiques, permet de rendre compte des procédures que les élèves sont susceptibles de mettre en œuvre lors de la reproduction de la figure modèle en vue d'élaborer un message pertinent. Ces situations permettent aux élèves de mobiliser leurs connaissances et leurs savoirs disciplinaires, langagiers et méthodologiques. Ainsi elles leur offrent la possibilité d'utiliser en situation leur répertoire didactique.

Cet article met également en évidence l'influence des choix didactiques de deux enseignants sur les traitements des messages et par conséquent sur les possibilités d'institutionnaliser les savoirs en jeu. Ainsi il permet d'observer des similitudes et des différences dans les choix didactiques effectués.

Les deux enseignants ont en commun qu'ils conduisent les élèves à faire évoluer des messages erronés. Les réécritures successives aboutissent à la production collective d'un message idoine. Dans les deux classes, les connaissances institutionnalisées tiennent compte des productions des élèves : en primaire la moitié des messages seulement sont des textes prescriptifs et le terme « milieu » n'est pas employé. L'enseignant de cette classe s'emploie à travailler la forme du message et le lexique. En collège l'accent est mis sur la pertinence des messages qui fait souvent défaut. L'enseignant veille aussi à discréditer les références spatiales présentes dans 4 messages sur 10.

L'étude met en lumière des différences dans les moyens mis en œuvre pour faire évoluer les messages produits. L'enseignant de primaire focalise plutôt l'attention des élèves sur l'emploi d'un lexique géométrique adéquat. De son côté, lorsque les rétroactions de la situation sont insuffisantes, l'enseignant de collège adopte une posture d'opposant en interprétant les messages de façon totalement objective, c'est-à-dire sans tenir compte de certains éléments implicites. Il autorise temporairement des formulations partiellement erronées ou incomplètes d'un point de vue mathématique.. Cela illustre le fait qu'il n'est pas indispensable de se focaliser sur le lexique en début de deuxième séance. En effet les propriétés du losange peuvent être d'abord étudiées sans les formuler explicitement. Les termes « losange », « diagonales » prennent tout leur sens quand les élèves perçoivent et assimilent leurs champs d'utilisation par l'étude des messages produits.

La mise en œuvre d'une situation de communication nécessite une étude précise des messages produits afin d'orchestrer la mise en commun. Les critères présentés dans cet article apparaissent comme une aide pertinente pour guider les enseignants dans cette analyse en vue d'institutionnaliser les savoirs disciplinaires, langagiers et méthodologiques visés.

BIBLIOGRAPHIE

Bloch, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x, 81*, 25-52.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. Actes du 2e colloque de didactique des mathématiques. Université de Crète (département de l'éducation), 67-83.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q. Montréal*, 14-24.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 17,* 87-116.

Gibel, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et Didactique, 9(*2), 51-72.

Gibel, P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques.* Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux 2, Bordeaux.

Henry, S. (2014). *Analyse didactique d'une situation de géométrie plane*. Mémoire de Master. Pratiques et Ingénierie de la formation, Innovation didactique et conseil en formation, ESPE d'Aquitaine Université de Bordeaux.

Pierrard, A. (2004). Des écrits pour présenter des dessins géométriques. *Grand N, 74*, 7-32.

ANNEXE : FICHE DESCRIPTIVE DE LA SÉQUENCE - SITUATION DE COMMUNICATION : LES LOSANGES

Séance 1

Dévolution aux élèves de la situation de communication relative aux losanges.

Matériel préparé par l'enseignant :

7 losanges découpés dans du papier de couleur.

Les élèves ont à leur disposition par binôme un triple décimètre, du papier canson, des compas et des équerres.

Les binômes d'une même équipe doivent être éloignés et ne pas communiquer entre eux.

Description de l'activité prévue :

ORGANISATION DE LA CLASSE:

Les élèves sont divisés en 5 équipes (A,B,C,D,E). Chaque équipe comprend 2 binômes (un binôme 1 (A1) et un binôme 2 (A2)).

	Equipe A	Equipe B	Equipe C	Equipe D	Equipe E
1 à 2	(13,85)	(12,85)	(13,60)	(14,60)	(12,70)
2 à 1	(14,70)	(11,70)	(11,70)	(14,70)	(13,60)

CONSIGNE :

« Je vais aujourd'hui vous proposer une situation de communication, il s'agit d'un jeu par équipe.

Chaque équipe A, B, C, D et E sera constituée de 2 binômes. J'ai constitué les équipes, je vous les présenterai après vous avoir expliqué le but et les règles du jeu.

« J'ai découpé des figures géométriques dans du papier. Je vais donner une de ces figures à chacun des deux binômes de chaque équipe (par exemple pour l'équipe A une figure pour le binôme A1, une autre pour le binôme A2, etc). Les binômes 1 et 2 ne se verront pas, mais pourtant ils travailleront ensemble.

Le premier travail consiste, pour chaque binôme à reproduire individuellement la figure sur une feuille blanche.

Ensuite les élèves des binômes « 1 » enverront un message au binôme « 2 » de leur équipe contenant tous les renseignements qu'ils jugent nécessaires pour que ceux-ci puissent construire la figure sans la voir. Les binômes « 2 » feront la même activité (en travaillant sur une autre figure): ils enverront un message à leur binôme « 1 ». ***Attention : vous ne devez pas faire de croquis ou de dessin sur les messages****.*

Si les récepteurs jugent que les informations fournies ne sont pas suffisantes, ils auront le droit de poser par écrit (sous le message) une seule question supplémentaire aux émetteurs.

Les équipes qui auront gagné seront celles qui auront réalisé les deux figures superposables aux deux figures initiales, à 1mm près. »

DÉROULEMENT :

1. Chaque binôme découvre une figure placée dans une enveloppe opaque.
2. Individuellement chaque élève reproduit la figure.

3. Les enfants rédigent les messages. Dès que les messages sont terminés, l'enseignant les apporte aux binômes récepteurs correspondants. Les récepteurs essaient de réaliser la figure. S'ils ne comprennent pas le message, ils peuvent poser des questions aux émetteurs en les écrivant sur la feuille du message.

4. Dès que les deux figures de la même équipe sont réalisées (les enfants ont tous été successivement émetteurs et récepteurs), tous les enfants de l'équipe vérifient avec l'enseignant si les deux figures construites et les deux figures données au départ sont bien superposables.

5. Recueil collectif des résultats : détermination des réussites et des échecs.

Séance 2

Analyse des productions. Réalisation d'une confrontation sur la pertinence et la validité des messages et institutionnalisation des savoirs.

Analyse de situations proposees par de futurs enseignants pour enseigner la division de fractions

Sylvain Vermette, Vincent Martin

Université du Québec à Trois-Rivières

Dans le but de faire ressortir les caractéristiques de situations proposées par de futurs enseignants québécois pour enseigner la division de fractions, une étude a été faite auprès de quatre étudiants en deuxième année de formation au programme du baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire[1] de l'Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR). Une analyse des situations proposées par ces futurs enseignants montre que celles-ci vont au-delà d'un enseignement axé uniquement sur les procédures de calculs, et qu'elles témoignent de certaines limitations conceptuelles, notamment au regard du rôle accordé à la fraction pour les sens de la division en jeu. Des pistes de réflexion pour l'enrichissement de la formation à l'enseignement du concept de division de fractions et des pistes potentielles pour des recherches à venir sont identifiées pour conclure.

Difficultés conceptuelles dans l'apprentissage de la division de fractions

Le domaine des nombres rationnels[2] est traditionnellement difficile même pour les élèves du secondaire. En particulier, le développement du concept de fraction est ardu et s'échelonne sur plusieurs années (Blouin, 2002 ; Mercier et Deblois, 2004). Entre autres, les difficultés rencontrées par les élèves lors des apprentissages reliés aux opérations sur la notion de fraction sont régulièrement soulignées dans des recherches (Lessard, 2011 ; Tirosh, 2000). Bien que la plupart des élèves finissent par apprendre les algorithmes spécifiques aux différentes opérations qui leur sont enseignées, il n'en demeure pas moins que leur connaissance des concepts en jeu reste déficiente dans bien des cas (Moss et Case, 1999). La division de fractions n'y échappe pas, alors que les élèves rencontrent plusieurs difficultés dans son apprentissage. Tirosh (2000) a regroupé les principales difficultés relatives à la division de fractions en trois grandes catégories.

Une première catégorie de difficultés découle d'une utilisation erronée de l'algorithme de calcul. Ces difficultés incluent, par exemple, l'inversion du dividende au lieu du diviseur ou l'inversion du dividende et du diviseur avant de procéder à la multiplication des numérateurs ensemble et des dénominateurs ensemble. On explique généralement ces difficultés comme résultant de la mémorisation de l'algorithme. Quand un algorithme est vu comme une série d'étapes vides de sens, les élèves peuvent oublier certaines de ces étapes ou les changer de façon à ce que leur application mène à des erreurs.

Une deuxième catégorie de difficultés résulte d'intuitions propres à la division. Le passage des opérations sur les nombres naturels aux opérations sur les nombres rationnels constitue un véritable obstacle conceptuel, car les élèves abordent les opérations sur les rationnels avec des connaissances issues de leur travail sur les opérations sur les naturels (Kieren, 1988; Rouche, 1998). Ainsi, certaines de ces connaissances sont utiles, d'autres sont nuisibles. En effet, les élèves ont tendance à généraliser les propriétés d'opérations sur les nombres naturels aux fractions et à interpréter la division en

[1] Au Québec, l'école secondaire comporte cinq années d'étude (12-16 ans).

[2] Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient de deux entiers relatifs (Lessard, 2011). Il peut s'écrire sous la forme d'une fraction ou d'un nombre à virgule.

utilisant principalement un modèle primitif faisant intervenir le sens « partage » de la division. Dans ce modèle de division, on cherche à partager également une quantité entre un nombre connu de groupements. Ici, c'est la valeur d'un groupement qui est recherchée. Or, Poirier (2001) souligne qu'un autre sens est propre à la division, soit le sens « groupement »[3]. Ce sens survient pour sa part lorsque la valeur des groupements est connue. Ici, contrairement au sens « partage », ce n'est plus la valeur d'un groupement qui est recherchée, mais plutôt le nombre de groupements d'une valeur donnée.

Selon Tirosh (2000), ce modèle primitif et partitif de la division est en quelque sorte constitué de trois résultantes du fonctionnement typique de l'opération de division avec les nombres naturels : (a) le diviseur doit être un nombre entier, (b) le diviseur doit être inférieur au dividende et (c) le quotient doit également être moindre que le dividende. Tirosh, Fischbein, Graeber, et Wilson (1993) ont remarqué que les réponses d'élèves aux expressions impliquant une division de fractions peuvent être affectées par ce modèle, par exemple en disant qu'il est impossible de calculer des expressions de division avec un dividende plus petit que le diviseur. Selon Graeber, Tirosh et Glover (1989), la prédominance de ce modèle limite aussi sérieusement la capacité des élèves et des futurs enseignants à conceptualiser et à répondre correctement à des problèmes de division impliquant des fractions.

Enfin, la dernière catégorie regroupe des difficultés qui découlent à la fois d'une compréhension limitée du concept de fraction et de la connaissance inadéquate liée aux propriétés des opérations. De telles inadéquations peuvent être la source de réponses incorrectes à des tâches diverses impliquant la division de fractions. Par exemple, Tirosh (2000) soutient que les élèves peuvent penser que la division est commutative et, par conséquent, croire que $1 \div 1/2 = 1/2$ puisque $1 \div 1/2 = 1/2 \div 1 = 1/2$.

Ce bref examen des catégories de Tirosh (2000) expose comment ces difficultés témoignent d'enjeux conceptuels propres aux concepts de division et de fraction. L'organisation d'un enseignement visant le développement d'une compréhension approfondie de la division de fractions doit prendre en compte ces difficultés afin de permettre aux élèves de les surmonter.

DÉFIS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA DIVISION DE FRACTIONS

Dans l'enseignement des mathématiques aux élèves du secondaire, il est reconnu que l'enseignement du sens de la division de fractions constitue un défi de taille pour les enseignants et leurs formateurs en enseignement des mathématiques (Lessard, 2011). Ce défi soulève de telles difficultés d'enseignement qu'il devient possible de croire que de nombreux enseignants puissent se « replier » sur un enseignement systématique de l'algorithme et sur le repérage de mots clés en contexte de résolution de problèmes écrits.

Une question émerge alors : se pourrait-il que les difficultés rencontrées par les élèves lors de cet apprentissage découlent de l'approche préconisée par les enseignants ? Il ne serait pas étonnant de voir les élèves développer une compréhension limitée du concept et centrée sur l'algorithme avec une approche d'enseignement axée sur l'enseignement des procédures de calcul où peu de temps serait consacré à la compréhension de leur signification conceptuelle (par exemple, en enseignant la division de fractions comme la multiplication par l'inverse).

Ce qui précède peut mener à questionner les méthodes d'enseignement actuelles, car elles peuvent avoir un effet important sur le développement d'une compréhension basée non seulement sur la connaissance du « comment faire » des mathématiques, mais aussi sur le « pourquoi faire ». Dans ce texte, nous avons donc étudié les situations proposées par de futurs enseignants de mathématiques pour enseigner la division de fractions.

---

[3] Il est aussi d'usage de parler de partition et de quotition pour référer respectivement aux sens partage et groupement.

MÉTHODE DE COLLECTE DE DONNÉES ET PARTICIPANTS

Au Québec, l'obtention du brevet en enseignement des mathématiques au secondaire nécessite une formation universitaire de quatre ans. Le programme de formation comporte des cours spécialisés en mathématiques, mais aussi des cours de didactique et de pédagogie. À l'UQTR, le premier cours de didactique concerne les domaines de l'arithmétique et de l'algèbre et il figure à la deuxième année de la grille de cheminement. Dans le cadre de ce cours, les étudiants doivent réaliser un travail qui mène à l'élaboration de situations portant sur un concept propre à l'un de ces domaines mathématiques. Il s'agit en fait de simuler une séance de 75 minutes qu'ils auraient l'occasion de dispenser au secondaire. Un concept est aléatoirement attribué à chacun des étudiants deux semaines avant la date de présentation. Durant celle-ci, les étudiants présentent la séance créée comme s'ils étaient en présence d'élèves du secondaire, les autres étudiants du groupe pouvant interagir en prenant le rôle d'élèves.

Au cours des quatre dernières années, après que les différents sens de la fraction aient été abordés à travers des contextes de comparaison, d'addition, de soustraction et de multiplication de fractions, un étudiant de chacune des cohortes s'est vu proposer le concept de division de fractions pour l'enseignement à des élèves de première secondaire (12-13 ans). La seule consigne donnée à ces quatre étudiants était que les situations proposées devaient favoriser le développement d'une bonne compréhension du concept chez les élèves en leur permettant de l'utiliser et de le transposer dans le cadre de situations signifiantes pour eux. Il est important de spécifier que les sens partage et groupement de la division avaient aussi été abordés préalablement avec des nombres naturels. Aucune consigne n'a été donnée explicitement pour le travail quant à la contextualisation des différents sens de l'opération et aux nombres mis de l'avant, bien qu'une attention soit généralement portée à ces enjeux didactiques dans le cadre du cours.

Dans la section suivante, nous exposons une analyse des situations proposées par ces quatre étudiants pour enseigner le concept de division de fractions. Ce faisant, nous portons un regard spécifique sur les caractéristiques des situations utilisées par ces futurs enseignants pour enseigner la division de fractions. Cette étude multi-cas nous permet de tracer un portrait des situations d'enseignement préconisées par ceux-ci et d'enrichir la compréhension conceptuelle du concept en question.

ANALYSE DES RÉSULTATS

Les résultats montrent que les quatre étudiants sont allés au-delà d'un enseignement axé uniquement sur les procédures de calculs au profit du développement d'une signification conceptuelle. Ces derniers ont tous mis de l'avant des situations de fractionnement impliquant le sens « partie d'un tout » de la fraction[4], et ce, dans le but de donner sens au concept en question et de faire découvrir que diviser revient à multiplier par l'inverse. Toutefois, pour trois étudiants, les situations de fractionnement se sont limitées à deux cas particuliers.

Premièrement, les trois étudiants ont donné sens à la division de fractions en recourant au sens « partage » de la division dans le cas où le dividende est une fraction et le diviseur un nombre entier. Il s'avérait aisé pour eux d'expliquer un partage lorsque celui-ci est fait un nombre entier de fois. Comme exemple, un étudiant a imagé le partage équitable de 8/9 de pizza entre 4 personnes. Il est facile de concevoir que chacun obtient 2/9 de pizza. Les trois étudiants se sont d'ailleurs limités à des exemples où le numérateur de la fraction est un multiple du diviseur. Avec ce type de cas, la multiplication par l'inverse n'apparait pas nécessaire. En effet, un élève pourrait voir un rapprochement avec l'algorithme de la multiplication de fractions et en déduire que diviser deux

---

[4] Dans le sens « partie d'un tout » de la fraction, la fraction a/b quantifie une relation entre un tout et un nombre désigné de ses parties. Un tout est ainsi divisé en b parties égales et on considère un certain nombre a de ces parties.

fractions revient à diviser les numérateurs ensemble et faire de même pour les dénominateurs : $a/b \div c/d = (a \div c)/(b \div d)$. Toutefois, cette procédure est efficace uniquement pour un nombre limité de cas, soit ceux où les numérateurs ont un facteur en commun et les dénominateurs aussi. Il ne s'agit pas ici d'une procédure « générale » dans le sens où elle ne permet pas d'arriver à la réponse voulue pour tous les types de problèmes posés.

Deuxièmement, les trois étudiants ont utilisé le sens groupement de la division dans le cas où le dividende est un nombre entier et le diviseur une fraction, ce qui est contraire au cas qui précède. Il peut en effet paraitre plus simple d'utiliser le sens groupement de la division pour ce type de cas, étant donné qu'il peut être plus difficile pour certains de concevoir un partage lorsque celui-ci n'est pas fait un nombre entier de fois. Par ailleurs, il est intéressant de constater que le troisième étudiant, contrairement aux deux autres, ne s'est pas limité au cas où le numérateur du diviseur est 1 (fraction unitaire). Voici un problème proposé par cet étudiant suivi des explications qui ont été données :

Un coureur veut parcourir une distance totale de 18 km. Sachant qu'il aimerait parcourir 1/3 de km chaque jour, en combien de journées y parviendra-t-il ?

À raison de 1 km par jour, 18 jours seraient nécessaires. Étant donné que la distance réalisée chaque jour serait trois fois moindre que 1 km, nous pouvons alors conclure qu'il faudrait trois fois plus de temps pour atteindre l'objectif désiré soit 54 jours. De la même façon, s'il désirait parcourir 2/3 de km par jour, la distance parcourue chaque jour serait deux fois plus grande en comparaison avec des 1/3 de km et donc, le temps nécessaire serait deux fois moindre soit 27 jours illustrant par le fait même que $18 \div 2/3 = 18 \times 3/2 = 27$. Ici, lors de la division par 2/3, l'étudiant est en mesure de donner du sens à la multiplication par 3, mais aussi à la division par 2. Dans le cas d'une fraction unitaire, il est difficile de donner du sens à l'opération de division puisque celle-ci n'est pas nécessaire, la valeur du numérateur (1) étant l'élément neutre de la division. Comme nous l'avons souligné précédemment, plusieurs difficultés d'élèves peuvent découler d'une application erronée de l'algorithme de calcul. Ici, un élève pourrait être porté à croire que la multiplication suffit ($18 \div 1/3 = 18 \times 3 = 54$). Par ailleurs, l'énoncé du problème pourrait aussi être la cause de difficultés de compréhension chez les élèves, étant donné que la distance parcourue chaque jour, soit un peu plus de 300 mètres, semble peu réaliste.

À partir d'exemples, ces trois étudiants ont mis de l'avant un discours mathématique dirigé vers le développement du raisonnement et de la compréhension. En effet, ceux-ci ont proposé des explications axées sur une compréhension des mathématiques qui n'est pas centrée uniquement sur la connaissance des démarches et des procédures à effectuer (comment faire), mais qui ouvre également sur leurs sens et leurs conditions d'utilisation (pourquoi faire).

Cela dit, est-il possible de donner du sens à une division de fractions pour des cas plus complexes ? Dans ce qui suit, deux problèmes mis de l'avant par le quatrième étudiant pour chacun des sens de la division, accompagnés de leur analyse, sont décrits. Dans le premier problème, le dividende et le diviseur sont représentés par des fractions, tandis que le second problème comprend un nombre fractionnaire et une fraction. Aussi, dans les deux problèmes, le numérateur du diviseur n'est pas 1. Ces exemples illustrent le résultat de l'algorithme et démontrent qu'il est possible d'aller au-delà des cas représentés précédemment afin de donner du sens à une division de fractions. Tout comme pour les exemples proposés par les trois premiers étudiants, les situations mises de l'avant par le quatrième étudiant s'inscrivent dans des situations de fractionnement où le sens « partie d'un tout » de la fraction est mis en valeur.

Problème 1: le sens « partage » de la division

On souhaite repeindre 2/3 de la surface d'un mur intérieur avec un restant de pot de peinture contenant 3/5 litre. Si on répartit de façon égale la peinture disponible, de combien de litres de peinture aurait-on eu besoin si on avait plutôt voulu repeindre le mur en entier ?

Comme il s'avère difficile de répartir équitablement 3/5 litre de peinture sur 2/3 de mur, étant donné que les numérateurs ne se divisent pas de façon entière, il faut alors trouver une fraction équivalente à 3/5 dont le numérateur serait un multiple de 2 comme 6/10.

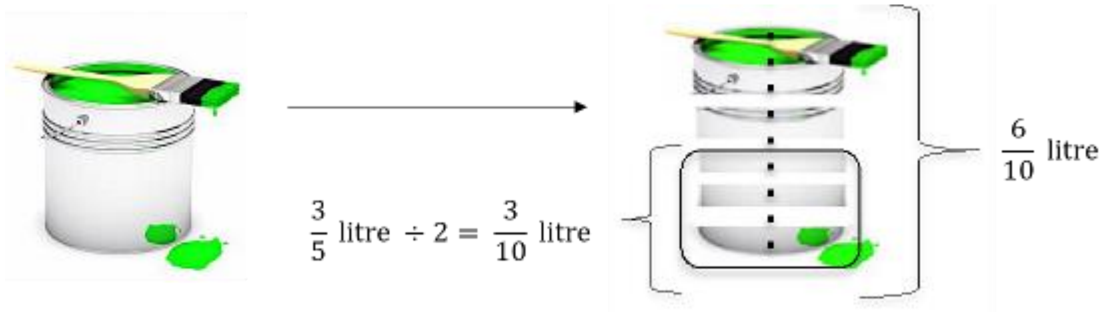


Fig. 1 : La quantité de peinture dans le pot

Répartir uniformément 3/5 litre de peinture sur 2/3 de mur revient donc à répartir 6/10 litre de peinture sur 2/3 de mur. On peut donc déduire que chaque tiers de mur sera recouvert par 3/10 litre de peinture, ce qui illustre la division par le numérateur du diviseur.

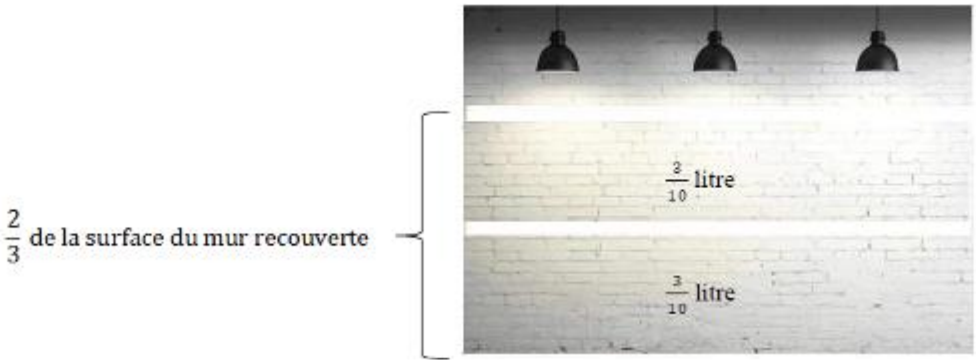


Fig. 2 : La surface du mur recouverte

Maintenant, comment donner sens au quotient obtenu lorsque l'on effectue l'opération 3/5 divisé par 2/3, soit 9/10 ? Il faut alors se rappeler que dans le sens partage de la division, c'est la valeur d'un groupement qui est recherché, dans ce cas-ci, la quantité de peinture nécessaire pour repeindre le mur en entier. Comme un tiers du mur requiert 3/10 litre de peinture, peindre toute la surface du mur, soit une surface 3 fois plus grande, nécessiterait alors 3 x 3/10 litre soit 9/10 de litre de peinture. Ce problème permet donc d'illustrer et donner sens à cette multiplication par l'inverse ($3/5 \div 2/3 = 3/5 \times 3/2$). D'abord, il faut diviser le dividende par le numérateur du diviseur afin de connaître la valeur d'une part, ici pour 1/3 du mur, puis il faut multiplier par le dénominateur du diviseur pour retrouver la valeur du groupement, soit pour le mur en entier dans le cas présent.

Cet étudiant ne s'est pas limité au sens partage de la division. Il a aussi cherché à expliquer le « pourquoi » avec le sens groupement en contextualisant la division de fractions à partir d'un autre problème. Pour le sens groupement, rappelons que contrairement au sens partage, où la valeur d'un groupement est recherchée, c'est le nombre de groupements qui est recherché.

Problème 2 : le sens « groupement » de la division

Julie veut savoir le nombre de portions de 2/5 de tarte que l'on peut créer à partir de 3 tartes et demie ?

On souhaite faire des portions de 2/5 de tarte, alors divisons chaque tarte complète en 5 pointes congrues pour ensuite les regrouper en paquets de 2 afin d'obtenir la portion désirée. Nous avons 3 tartes et demie :

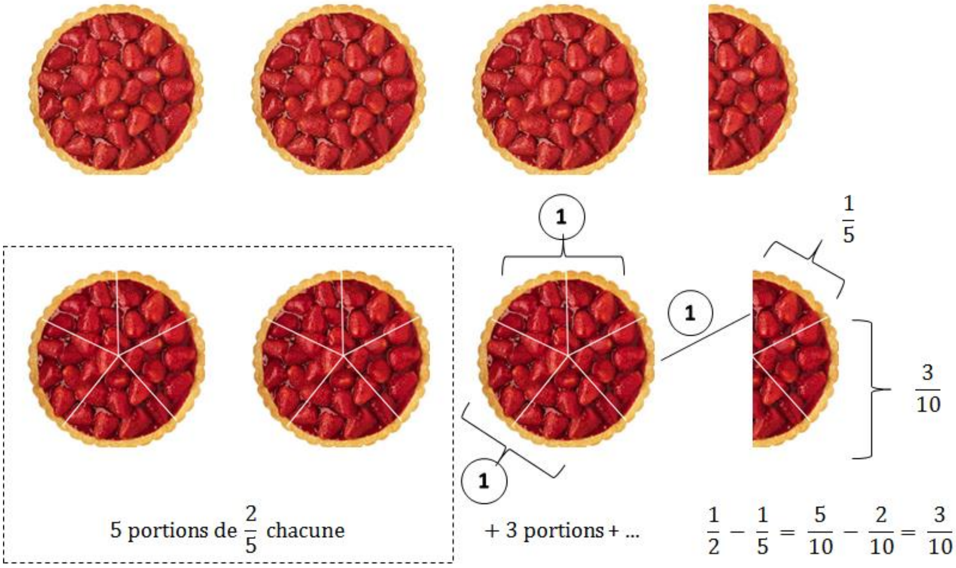


Fig. 3 : Les parts de tartes

Avec les 2 premières tartes, il est possible de créer 5 portions de 2/5 de tarte chacune. Trois autres portions sont également créées avec la 3e tarte et un morceau de grosseur 1/5 provenant de la demi-tarte. Il reste alors 3/10 de tarte. Plusieurs pourraient alors croire que la réponse à la division de 3 tartes et demie par 2/5 serait 8 portions de 2/5 et un reste de 3/10. Cependant, il faut se questionner pour savoir quelle part de la portion désirée il est possible d'obtenir avec le 3/10 de tarte restant. Comme il faut 2/5 ou 4/10 de tarte pour former une portion, le 3/10 de tarte restant équivaut donc au 3/4 d'une portion supplémentaire (3 dixièmes sur les 4 dixièmes désirés) démontrant ainsi que $(3 + \frac{1}{2}) \div \frac{2}{5} = 8 + \frac{3}{4}$.

Discussions sur les résultats et leurs implications

Comme Lessard (2011), nous remarquons que l'enseignement du concept de division de fractions semble constituer un important défi conceptuel pour les (futurs) enseignants. Ainsi, il est vrai que les situations proposées par trois des futurs enseignants de mathématiques que nous avons observées sont très riches, alors qu'elles dépassent toutes un simple enseignement de l'algorithme et qu'elles témoignent d'un désir de contextualiser la division des fractions. Par contre, ces situations nous semblent comporter certaines limitations conceptuelles, compte tenu de l'étendue du concept en jeu. Ces constats quant à la compréhension de la division de fractions que laissent paraitre les situations proposées par les trois premiers cas à l'étude, font écho au modèle primitif d'interprétation de la division de fractions décrit par Tirosh et al. (1993). Comme c'est le cas pour les élèves observés par ces chercheurs, ces trois futurs enseignants conceptualisent le sens « partage » de la division avec le diviseur généralement vu comme un nombre entier inférieur au dividende et où le quotient est habituellement un nombre inférieur au dividende. Ceci pourrait s'expliquer par l'idée que dans le partage d'une quantité en un certain nombre de personnes, la quantité reçue par chacun doit logiquement être plus petite que la quantité à diviser. De plus, il peut être contre-intuitif de partager une quantité en un nombre non entier de personnes. Ceci pourrait justifier pourquoi les futurs enseignants n'ont pas utilisé de fraction au diviseur dans le sens « partage » de la division et qu'ils ont privilégié le sens « groupement » qui semble mieux se prêter à ce type de cas.

Toutefois, le cas du quatrième futur enseignant va au-delà de ce modèle primitif et expose une compréhension plus riche de la division de fractions. En effet, les situations qu'il a proposées se sont avérées plus diversifiées que celles de ses collègues, notamment par une utilisation moins restrictive des fractions aux différentes positions de la division. Celui-ci a donc utilisé des fractions à la fois comme dividende et comme diviseur (et même simultanément) pour les sens « partage » et

« groupement » de la division, en plus de recourir à des nombres fractionnaires et à des fractions non unitaires.

Étant bien conscients du défi que représente l'enseignement de la division de fractions pour les enseignants, nous pensons qu'il est primordial de continuer à réfléchir à des pistes pour contribuer au développement professionnel des enseignants, notamment en tentant de mieux comprendre les difficultés didactiques rencontrées par ces derniers dans ce contexte.

Afin de permettre à leurs élèves de développer un sens approfondi de la division de fractions, il pourrait être pertinent pour les enseignants de proposer des situations touchant aux deux sens de cette opération et mettant en scène des nombres de diverses tailles et de différents types (entiers, fractions, nombres fractionnaires), à la fois à la position du dividende que du diviseur et du quotient. Nous croyons qu'un tel enseignement permettrait aux élèves de développer un modèle plus élaboré que le modèle primitif vu précédemment et ainsi d'ouvrir leur horizon mathématique au regard de la division de fractions.

Par ailleurs, au Québec, les programmes de formation à l'enseignement amènent les enseignants du primaire à enseigner les sens des opérations sur les entiers, mais sans aborder la division de fractions, alors que les enseignants du secondaire doivent enseigner la division de fractions, mais sans revenir sur les différents sens des opérations. Il pourrait donc être intéressant pour les enseignants de la fin du primaire et du début du secondaire de porter une attention spéciale aux passages conceptuels nécessaires à l'apprentissage non seulement de la division, mais également de la multiplication des fractions et sur les liens entre les deux opérations.

De telles pistes de réflexion nous apparaissent porteuses pour enrichir l'expérience d'apprentissage du concept de division de fractions qui sera offerte aux élèves. Celles-ci permettraient de contribuer à identifier des vecteurs pertinents relativement à l'enseignement de la division de fractions pour alimenter la formation initiale et continue à l'enseignement des mathématiques à la fois à la fin du primaire et au secondaire.

En effet, l'importance d'aborder les deux sens de la division de fractions dans la formation à l'enseignement ne fait aucun doute pour nous, car cela nous semble pouvoir contribuer au développement d'une compréhension plus riche de cette opération par les enseignants. Ceci risque fort d'étoffer, en aval, l'expérience d'apprentissage de ce concept qui sera offerte aux élèves. Dans ce sens, nous considérons que la formation initiale à l'enseignement devrait mettre davantage l'accent sur les particularités conceptuelles de cette opération avec ce type de nombre, par exemple en proposant des tâches où les enseignants sont invités à reconnaitre des contextes de division de fractions parmi un ensemble de contextes faisant appel à la fois aux diverses opérations et à leurs différents sens. Nous pensons également à une situation où il faudrait formuler différentes déclinaisons d'une division de fractions à partir d'un même contexte, un peu dans l'esprit de changer l'inconnue dans l'opération en jeu. Par ailleurs, nous considérons qu'une tâche d'élaboration de situations pour l'enseignement, comme nous l'avons utilisée dans le cadre de cette recherche, constitue un contexte intéressant pour alimenter le développement des futurs enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Blouin, P. (2002). *Dessine-moi un bateau : la multiplication par un et demi*. Montréal. Québec : Éditions Bande Didactique.

Graeber, A. O., Tirosh, D. & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 95-102.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (dir.), *Number Concepts and Operations in the middle Grades* (p. 162-181). Reston, Virginia : Lawrence Erlbaum Ass.

Lessard, G. (2011). *Acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage dans la conception et la gestion de situations-problèmes impliquant des nombres rationnels* (Thèse de doctorat). Université de Montréal, Montréal.

Mercier, P. & Deblois, L. (2004). Passage primaire-secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions. *Revue Envol*, *127*, 17-24.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122-147.

Poirier, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire. Notes didactiques*. Montréal : ERPI.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions, *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 5-25.

Tirosh, D. Fishbein, E. Graeber, A. & Wilson, J. (1993). *Conceptual adjustments in progressing from whole to rational numbers*. Final report of the United States-Israël Binational Science Grant, Tel Aviv, Israël: Tel-Aviv University.

ACTIVITE DE CLASSEMENT AVEC UNE ELEVE PRESENTANT DES TROUBLES DU SPECTRE AUTISTIQUE

Jérémie Vial

Etudiant, Université de Genève

Cet article s'intéresse à un centre médico-pédagogique genevois accueillant 11 enfants âgés de 3 à 7 ans. Il s'agit d'une institution préscolaire et scolaire, et sa particularité est qu'elle accueille des élèves qui présentent pour la plupart des troubles du spectre autistique et /ou un handicap mental. Les élèves sont tous, avec une plus ou moins grande intensité, confrontés à des difficultés dans des domaines tels que la communication et la socialisation. De plus, tous présentent des intérêts restreints et des particularités sensorielles. Certains ont des comportements répétitifs comme par exemple la manipulation d'objets ou de mouvements corporels peu habituels. En raison de la particularité de la population, l'enseignement se fait à l'aide de méthodes et outils d'apprentissages spécifiques à ce type de population. Le fonctionnement mis en place dans cette institution est inspiré du modèle TEACCH. Il s'agit d'une méthode pédagogique structurée au niveau du temps, de l'espace et de l'utilisation de repères visuels. La méthode PECS est également utilisée en parallèle et consiste à favoriser la communication par des échanges d'images.[15]

Généralement les élèves ne sont pas plus de trois par salle avec la présence d'au moins un adulte, que ce soit un enseignant ou un éducateur. La plupart des élèves ne parlent pas, mais pour quelques-uns, le langage est en émergence.

En mathématiques, chaque élève a son propre niveau nécessitant de différencier les activités proposées.

Nous sommes ici dans un contexte où les capacités des élèves sont très limitées. C'est pourquoi ce que nous travaillons avec eux constitue les prémices des notions mathématiques. En tant qu'enseignant, il nous est difficile de nous rendre compte du niveau de l'élève, car il est parfois difficile de distinguer ce que les élèves n'arrivent pas à faire ou ne veulent pas faire. De plus, une notion peut être acquise lors d'une séance et ne plus être remobilisée par l'élève lors de la suivante. C'est la raison pour laquelle nous proposons des exercices et examinons comment les élèves réagissent et s'ils sont capables de les réaliser. Les objectifs fixés sont donc définis en fonction de leurs capacités apparentes. Dans la suite de cet article, nous analysons une tâche pensée et réalisée avec une seule élève. Cette activité est le fruit de plusieurs tentatives ayant pour but de trouver la plus adaptée possible à l'élève, tant au niveau du matériel proposé, qu'au niveau des objectifs.

CHOIX DE L'ACTIVITÉ

L'activité est donc prévue pour une seule élève et ne dure pas plus de dix minutes. Il s'agit d'une élève âgée de 6 ans qui s'intéresse volontiers aux tâches que nous lui proposons. Elle peut comprendre une consigne visuelle qui peut être par exemple un geste d'adulte. Elle parvient à reproduire ce geste par imitation de l'adulte lorsque ce dernier le reproduit plusieurs fois d'affilée. Souvent quand un adulte vient à ses côtés, elle parvient à mieux résoudre les tâches qui lui sont proposées : la présence d'un adulte la rassure. Il nous est cependant parfois difficile de distinguer ce

[15] Cf. bibliographie pour plus d'informations sur les méthodes TEACCH et PECS

qu’elle n'arrive pas à faire de ce qu'elle n'a pas envie de faire. De plus, face à une tâche difficile, l’effort engagé peut vite lui faire perdre son attention.

Ainsi, nous choisissons une activité de tri selon un critère : soit la forme soit la couleur. Cette notion étant en émergence chez cette élève, nous décidons donc de nous focaliser sur le tri de perles par couleurs. Les premières observations montrent que l’élève, en présence d’une seule couleur, mais de formes différentes, ne trie pas. Par contre, le même exercice avec des perles d’une même forme, mais de couleurs différentes semble donner davantage de résultats. Pour cette raison, nous avons décidé de creuser dans cette direction.

L’activité choisie consiste donc à reproduire une suite de perles sur une tige selon un modèle donné. L’idée de montrer un modèle vise à introduire la notion de tri par couleur à l’élève. C’est avec un boulier à une seule tige que nous travaillons. L’élève doit donc enfiler les perles sur une tige selon le modèle que nous lui proposons. Le modèle est une photo du résultat attendu et représente des perles qui sont toutes de la forme carrée, mais alternant les couleurs jaunes et vertes. Un seul critère de tri est donc pris en compte : la couleur.

Fig. 1 : Matériel utilisé

Fig. 2 : Tâche proposée à l’élève

L’élève dispose du bon nombre de perles et des bonnes couleurs. Autrement dit, il n’y a pas de distracteur.

Afin de résoudre cette tâche, l’élève doit regarder quelle est la couleur de la perle tout en bas de la tige et savoir que c’est la première à prendre dans le bac. Une fois la première perle placée sur la tige, elle doit reproduire la même opération avec la perle suivante, qui se trouve juste au-dessus, et ainsi de suite. Elle pourrait également repérer l’alternance des couleurs des perles, et ainsi les enfiler plus rapidement.

Cette activité se déroule sur un temps très court, en raison de la faible capacité de concentration et d’attention de l’élève. En effet, les enfants présentant des troubles du spectre autistique ont très vite tendance à se réfugier dans des recherches sensorielles[16] et perdent leur attention. C’est la raison pour laquelle dix minutes sont prévues pour cette activité de mathématiques.

[16] Les personnes atteintes d’autisme peuvent présenter une hypo- ou une hypersensibilité sensorielle. Les sensations qu’ils ressentent ont donc un impact plus ou moins envahissant sur leur corps. Souvent, ces personnes se réfugient dans

ANALYSE MATHÉMATIQUE

Objectif du PER

Nous nous trouvons ici dans des préapprentissages scolaires ne correspondant pas encore au niveau 1ère Harmos. Toutefois, nous tendons vers des objectifs de 1ère Harmos, bien que pour la plupart des élèves de notre institution cela dépasse leurs capacités. Le lien possible concerne le MSN 11 : « Explorer l'espace en classant des formes géométriques selon des critères divers (forme, taille, couleur, etc.) ». Cet objectif est celui vers lequel nous tendons avec notamment les éléments de la progression « manipulation, observation et reconnaissance de formes géométriques simples : solides et formes planes » et « classement d'objets selon un critère (forme, taille, orientation) ».

Lien avec les moyens d'enseignement

En nous référant aux moyens d'enseignement de 1ère Harmos, il est à nouveau difficile de trouver une activité qui soit en lien direct avec cette notion. Les exercices s'en rapprochant le plus se trouvent dans le module 1 : « Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement ». En effet, ce module consacre un chapitre entier à l'objectif qui figure en tête du plan d'étude. Selon Ging, Sauthier et Stierli (1996), « favoriser une bonne structuration mentale, c'est-à-dire développer le raisonnement logique, la capacité de situer, de classer, d'ordonner, celle aussi de comprendre et de représenter une situation » (p.37).

L'activité la plus proche du point de vue des objectifs serait « le faux jumeau ». Une activité où l'élève est face à des cartes sur lesquelles sont représentés des clowns et à partir desquels ils doivent créer une suite dont chaque clown disposé doit posséder une, et une seule, différence par rapport à celui d'à côté. Cette activité implique, tout comme la nôtre, la discrimination d'éléments, mais avec un niveau de complexité bien supérieur du fait qu'il ne s'agit pas d'une tâche de reproduction à partir d'un modèle. Les élèves du contexte discuté sont loin d'être capables de réaliser une telle tâche.

Erreurs fréquemment rencontrées

Concernant la notion travaillée, les élèves montrent fréquemment des erreurs dans la sélection des éléments à trier. En effet, ils peuvent se tromper au moment où ils doivent choisir les bons éléments qui feront partie de la série de perles à reproduire, que cela soit en présence de perturbateurs ou non. Ils peuvent également se tromper au moment de trier les éléments, malgré une bonne sélection de ces derniers, en inversant des éléments par exemple. Il est important de souligner ces erreurs possibles, car « en l'absence d'un programme clairement établi pour les classes de l'enseignement spécialisé, on peut même penser que les erreurs contribuent à légitimer l'enseignement qui s'y trouve dispensé : tant que les élèves se trompent et commettent des erreurs, n'est-ce donc pas que l'enseignement proposé était utile ? » (Cange & Favre, 2003, p.208).

ANALYSE DIDACTIQUE

Objectif de l'activité

L'objectif général de cette activité vise le classement des perles de même forme selon deux couleurs à partir d'un modèle.

---

l'autostimulation sensorielle telle que regarder les lumières, agiter un objet devant ses yeux, taper sur ce qui l'entoure, se boucher et déboucher les oreilles, etc. et se déconnectent ainsi de l'instant présent.

Stratégie de base

J'appelle « stratégie de base » une stratégie qui se révèle rapidement inefficace et qui oblige l'élève à réfléchir à une autre stratégie de résolution de la tâche. Pour cet exercice, cela serait de prendre n'importe quelle perle sans regarder sa couleur et de l'enfiler sur la tige. Celle-ci ne conduit pas, en principe, à la solution correcte. Une autre stratégie de base serait de consulter le modèle une fois et de ne plus se référer à chaque perle que l'on enfile. Cette stratégie conduit à une solution qui a de fortes chances de ne pas être totalement correcte.

Stratégie visée

La stratégie visée est celle que l'on attend de l'élève. Elle permettra par la suite de passer à la stratégie optimale. Ici, elle consisterait à regarder dans un premier temps le modèle. Sur le modèle, il faut repérer la couleur de la première perle, c'est-à-dire celle qui est tout en bas de la tige, et prendre la perle de la même couleur et l'enfiler sur la tige. Ensuite, consulter à nouveau le modèle pour connaître la couleur de la perle que l'on doit prendre ensuite en regardant la perle qui se trouve juste au-dessus de l'autre, et ainsi de suite.

Stratégie optimale

La stratégie optimale est celle qu'appliquerait l'adulte, c'est-à-dire l'expert. Elle serait de regarder une fois le modèle et de repérer que les perles sont disposées selon le schéma jaune-vert-jaune-vert…, de le reproduire en commençant par la bonne couleur et sans devoir à chaque fois revenir au modèle, étant donné que l'enchaînement des couleurs se répète de manière continue. À ce moment, l'élève doit savoir où s'arrêter, soit en se fiant perceptivement à la place occupée sur la tige (ou la place restant inoccupée), soit par dénombrement des perles.

Variables et effets sur les stratégies

Sur quelles variables didactiques est-il possible de jouer concernant cette tâche ?

La première que nous pouvons mettre en évidence serait de jouer sur le nombre et la forme des perles à disposition, que ce soit celles proposées sur le modèle ou celles à sélectionner par l'élève afin de reproduire le modèle. En ajoutant par exemple des perles d'une troisième couleur, qui ne serait pas présente sur le modèle, cela obligerait l'élève à devoir discriminer celles qui sont pertinentes ou non pour l'assemblage. Si c'est sur le modèle qu'une couleur est ajoutée, les motifs à repérer seront plus complexes. Nous pourrions également faire varier la forme des perles en augmentant le nombre de critères à prendre en compte (deux à la place d'un).

Une autre variable serait de proposer un modèle n'ayant pas de régularité. Par exemple, au lieu d'un modèle vert-jaune-vert-jaune-vert-jaune … proposer un modèle avec des perles disposées aléatoirement. En termes de stratégies cela implique, pour l'élève, de consulter plusieurs fois le modèle, car il sera beaucoup plus difficilement mémorisable.

Nous pourrions également jouer sur le fait de n'avoir le modèle visible qu'un certain nombre de fois ou que pendant un certain temps. Cela aurait comme effet sur les stratégies d'obliger l'élève à mémoriser le motif et donc à envisager qu'il existe une régularité dans le modèle à reproduire.

Une autre variable possible pourrait être de proposer un modèle qui demande une suite de perles selon deux critères : la forme et la couleur. En mélangeant ces deux critères, cela aura comme effet sur les stratégies une sélection beaucoup plus réfléchie et minutieuse des perles après l'observation du modèle. Il faut dans un premier temps choisir un des deux critères, par exemple la couleur, et ensuite chercher parmi les perles de cette couleur celles qui ont la forme adéquate.

Une dernière variable serait de proposer un boulier à deux tiges proposant sur une des tiges le modèle à reproduire. Les stratégies utilisées permettraient alors d'avoir une validation quasi immédiate des perles posées sur la deuxième tige.

Validation et rétroaction

L'élève peut contrôler elle-même en comparant ce qu'elle a produit avec le modèle qui est à sa disposition et même se corriger, en comparant chaque perle disposée sur la tige avec chaque perle du photo-modèle. Il convient ici de préciser que l'élève peut théoriquement le faire, mais dans la réalité de notre contexte, elle n'en est pas encore capable, car elle perd immédiatement sa concentration une fois la tâche complétée.

Institutionnalisation

En ce qui concerne l'institutionnalisation, nous sommes face à une grande difficulté avec cette population d'élèves. En effet, nous pouvons certes verbaliser la procédure de résolution de l'exercice, mais ce n'est pas sûr qu'elle se souvienne d'une leçon à l'autre de ce qui a été fait. L'élève ne parlant pas, nous ne pouvons pas lui demander de verbaliser non plus. La seule forme d'institutionnalisation que nous pouvons faire est de refaire l'exercice devant l'élève en verbalisant les actions. Dans la réalité, une fois une tâche finie, il est difficile de garder l'attention de l'élève.

Déroulement effectif de l'activité

Cette activité a nécessité une organisation conséquente, dans le sens où elle a réclamé toute notre attention, alors que deux autres élèves étaient présents et peu autonomes. Ci-dessous, nous décrivons le déroulement de l'activité avec l'élève concernée. La tâche a été donc accompagnée d'une consigne verbale, en attirant l'attention de l'élève sur le modèle photo en le pointant, puis en pointant la tige vide placée devant l'élève.

Dans un premier temps, elle a directement pris les perles une à une et a commencé à les enfiler sur la tige aléatoirement sans les regarder. Nous avons observé qu'elle réalisait la tâche en regardant ailleurs, mais en jetant des coups d'œil de temps en temps à ce qu'elle était en train de faire. Nous supposons qu'elle regarde de biais ce qu'elle fait, ou alors qu'elle enfile les perles en se basant sur les sensations dans ses mains pour viser le trou de la perle.

Nous l'avons interrompue afin de lui montrer le modèle en photo afin de lui signifier ce qui est attendu. Il a été difficile d'attirer l'attention de l'élève sur la photo posée devant elle. Nous avons fini par placer la photo verticalement à côté de la tige afin qu'elle puisse constater la correspondance entre les deux objets. En même temps nous verbalisions à nouveau qu'elle doit reproduire la suite de perles et lui pointions le modèle, puis la tige vide. Ne voyant toujours pas de changement dans son comportement, nous avons pointé la perle tout en bas de la tige sur la photo, tout en lui verbalisant qu'elle devait commencer par mettre une perle de couleur verte. Malgré ce pointage, l'élève ne voyait visiblement pas où nous voulions en venir. Nous avons alors pointé une perle verte dans le bac en lui disant de la prendre. D'emblée elle a pris une autre perle au hasard, de la mauvaise couleur. Nous avons donc fait le geste en guidance avec elle. Ensuite, nous lui avons indiqué qu'elle devait prendre une perle jaune, en pointant la photo et en le verbalisant. Elle n'a pris la perle de bonne couleur que lorsque nous lui avons montré précisément laquelle prendre dans le bac. Pour la suivante, elle a fini par comprendre quelles perles prendre, mais uniquement grâce à des indications verbales concernant la couleur.

Bilan

Le déroulement effectif de l'activité nous montre que cet exercice n'a pas été facile pour l'élève, notamment dans la compréhension de nos attentes. Ses réussites montrent que le progrès est en chemin, mais ses difficultés traduisent que son niveau de transposition de l'image à la réalité est encore en construction. Notre objectif « classement des perles de même forme selon deux couleurs à partir d'un modèle » n'est donc pas encore atteint. L'élève a nécessité beaucoup d'étayage de l'adulte, que ce soit verbalement ou par le pointage. Lorsque l'on travaille avec des élèves présentant des troubles du spectre autistique, il est difficile de se rendre compte du niveau de représentation de l'élève. Dans quelle mesure est-il capable de transposer une représentation imagée à la réalité ? Notre modèle a-t-il finalement un quelconque sens pour l'élève ?

En guise de régulation je proposerais de montrer à l'élève un modèle concret, c'est-à-dire sur une autre tige. C'est avec le temps et en proposant régulièrement ce type de tâche que cette élève va y arriver. Au fil des leçons, des tout petits progrès vont être visibles, mais ces derniers sont en réalité de très grands pas pour elle.

Bibliographie

Cange, C. & Favre, J.-M. (2003). L'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé est-il pavé de bonnes analyses d'erreurs ? In C. Mary, & S. Schmidt (Ed.), *Education et Francophonie* (vol. 31, pp.199-217). ACELF : Ottawa.

Ging, E., Sauthier, M.-H. & Stierli, E. (1996). *Mathématiques 1P* (livre du maître, fichier d'élèves et fichier de classe). Neuchâtel : COROME.

https://www.autisme.ch/autisme/therapies/pecs, consulté en janvier 2017

https://www.autisme.ch/autisme/therapies/teacch/description-du-programme-teacch, consulté en janvier 2017

Rapport personnel a l'objet hasard dans l'enseignement secondaire au Benin

Henri Dandjinou, Alain Bronner

IMSP, Université d'Abomey-Calavi, Bénin

Université de Montpellier et Laboratoire LIRDEF, France

Introduction

Dans le système scolaire béninois, les probabilités s'enseignent pour la première fois dans les classes terminales (17-18 ans). Les programmes en vigueur recommandent l'étude du « vocabulaire des probabilités », terme regroupant des notions élémentaires des probabilités, dont celle d'expérience aléatoire. Cette dernière dépend de la notion controversée de hasard qui n'est abordée nulle part dans les programmes de mathématiques. En général, le hasard intervenant dans le calcul des probabilités au secondaire est le hasard « bénin », celui obéissant aux théorèmes limites (Lahanier-Reuter, 1999). Plus spécifiquement, le hasard bénin le plus fréquent dans le calcul des probabilités est celui du « tirage au sort » qui intervient dans les jeux de hasard. Dans le but d'appréhender les difficultés rencontrées par les élèves en probabilités, nous nous intéressons dans notre étude à l'apprentissage de la notion de hasard. Il s'agit pour nous d'évaluer le rapport personnel des élèves à la notion de hasard à l'issue d'un enseignement des probabilités. Dans ce travail, nous présentons dans un premier temps l'étude de l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire, avant d'étudier dans un second temps le rapport à la notion de hasard chez les élèves ayant fraîchement suivi des cours de probabilités.

Problématique

L'évolution non linéaire de la notion de hasard à travers l'histoire depuis Aristote jusqu'à Laplace montre que des rapport au hasard constituent un obstacle épistémologique au calcul des probabilités (Girard, 2001b), comme le précisent Chrétien et Gaud (1998, p. 82) : « La notion de hasard fournit un exemple remarquable de l'obstacle épistémologique selon Bachelard ». En effet, par rapport à la notion de hasard, Chrétien et Gaud relèvent à travers des exemples de phénomènes aléatoires donnés par les élèves, plusieurs types de rapports personnels qui remettent en cause par exemple le principe de causalité (Chrétien & Gaud, 1998). De même, des expériences réalisées par Girard (2001b) ont montré que les étudiants ont des rapports différents au hasard, faisant de ce dernier un concept difficile à définir. Parlant d'obstacles, Brousseau (1998) les définit comme des connaissances récurrentes qui résistent à l'établissement d'une connaissance meilleure et les répartit en obstacles de différentes origines (épistémologique, ontogénique, sociale et culturelle). Dans ce sens, il existe des obstacles à la notion de hasard, et qui pourraient être des causes des difficultés rencontrées par les élèves dans l'étude des probabilités. D'abord, Piaget et Inhelder (1951) ont montré que l'enfant du stade de développement préopératoire a tendance à considérer que l'éventualité la moins fréquente, ou à l'inverse celle qui est plus fréquente a plus de chance d'être réalisée. Ils ont désigné par le terme « compensation » le premier de ces deux rapports. Ce qui signifie que la pensée de l'enfant jusqu'à un certain âge est un obstacle d'ordre ontogénique à la notion de hasard. Dans le même registre, Lévi-Bruhl (1960) note l'absence du hasard dû à la fatalité dans les sociétés qu'il a qualifiées de mentalité primitive, dont les caractéristiques sont perceptibles dans les pays de l'Afrique subsaharienne, faisant de cette mentalité primitive un obstacle culturel à la notion de hasard.

Depuis l'introduction des probabilités dans les programmes béninois, dans les années 60-70, la notion d'expérience aléatoire est enseignée en considérant que la notion de hasard est un acquis pour les élèves, ce qui pourrait constituer un obstacle didactique au calcul des probabilités. C'est pour cela qu'il nous semble important d'étudier le rapport des élèves béninois au hasard. Pour ce faire, nous

nous posons la question de savoir si les conditions actuelles de l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire au Bénin permettent d'espérer chez les élèves un rapport personnel conforme au hasard du « tirage au sort ». Nous conjecturons que la manière très rapide dont la plupart des enseignants évacuent cet enseignement ne garantit pas la déstabilisation des obstacles énumérés ci-dessus.

CADRE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Cadre théorique

Pour étudier les connaissances des élèves, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) de Chevallard (1992), à travers la notion de rapport personnel $R_X(O)$ du sujet élève X à un objet d'enseignement O, qu'il définit comme la connaissance et toutes les relations que le sujet X a de l'objet O. Nous articulons ce cadre avec la théorie de Brousseau (1998) relative à la notion d'obstacle, déjà présentée plus haut. Dans les programmes béninois, l'objet hasard a pour habitat la notion d'expérience aléatoire, dont l'enseignement donne l'occasion implicite d'une première rencontre. Par ailleurs, notre étude étant réalisée juste après que les élèves ont étudié les probabilités en classe, nous sommes amenés à étudier la transposition didactique (Chevallard, 1991) de la notion d'expérience aléatoire.

Enfin, nous ajoutons à ces cadres les travaux de Piaget (1951) et de Lévy-Bruhl (1960) d'une part qui font de certains rapports au hasard des obstacles ontogénique et culturel, et d'autre part de ceux de Maury (1985) que nous avons exploités dans nos analyses.

Méthodologie de recherche

Notre méthodologie repose sur l'analyse des réponses des élèves à un test, en vue d'identifier des erreurs régulières relatives à la notion de hasard. Avant cela, il a fallu analyser la manière dont cette notion est enseignée. Plus précisément, nous avons :

- réalisé au cours de l'année scolaire 2012-2013 des enregistrements audio des séances de cours de probabilités dans quatre classes terminales, constituant un ensemble de 116 élèves, tenues par deux professeurs certifiés de mathématiques ;
- récupéré les notes de cours des élèves et la fiche pédagogique d'un des deux professeurs ;
- administré aux élèves des quatre classes citées ci-dessus un test portant sur le calcul des probabilités, comportant sept exercices et dont l'un vise l'étude de l'apprentissage de la notion de hasard ;
- réalisé en 2014 auprès de quatre-vingts enseignants ayant dispensé des cours de probabilités une enquête portant entre autres sur l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire.

Les enregistrements audio, les notes de cours des élèves, la fiche pédagogique ainsi que les réponses des enseignants au questionnaire ont servi à étudier l'enseignement de la notion d'expérience aléatoire, tandis que les réponses des élèves au test ont permis d'identifier les traits significatifs des rapports personnels au hasard. Il est à noter que 100 élèves parmi les 116 ayant suivi les cours enregistrés ont accepté volontairement de participer au test.

ENSEIGNEMENT DE LA NOTION D'EXPÉRIENCE ALÉATOIRE AU BÉNIN

Deux modèles de textes de savoir relatifs à la définition de la notion d'expérience aléatoire existent au niveau de l'enseignement mathématique universitaire et des travaux de recherche en didactique des mathématiques. La définition la plus fréquente, au niveau universitaire, est celle qui la caractérise uniquement par le hasard comme dans la définition suivante proposée par Girard (2001a, p. 141) : *« une épreuve aléatoire est donc simplement une expérience dont on ne peut ni prévoir, ni calculer le résultat »*. Nous la nommons « modèle universitaire » (MU). Le deuxième modèle que nous nommons « modèle didactique » (MD) est caractérisé à la fois par le hasard et par la connaissance préalable des résultats. Selon ce modèle, une expérience aléatoire est une expérience où le hasard intervient et dont on peut connaître les résultats possibles (Henry, 2001). Les modèles MU et MD ont en commun l'imprévisibilité du résultat mais diffèrent par la connaissance des issues possibles.

Au Bénin, on ne retrouve aucune trace d'une définition quelconque de la notion d'expérience aléatoire dans les instructions officielles de l'enseignement secondaire. Toutefois les deux modèles présentés ci-dessus se retrouvent séparément dans l'apprêt didactique constitué des manuels de mathématiques des classes terminales.

Au niveau de l'enseignement, face au manque d'indications des instructions officielles sur le modèle de définition à enseigner, l'un des deux enseignants dont nous avons enregistré des séances de cours a enseigné le modèle MD, tandis que le second a enseigné le modèle MU. Cette tendance reste confirmée par les réponses des enseignants au questionnaire, selon lesquelles certains enseignants choisissent d'enseigner le modèle MU et d'autres le modèle MD.

Globalement, dans la définition de la notion d'expérience aléatoire, il n'y pas d'écart entre le savoir savant et le savoir à enseigner, ni entre ce dernier et le savoir enseigné, puisqu'on retrouve les deux modèles à tous les niveaux de savoir. Par ailleurs, il importe de souligner que dans l'enseignement des probabilités, le hasard n'est pas la préoccupation, ni des institutions d'enseignement, ni de la pratique enseignante.

LES TYPES DE RAPPORTS À LA NOTION DE HASARD CHEZ LES ÉLÈVES

Nous proposons dans cette section d'étudier le rapport des élèves à la notion de hasard en analysant leurs réponses à l'exercice du test qui vise cette notion.

Analyse a priori de l'exercice du test

PRÉSENTATION DE L'EXERCICE

L'exercice qui a servi à recueillir le rapport personnel des élèves à la notion de hasard porte sur le lancer de dé et s'énonce comme il suit.

On lance onze fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on obtient les résultats suivants : 2 – 5 – 3 – 4 – 1 – 1 – 6 – 5 – 2 – 3 – 6. Quel résultat obtiendrait-on si on lançait le dé une douzième fois ? Argumente ta réponse.

ANALYSE A PRIORI ET GRILLE D'ANALYSE

Une situation semblable à l'exercice précédent a été utilisée par Maury (1985) pour étudier la notion d'indépendance d'expériences aléatoires chez des élèves de quatrième (13 à 14 ans) avant tout enseignement des probabilités. Il était alors question que les élèves prédisent le résultat du quatrième lancer d'une pièce de monnaie, sachant que les résultats des trois premiers lancers sont dans l'ordre face, pile, pile. Nous la reprenons ici avec des lancers de dé chez des élèves de terminale, qui ont déjà reçu un enseignement en probabilités. L'équirépartition des résultats, sous-entendue dans l'exercice, vient du fait que la question d'un dé non équilibré n'est jamais posée, et par effet de contrat didactique, cette question ne se pose pas davantage pour les élèves.

La prise en compte des résultats obtenus par Maury (1985.), de ceux de Piaget (1951) et de Lévy-Bruhl (1960) nous permet d'envisager trois types de réponses que nous nommons ici respectivement « tirage au sort », « compensation » et « fatalité ». La classe « tirage au sort » est caractérisée par la réponse qui consiste à dire que le résultat d'un douzième lancer peut être 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, en argumentant que le résultat est aléatoire. Le rapport « compensation » est celui que nous avons expliqué plus haut et qui est évoqué par Piaget et Inhelder (1951) chez les enfants du stade de développement préopératoire. L'élève de cette classe va affirmer que le résultat du douzième lancer serait 4, le seul numéro qui n'est pas répété dans la suite des résultats des onze premiers lancers. Le type de réponses « fatalité » est celui comportant les réponses dans lesquelles le résultat est lié à une croyance qui ne reconnait pas la nature aléatoire de la situation. C'est le type de rapports relevé par Lévy-Bruhl (1960) au niveau de la mentalité primitive. L'élève de cette classe indiquera simplement que le résultat du douzième lancer dépend du pouvoir surnaturel de celui qui a lancé le dé.

Les trois classes de réponses présentées ci-dessus constituent une première grille pour l'analyse a priori des réponses des élèves à l'exercice du test.

Analyse des résultats

Il nous a été possible de regrouper les réponses des élèves en quatre catégories. Deux sont en lien avec l'analyse a priori, nommées « tirage au sort » et « compensation ». Mais il nous a fallu ajouter deux autres catégories, que nous avons nommées « constance » et « rapport non identifié ». Il nous semble que les réponses proposées par les élèves ne dépendent pas des textes de savoir MU et MD de la définition de l'expérience aléatoire enseignée.

La catégorie « tirage au sort »

Le hasard du « tirage au sort » est celui dont il est question dans l'enseignement des probabilités dans les collèges et lycées (Lahanier-Reuter, 1999). C'est l'appréhension du hasard qui permet de comprendre qu'on ne peut pas prévoir le résultat du douzième lancer. Un bon nombre d'élèves ont montré un rapport personnel conforme au hasard du « tirage au sort », comme le prouvent les réponses ci-après.

- Soit A le résultat qu'on obtiendrait au douzième lancer. A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, car c'est une expérience aléatoire.
- 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6.
- On ne peut pas donner le résultat avec certitude, car c'est une expérience dont on ne peut pas connaître le résultat à l'avance. D'où c'est une expérience aléatoire.

La catégorie « compensation »

Dans la catégorie « compensation », nous classons les élèves ayant soutenu que le résultat du lancer est 4, avec à des mots près l'argument consistant à remarquer que parmi les onze autres lancers, on a deux fois chaque numéro que comporte le dé sauf le numéro 4 qui est apparu une seule fois. Le type de rapports « compensation », qui s'observe ici chez des élèves qui sont tous du stade opératoire formel, relève d'un obstacle ontogénique, qui serait dû au fait que la notion de hasard n'a pas été l'objet d'une étude avec les élèves. Ce qui conforte la position de Fischbein et al. (1969, p.16) selon laquelle :

« L'évolution mentale ne prépare, en réalité, qu'une série de potentialités. Leur mise en valeur effective ne peut se réaliser que par un exercice systématique, de longue durée, au cours de ces stades de l'évolution intellectuelle. »

Autrement dit, il ne suffit pas d'être du stade opératoire formel pour avoir un rapport personnel conforme à l'objet hasard.

La catégorie « constance »

La catégorie que nous nommons « constance » est composée d'élèves provenant de deux classes, où il a été essayé l'enseignement de la probabilité à partir de l'approche fréquentiste. Dans cet essai, fait à partir de lancers de dé, la probabilité d'un événement avait été présentée comme la valeur autour de laquelle la fréquence de l'événement oscille suite à un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire. C'est ce qui aurait peut-être conduit les élèves de ce groupe à proposer le dernier numéro de la suite des résultats des onze premiers lancers qui est en même temps le plus grand numéro du dé, comme dans les réponses suivantes :

- « On obtiendrait 6, car lorsqu'on va lancer le dé une douzième fois, le nombre 6 restera constant » ;
- « On obtiendrait le même résultat, parce que même si on lance une douzième fois, le résultat va se présenter comme une limite ».

En tant qu'effet d'un enseignement, le type de rapports « constance » constitue un obstacle didactique relevant de la responsabilité de l'enseignant.

LA CATÉGORIE « RAPPORT NON IDENTIFIÉ »

Certains élèves nous ont donné des réponses que nous n'avons pas pu situer par rapport à une régularité constatée. Ces élèves donnent l'impression de ne pas comprendre ce dont il est réellement question. Les exemples suivants sont quelques-unes des réponses de ce groupe :

- « On obtient le double des résultats lorsqu'on lance onze fois » ;
- « Le résultat qu'on obtiendrait si on lançait le dé une douzième fois est C_{12}^{6} ».

Nous regroupons ces élèves dans la catégorie « rapport non identifié », que nous complétons par d'autres élèves qui ont répondu à la question par la mention « aucune idée ». Certains n'avaient certainement pas compris ce qu'est une expérience aléatoire.

La répartition quantitative des groupes d'élèves ci-dessus présentées se résume par le graphique ci-après.

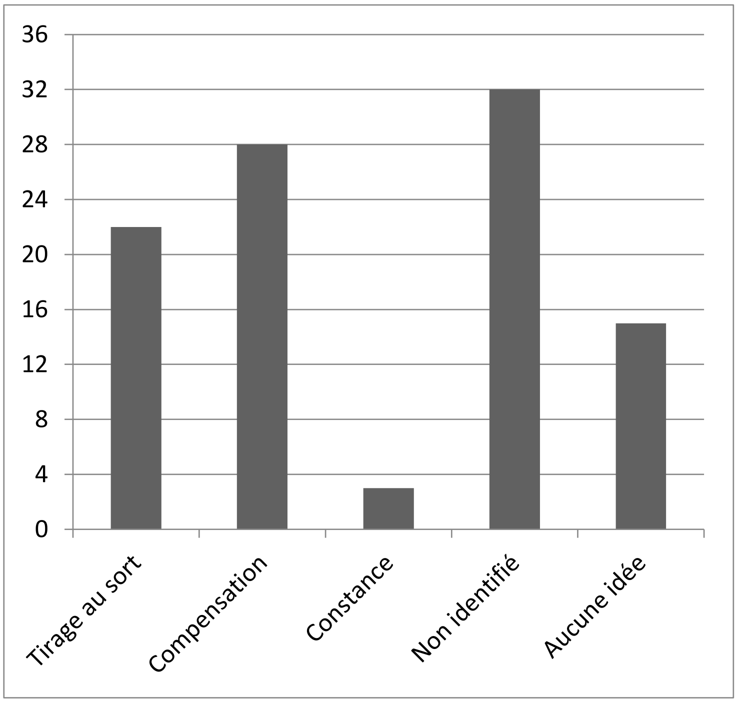


Fig 1 : Répartition quantitative des groupes d'élèves

On constate que moins du quart des élèves ont un rapport adéquat au hasard du tirage au sort.

CONCLUSION

Il ressort de notre étude que l'enseignement des probabilités au secondaire n'assure pas à la majorité des élèves béninois un rapport personnel adéquat à la notion de hasard, car un nombre important d'élèves qui ont suivi un enseignement sur le calcul des probabilités n'a pas un rapport conforme au hasard du tirage au sort. Ceci ne devrait pas surprendre, puisque la notion de hasard n'est pas explicitement enseignée. Sur le plan qualitatif, nos résultats rejoignent globalement ceux de Maury (1985), notamment par rapport aux catégories « tirage au sort » et « compensation ». Cependant nous notons dans notre travail l'absence du raisonnement selon lequel le résultat du douzième lancer dépendrait de la manière dont le dé est lancé.

D'abord l'obstacle le plus remarquable, qui persiste chez les élèves, est l'obstacle ontogénique, que l'enseignement des probabilités dans les conditions actuelles n'a pas pu déstabiliser. À cet obstacle peut s'ajouter un obstacle d'ordre didactique issu d'une tentative d'enseignement de la notion de probabilité basée sur l'approche fréquentiste qui n'a pas permis de produire des résultats satisfaisants. Par contre, aucun des types de rapports personnels au hasard identifiés ne semble relever de l'obstacle lié à la mentalité primitive. Nous conjecturons que cet obstacle aurait dû être déstabilisé par l'enseignement.

En somme, il est nécessaire que les enseignants soient conscients des obstacles à la notion de hasard qu'ils doivent essayer de faire surmonter dans leur enseignement. Dans ce sens, il serait souhaitable qu'il y ait une évolution des programmes au Bénin pour une prise en compte de l'étude de la notion de hasard dans le cadre de l'enseignement des probabilités.

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques* (pp. 115-160). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseignée*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une anthropologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-112.

Chrétien, C. & Gaud, D. (1998). Qu'est-ce que le hasard ? Comment le mathématiser ? *Repères-IREM*, *32*, 81-110.

Fischbein, E., Pampu, I. & Minzat, I. (1969). Initiation aux probabilités à l'école élémentaire. *Educational Studies in Mathematics*, *2,* 16-31.

Girard, J-C. (2001a). Qu'est qu'une expérience aléatoire ? *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 141-144). Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté.

Girard, J-C. (2001b). Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 189-200). Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté.

Henry, M. (2001). Notion d'expérience aléatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste. *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 161-171). Commission inter-IREM Statistique et Probabilités, Presses universitaires de Franche-Comté.

Lahanier-Reuter, D. (1999). *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*. 1ère édition. Presses Universitaires de France.

Lévy-Bruhl, L. (1960). *La mentalité primitive*. 15e édition. Presses Universitaires de France.

Maury, S. (1985). Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance. *Educational Study in Mathematics, 16*, 283-301.

Piaget, J. & Bärbel, I. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant.* 2e édition. Presses universitaires de France.

Semaine des maths à Genève du 16 au 20 octobre : les mathématiques et le sport

Pour cette sixième édition de la Semaine des mathématiques, le thème retenu est le lien entre les mathématiques et le sport.

Un choix que d'aucuns trouveront peut-être bizarre, en effet le lien entre le sport et les mathématiques ne saute a priori pas aux yeux. Et pourtant quand nous nous sommes réunis pour faire le tour des diverses situations que nous pouvions travailler dans ce sens, il est vite apparu que le monde du sport dans toute sa diversité permettait de trouver plusieurs occasions de faire faire des mathématiques intéressantes à des élèves de différents niveaux dans un contexte qui, nous l'espérons, pourra les motiver, sans « tordre » la réalité pour se ramener coûte que coûte à des mathématiques.

Ainsi dans les activités proposées, nous abordons des questions diverses dans le cadre de sports variés : de la fabrication des balles de tennis, ou des ballons de foot, à l'effet des changements de vitesses sur un vélo, en passant par l'organisation d'un tournoi, l'évaluation d'une pente de ski, le lancer de balles, la délimitation d'un terrain, la nature des cibles de tir, la réalisation d'un parcours, le calcul des performances à la course ou à la marche, etc. Ces activités peuvent donner lieu à des activités physiques permettant de problématiser les questions abordées ou feront appel au vécu des élèves. Les mathématiques abordées sont rarement très compliquées, mais la prise en main de la situation nécessite que l'élève ait une certaine autonomie pour mettre en place un travail de modélisation. Nous espérons ainsi montrer aux élèves que les mathématiques peuvent être un bon moyen de mieux appréhender le réel, que ce soit sur des aspects physiques ou organisationnels des activités sportives qui engagent souvent une dimension collective.

Nous espérons que ce mariage entre deux disciplines souvent aux deux extrêmes des goûts des élèves pourra participer à réhabiliter les mathématiques injustement craintes et mal aimées.

Si vous enseignez les mathématiques au primaire, au CO, à l'ES II, à l'UNI ou en HES, vous trouverez sur le site web de la Semaine de nombreuses activités, ciblées par degré de la 1P à l'Université, que vous pourrez consulter et télécharger directement sur le site.

REPUBLIQUE ET CANTON DE GENEVE

Département de l'instruction publique, de la culture et du sport

Commission de l'enseignement des mathématiques et des sciences naturelles (CEMSN)

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

DiMaGe

Faculté de psychologie et de sciences de l'éducation
Faculté des sciences -Section de mathématiques

Espace Mathématiques Francophone à Gennevilliers en France du 22 au 26 octobre 2018 sous la thématique « Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines »

L'*Espace Mathématique Francophone* (EMF) s'est constitué pour promouvoir réflexions et échanges au sein de la francophonie sur les questions vives de l'enseignement des mathématiques dans nos sociétés actuelles, aux niveaux primaire, secondaire et supérieur, ainsi que sur les questions touchant aux formations des enseignants. L'EMF contribue au développement d'une communauté francophone riche de ses diversités culturelles, autour de l'enseignement des mathématiques au carrefour des continents, des cultures et des générations. La langue de travail de l'EMF est le français.

Les rencontres scientifiques de l'EMF, qui ont lieu tous les trois ans depuis 2000, sont reconnues comme conférences régionales de la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM). Elles s'adressent aux différents intervenants préoccupés par les questions qui touchent à l'enseignement des mathématiques : mathématiciens, didacticiens des mathématiques, chercheurs, formateurs, enseignants de différents niveaux. Les lieux des conférences sont choisis pour respecter un équilibre géographique et favoriser la participation d'une communauté francophone la plus large possible.

Vous trouverez sur le site du colloque : https://emf2018.sciencesconf.org/ toutes les informations sur les 12 groupes de travail (GT), les 5 projets spéciaux (SPE) et les Actions et Manifestations (AM) ainsi que sur les séances plénières prévues au programme du colloque.

Vous y trouverez également les instructions vous permettant de concevoir et déposer votre communication qui peut avoir le format d'un article ou d'une affiche.

La date limite pour soumettre une contribution (article ou affiche) dans un groupe de travail ou dans un projet spécial est **fixée au 26 novembre 2017.**

EMF est un colloque d'envergure internationale qui s'adresse aux chercheurs, formateurs et enseignants s'intéressant aux mathématiques et à leur apprentissage/enseignement dans le monde de la francophonie.

Conférence publique d'Olivier Keller à Genève le 1 novembre, Lausanne le 2 novembre et Saint-Maurice le 3 novembre 2017. Des mythes de création aux Eléments d'Euclide (vers 300 avant J.-C.)

Il n'est pas nécessairement reconnu que le nombre est une *invention* humaine, et certains croient même avoir démontré que le nombre entier naturel (1, 2, 3, …, voire zéro) a pour origine un « sens » inné décelable dès la petite enfance, et que nous partagerions, entre autres, avec nos cousins chimpanzés. D'un autre côté, si l'on pense au contraire que le nombre a bel et bien été inventé, on en voit souvent la motivation dans l'échange marchand et la comptabilité. Or si, dans les cités-états et empires anciens, ces activités ont incontestablement donné une impulsion considérable au développement de l'arithmétique, elles n'en constituent pourtant pas à elles seules la préhistoire. Il se trouve en effet que nombre de sociétés primitives ont inventé des systèmes numériques, alors que leurs échanges purement matériels sont de très faible ampleur, et que lorsque ceux-ci ont lieu, les systèmes en question ne sont pas utilisés.

Nous défendrons l'idée que le nombre est une création humaine, et que cette création est principalement le fruit d'une pensée ambitieuse : pensée du monde et de sa genèse, avec au fondement le concept contradictoire, dialectique, de l'Un-Multiple. L'enquête ethnographique et les anciennes mythologies orientales montrent en effet clairement que la multiplicité de l'Un est la forme sous laquelle la pensée primitive se représente l'énergie créatrice en général. Mais si la démultiplication de l'Un rend compte *quantitativement* de la puissance créatrice, elle ignore sa variété *qualitative* : pour résoudre le problème, la pensée primitive élabore des expressions quantitatives de la qualité, par le biais de correspondances un à un (bijections) avec des supposés éléments-clés du monde, les quatre directions cardinales étant l'un des exemples les plus fréquents. Ces quantifications mythiques, avec les rituels associés, créent la possibilité du nombre, ainsi que des occasions pour lui de se constituer.

Informations pratiques :

- Conférence publique à l'Université de Genève le 1er novembre 2017 de 17h00-18h30 à Uni Mail salle MR060 (http://www.unige.ch/fapse/dimage/fr/)

- Conférence publique à la HEP Vaud à Lausanne le 2 novembre 2017 de 17h30 à 19h, salle c33-229

- Conférence publique à la HEP Valais à Saint-Maurice le 03 novembre 2017 de 17h15 à 18h45, salle 360 (www.hepvs.ch)

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

hep/ haute école pédagogique vaud

HEPVS | PHVS
Haute école pédagogique du Valais
Pädagogische Hochschule Wallis

Les journées didactiques du groupe ddmes les 3, 4 et 5 mai 2018 à La Chaux d'Abel
Thème de travail : Expérience et interprétation. Faire des mathématiques avec des élèves de l'enseignement spécialisé

Le groupe **ddmes** (didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé) fête son 20ème anniversaire en organisant des **journées didactiques les 3, 4 et 5 mai 2018** à La Chaux d'Abel (BE)

Les journées didactiques de La Chaux d'Abel s'adressent à des enseignants, formateurs et/ou chercheurs concernés par les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques dans l'enseignement spécialisé. Le programme des journées alterne des moments de travail en atelier et des conférences. Nous réservons également une plage de travail pour des communications particulières des participants qui en font la demande. Vous trouverez le texte de cadrage en cliquant sur ce lien.

Comité d'organisation : Christian Cange (Fondation Serix, Palézieux-Village), François Conne (Retraité, Université de Genève), Jean-Michel Favre (CFPS du Château de Seedorf, Noréaz), Céline Vendeira (DIMAGE, FPSE, Université de Genève), Jean-Daniel Monod, (Retraité, Gymnase cantonal, Nyon)

Des renseignements complémentaires (programme détaillé, conférenciers invités, modalités d'inscription, etc.) seront disponibles à partir du mois de novembre 2017 auprès de : jean-daniel.monod@bluewin.ch ou jean-michel.favre@cfps-seedorf.ch

Ddmes
Didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé

avop
association vaudoise des organisations privées pour personnes en difficulté

RMé POUR CELLES EST CEUX QUI S'INTÉRESSENT À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.revue-mathematiques.ch, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 1 depuis la rubrique *Consultation*.

Contact : revue.mathematiques@gmail.com

Site internet : www.revue-mathematiques.ch