RMé 229

229

RMé

REVUE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE

MARS 2018

ISSN : 2571-516X

SOMMAIRE

Avec le printemps et les fêtes du renouveau de la nature, voici l'arrivée de la nouvelle livraison de la Revue de Mathématiques pour l'école. Comme cela a été annoncé, le comité a décidé de modifier les dates de parution de RMé pour vous permettre d'en découvrir le contenu après la rentrée scolaire et avant la fin de l'année scolaire (avec tout le travail qu'elle occasionne) pour vous laisser le temps de lire. Votre revue n° 229 est riche cette fois de six articles qui abordent des sujets variés concernant aussi bien les mathématiques que les sciences et leur enseignement du primaire au post-obligatoire.

Le premier article de N. Lacombe et F. Marmillod s'intéresse à un sujet de grande importance dans l'enseignement actuel des mathématiques, puisque l'« objectif noyau » de la discipline c'est justement de « résoudre des problèmes[1] ». L'article analyse l'impact des conceptions des élèves de la fin de l'école primaire sur l'apprentissage de la résolution de problèmes. Pour ce faire, les auteurs croisent les résultats de 73 élèves fribourgeois dans la résolution de problèmes avec une enquête auprès de ces mêmes élèves sur leurs ressentis envers les problèmes de mathématiques. Ils mettent ainsi en évidence l'importance du contrat didactique dans les difficultés dont les élèves peuvent faire preuve.

Le second article, classé sciences pour le secondaire 1, de C. Loretan, L. Weiss et A. Mueller porte sur le raisonnement semi-quantitatif, outil très utile en physique mais aussi dans la vie quotidienne. Son but est d'inciter les élèves à obtenir des résultats approximatifs, mais ayant le bon ordre de grandeur, afin de mieux se représenter la plausibilité des situations et des solutions. Ce type de raisonnement va de pair avec le développement d'un regard critique sur les informations chiffrées dont notre société est friande mais qui ne sont souvent pas remises en cause, justement parce que l'utilisation de nombres leur donnent un faux statut de justesse.

On revient, avec l'article de M. Chalverat et R. Serigado, à l'école primaire avec l'analyse d'une activité d'énumération et d'organisation : il s'agit de savoir de combien de façons il est possible d'affranchir une lettre de 70 ct avec tout un choix de timbres allant de 10 ct à 70 ct. Dans leur analyse a posteriori, les auteurs montrent l'importance d'un travail organisé chez les élèves, qui réussissent mieux quand ils travaillent ensemble en binômes, plutôt que chacun de son côté.

J. Tcheuffa Nziatcheu s'intéresse, quant à lui, à deux outils utilisés en formation d'enseignants primaires au Québec, à savoir l'analyse conceptuelle et la carte conceptuelle. Ces outils permettent aux futurs enseignants de s'approprier les concepts à enseigner qu'ils découvrent dans les textes institutionnels (plans d'études, manuels, etc.) et dont ils analysent la compréhension en contexte clinique auprès d'élèves qui résolvent des problèmes en lien avec ces concepts. Ici les deux exemples choisis portent sur l'arithmétique en général et en particulier la multiplication et la division.

Soucieux du problème de la motivation en mathématiques pour des élèves de la dernière année du lycée, série scientifique au Maroc, S. Ouailal, N. Boussaa et N. Achtaich proposent une « situation-problème motivante » à partir d'une bicyclette à … pneus carrés. Dans les comportements des élèves face à cette tâche, ils retrouvent la même palette allant de l'amotivation à la motivation intrinsèque décrite par la théorie de l'autodétermination de Pintrich et Schunk (2002).

[1] Les objectifs d'apprentissage de l'école primaire genevoise, 2000, Mathématiques, p.6.

En fin de numéro, T. Dias Et C. Ouvrier Buffet annoncent la constitution d'une équipe de « Recherche Internationale sur les Troubles d'Enseignement et d'Apprentissage des Mathématiques (RITEAM) » et en profitent pour faire le point sur les recherches dans ce domaine, qui est à la convergence de travaux en neuroscience, en psychologie et en didactique. Leur projet est de développer ce dernier pôle pour éviter que le potentiel d'apprentissage mathématique de certains élèves de l'enseignement spécialisé soit sous-estimé. Les trois axes de travail envisagés, repérage des troubles, étude de l'activité mathématique des élèves à troubles des apprentissages en mathématiques et processus de remédiation et de soutien sont précisés et les perspectives de construction d'un dialogue plus intense entre les domaines concernés évoquées.

En vous souhaitant bonne lecture, le comité vous invite à découvrir ce numéro.

Pour le comité éditorial

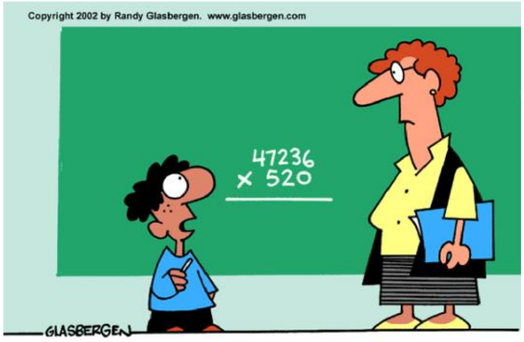
Laura Weiss

L'IMPACT DES CONCEPTIONS DES ELEVES DE 8H EN SITUATION DE RESOLUTION DE PROBLEMES

Noémie LACOMBE, Flavien MARMILLOD

Département de Pédagogie Spécialisée, Université de Fribourg ; Enseignant primaire.

INTRODUCTION



"AREN'T THERE ENOUGH PROBLEMS IN THE WORLD ALREADY?"

« Quand t'es môme tu commences ta vie avec des exercices qui s'appellent des problèmes ! (…) Le prof il rentre dans la salle : Allez sortez vos cahiers on va commencer les problèmes ! » Gad Elmaleh

Ce trait d'humour serait-il percutant parce qu'il touche une vraie question ? On peut en effet s'interroger sur le but de l'enseignement des problèmes à l'école. Les enfants n'en auront-ils pas assez plus tard ou, comme le souligne Glasbergen avec humour : « Aren't there enough problems in the world already » ?

Actuellement, la résolution de problèmes est au cœur du plan d'étude romand (PER). De fait, elle n'est plus considérée comme un domaine à part des mathématiques, mais se veut intégrée dans tous ses sous-domaines, comme un socle sur lequel l'élève construit ses apprentissages.

Mais qu'en pense l'élève, lui, des problèmes ? En voit-il le sens ? Ses conceptions influencent-elles sa démarche de résolution ?

LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Brousseau (1998, p.115) résume la complexité d'une approche centrée sur les problèmes à l'école. D'un côté « un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose et ne résout pas de problèmes » mais d'un autre, il s'agit « de savoir quels problèmes poser, qui les pose et comment » (ibid). Dans la littérature scientifique, on trouve des points de vue nuancés quant aux possibilités d'utilisation des problèmes à l'école.

D'une part, la résolution de problèmes permet de développer des aptitudes chez les élèves, comme la capacité à élaborer des stratégies, à planifier une démarche, à dépasser un obstacle (Charnay, 1996 ; Crahay, Versachallel, De Corte & Grégoire, 2005). Les problèmes offrent la possibilité pour l'élève de se préparer « à affronter la nouveauté et l'incertitude » (Dias, 2015, p.65). Pour Colomb (1991) cette démarche enrichit la perception des mathématiques chez l'élève tout en développant sa confiance en lui. Finalement, Verschaffel, Greer et De Corte (2000) démontrent que les différentes étapes de la résolution d'un problème amènent l'élève à développer des stratégies métacognitives et heuristiques.

D'autre part, plusieurs études internationales relèvent que « la résolution de problèmes demeure l'activité dans laquelle les élèves rencontrent le plus de difficultés » (Inserm, 2007, p.123). D'ailleurs

« la terminologie de problèmes renvoie souvent à des moments difficiles dans sa représentation sociale (…). On ne cherche pas les problèmes, on les subit ou on se les voit imposer. (Dias, 2015, p.67) ». Pour Géninet (2015, p.11), on met très tôt les élèves en situation-problème et souvent « sans leur avoir donné les outils, y compris linguistiques, pour y parvenir. Ne nous étonnons pas alors qu'ils en aient, des problèmes ! ».

Alors comment concilier ces réalités ? Comment développer des compétences de recherche chez les élèves sans les mettre en situation d'échec ?

Plusieurs pistes sont relevées dans la littérature spécifique. Ici, nous nous intéressons à l'une d'entre elles : la prise en considération des conceptions des élèves au sujet des problèmes et les impacts que ces croyances peuvent avoir lorsqu'il s'agit de se représenter et de résoudre un problème. Crahay et al. (2005) soulignent d'ailleurs que ce sont rarement des déficits cognitifs qui bloquent les élèves, mais plutôt des "croyances" à propos des problèmes. En parlant des représentations des élèves, Brousseau (1998, p.121) relève que les erreurs des élèves sont souvent « liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente ».

LE CONTRAT DIDACTIQUE ET LES CONCEPTIONS DES ÉLÈVES

« Ce qui est essentiel, c'est de savoir que lorsqu'on néglige de s'appuyer sur les conceptions des élèves, (...) celles-ci font écran et ne permettent pas à un savoir nouveau de se construire ou de s'affiner.» (De Vecchi, 2010, p.129).

Introduites par Piaget (1926), les conceptions des élèves sont considérées aujourd'hui comme un concept didactique important. Un élève « même très jeune n'a pas besoin d'avoir étudié un sujet pour s'en faire une idée » (De Vecchi, 2010, p.128). Les conceptions se construisent de manière inconsciente et reflètent notre compréhension du monde (De Vecchi & Giordan, 1989). Dans la littérature, on retrouve ce même concept sous le synonyme de « représentations des élèves ».

En fréquentant l'école, l'élève va se familiariser avec des règles que Balacheff (1988) regroupe sous le terme « coutume didactique ». Pour lui, celle-ci correspond à « un ensemble de règles obligatoires, (et à) des façons d'agir établies par l'usage ; le plus souvent implicitement » (ibid., p.19). Cette coutume ou ce contrat didactique rend compte « du mode de régulation du fonctionnement social de la classe » (ibid., p.20). Il est d'ailleurs possible de comparer cet apprentissage à l'exercice d'un métier : le "métier d'élève" (Perrenoud, 1995).

En mathématiques, Crahay et al., (2005) identifient sept règles implicites ou croyances qui se construisent lorsque les élèves sont confrontés à des problèmes en classe. D'après cet auteur, ces croyances peuvent induire des raisonnements ou des stratégies erronés de la part des élèves lorsqu'ils doivent résoudre des problèmes.

Les 7 règles du contrat didactique
1. Tous les problèmes proposés à l'école peuvent être résolus
2. Il n'y a qu'une seule bonne réponse au problème et une seule opération pour y arriver
3. Il faut utiliser tous les nombres de l'énoncé
4. Il faut utiliser ce que l'on a appris en classe récemment pour résoudre un problème
5. L'énoncé contient toutes les informations nécessaires pour résoudre le problème
6. Le résultat est toujours un nombre entier
7. Les problèmes de maths sont différents de la réalité

Fig. 1 : Sept règles du contrat didactique

« L'âge du capitaine » est, par exemple, un effet de contrat didactique relevé par Baruk en 1985 qui englobe les règles n°1, 3, 4, 5 et 7. « L'âge du capitaine » fait référence au problème posé en 1980 par une équipe de professeurs de l'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) de Grenoble : « Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? ». Sur les 97 élèves interrogés à l'époque, 76 avaient combiné les nombres de l'énoncé pour résoudre le problème. Pour Baruk (ibid., p.23) si les élèves donnent un résultat au problème, c'est parce que quotidiennement l'élève « ajoute, soustrait, multiplie ou divise des objets dont la signification, à l'évidence, est volatilisée ». Cet effet est également mis en évidence par Colomb (1991, p.34) : « Il faut écrire "quelque chose" avec les nombres de l'énoncé, même si cette écriture n'a pas de sens pour l'enfant qui s'astreint à l'utiliser pour remplir un certain contrat explicite ou implicite. »

Objectif et hypothèses de recherche

L'objectif principal de cette recherche est d'explorer les liens existants entre les conceptions des élèves de 8H (11-12 ans) et leur manière de résoudre différents types de problèmes.

L'étude est divisée en trois axes de recherches :

a) Définir le sens et l'utilité que les élèves donnent aux problèmes mathématiques

b) Evaluer la présence du contrat didactique (règles de Crahay et al., 2005) dans les représentations

c) Déterminer dans quelle mesure les conceptions et le contrat didactique impactent la résolution de différents types de problèmes.

Méthode

Participants et procédure

Pour cette étude empirique, de type quantitatif, 73 élèves fribourgeois de 8H (11-12 ans) provenant de cinq classes différentes ont rempli un questionnaire en deux parties. La première contient des questions à choix multiples, des questions ouvertes et des échelles de Likert sur leurs conceptions à propos des problèmes en mathématiques. Cette partie est inspirée du questionnaire de recherche de Brissiaud (1984). En voici quelques exemples :

11. Penses-tu être fort pour résoudre des problèmes ?

1	2	3	4	5	6

Pas trop = 1 Très fort =6

Fig. 2 : Exemple d'échelle de Likert

Pour toi qu'est-ce qu'un problème en mathématiques ?
Pour toi, à quoi sert-il de résoudre des problèmes en maths ?
Penses-tu que résoudre des problèmes à l'école puisse t'aider dans la vie de tous les jours ? Explique pourquoi.

Fig. 3 : Exemples de questions ouvertes

7. Qu'est-ce qui est le plus important pour toi dans un problème ? Choisis **<u>une</u>** réponse.

- Trouver la bonne réponse
- Avoir fini en même temps que le reste de la classe
- Chercher, faire des essais
- Utiliser la bonne méthode

Fig. 4 : Exemple de questions à choix multiples

Une seconde partie contient quatre problèmes à résoudre inspirés des exemples de Crahay et al., (2005), Baruk (1998) Brissiaud (1984) et Higelé et al. (2004).

Le premier problème permet d'évaluer la capacité à se représenter concrètement la situation décrite dans l'énoncé d'un problème : « Alexandre aimerait fabriquer une corde pour traverser la rivière devant chez lui. Il y a justement deux arbres, un de chaque côté de la rivière. La distance entre les deux arbres est de 20m. Il dispose de bouts de corde longs de 5 m chacun, combien de bouts de corde doit-il attacher ensemble ? ».

Le second est typiquement un problème qui fait intervenir un effet de contrat didactique, en référence à celui de « l'âge du capitaine » (Baruk, 1998) : « Dans la classe de Quentin, il y a 13 filles et 11 garçons, quel âge a la maîtresse ? ».

Les deux derniers sont des problèmes ouverts de recherche : « J'ai caché 4 nombres qui se suivent, leur somme est égale à 1498. Quels sont ces nombres ? » et « Pour ouvrir un cadenas, il faut un code à trois chiffres. Tu as à ta disposition le 0, le 1 et le 2. Tu peux utiliser plusieurs fois le même chiffre dans un code. Combien de codes différents peux-tu faire ? ». Il a été demandé aux élèves de laisser toutes les traces de leur travail et de ne rien effacer.

Les résultats ont ensuite été traités à l'aide du programme Excel. Les questions ouvertes ont été retranscrites intégralement puis regroupées en catégories et les questions fermées ont été cotées à l'aide de numéros. Les réponses aux problèmes ont été évaluées en fonction du résultat et de la procédure. Par exemple, pour le problème de recherche C, au niveau du résultat : l'élève a reçu un 1 s'il a réussi, un 2 s'il a utilisé une procédure permettant d'arriver au résultat, un 3 si la procédure ne permet pas d'y arriver et un 4 s'il ne respecte pas l'énoncé. Au niveau de la procédure, il a reçu des appréciations chiffrées en fonction des opérations utilisées. Les résultats de la première partie du questionnaire sur les représentations ont ensuite été croisés dans des tableaux avec les réponses aux différents problèmes.

Résultats

Les résultats sont présentés selon les trois axes de la recherche.

Représentation du sens et de l'utilité des problèmes

Dans cet échantillon de 73 élèves, 44% des élèves rapportent que pour eux, les problèmes en général sont utiles dans la vie de tous les jours. Pour 4% en revanche ils ne le sont pas et pour 52% des élèves cela dépend des problèmes. Dans le graphique ci-dessous les élèves ont dû préciser leur réponse en écrivant à quoi les problèmes pouvaient servir.

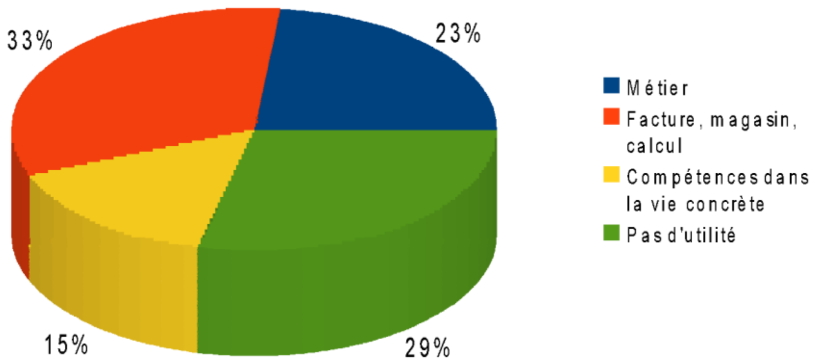


Fig. 5 : Catégorisation de l'utilité des problèmes dans la vie de tous les jours

Relevons que 15% des élèves mettent en avant la possibilité de développer des compétences réutilisables dans d'autres activités (en écrivant par exemple que ça aide à la réflexion, à la logique, à l'analyse ou à la mémoire). Les autres relèvent leur fonction dans l'exercice d'un métier (23%), dans les calculs nécessaires en magasin, pour payer les factures (33%) ou n'y voient aucune utilité pratique (29%).

Présence du contrat didactique

	oui	non
1. **Tous les problèmes proposés à l'école peuvent être résolus**	62%	38%
2. Il y a toujours une seule bonne réponse au problème	14%	86%
3. Il faut utiliser tous les nombres de la consigne	30%	70%
4. **Il faut utiliser ce qu'on a appris en classe récemment pour les résoudre**	85%	15%
5. Les problèmes proposés en classe sont différents de la réalité	29%	71%
6. **La consigne contient toujours toutes les informations nécessaires pour résoudre un problème**	73%	27%

Fig. 6 : Résultats aux règles du contrat didactique de Crahay et al. (2005)

Concernant les règles du contrat didactique de Crahay et al., (2005), trois d'entre elles font partie des conceptions des élèves de cet échantillon. On obtient 62% de réponses positives à l'affirmation : « tous les problèmes proposés à l'école peuvent être résolus », 85% à l'item : « il faut utiliser ce que l'on a appris en classe récemment pour résoudre un problème » et finalement 73% affirment que toutes les informations nécessaires pour résoudre un problème sont présentes dans l'énoncé. À l'inverse, les trois autres règles font moins partie du contrat didactique, en particulier, celle qui dit qu'il n'y a qu'une seule solution aux problèmes.

Liens entre représentations et résolution

<u>Problème A :</u> Les réponses données au problème A sont assez surprenantes, puisque seuls 4 élèves sur 73 tiennent compte de la nécessité de faire des nœuds et d'attacher la corde autour des arbres, en répondant « 5 bouts » ou « au moins 5 bouts ». Les autres effectuent différentes opérations (principalement la division) et répondent 4 bouts.

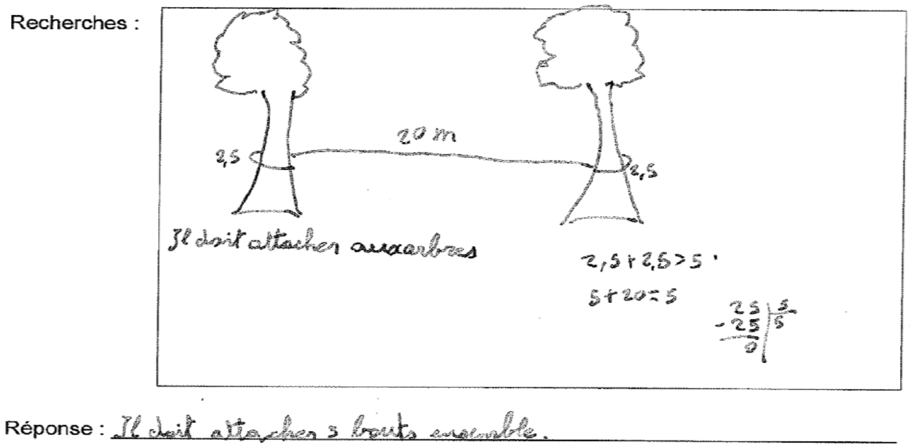


Fig. 7 : Exemple d'un élève se représentant le problème de manière réelle

En analysant plus en détail les questionnaires de ces quatre élèves, nous relevons que les quatre mentionnent un lien entre les problèmes et la réalité de la vie quotidienne : le problème peut se poser quasiment tel quel dans la vie de tous les jours, ou bien il permet de développer une compétence utile dans une autre situation. Sur l'échelle de Likert (cf. Fig. 2) tous se considèrent comme « bons » à « très bons » en résolution de problèmes. Ce dernier facteur explique peut-être la prise de risques effectuée en osant réaliser une autre démarche que la division ou la multiplication des nombres présents dans l'énoncé.

Concernant le contrat didactique : bien que leurs réponses soient nuancées, trois des quatre élèves ont répondu qu'il n'y a pas toujours une seule bonne réponse au problème et qu'il ne faut pas systématiquement utiliser tous les nombres de l'énoncé. Mentionnons aussi qu'aucun d'eux n'est tombé dans le piège du problème de la maîtresse (problème B).

Finalement, ces quatre élèves réussissent bien les problèmes ouverts (de recherche), ce qui permet d'émettre l'hypothèse que les élèves qui sont moins pris dans le contrat didactique sont performants en recherche. Toutefois il est important de nuancer cette hypothèse en rappelant le petit nombre d'élèves (4) concernés par ces observations et d'envisager également l'hypothèse inverse : c'est peut-être parce qu'ils sont performants en mathématiques, qu'ils sont capables de dépasser le contrat didactique.

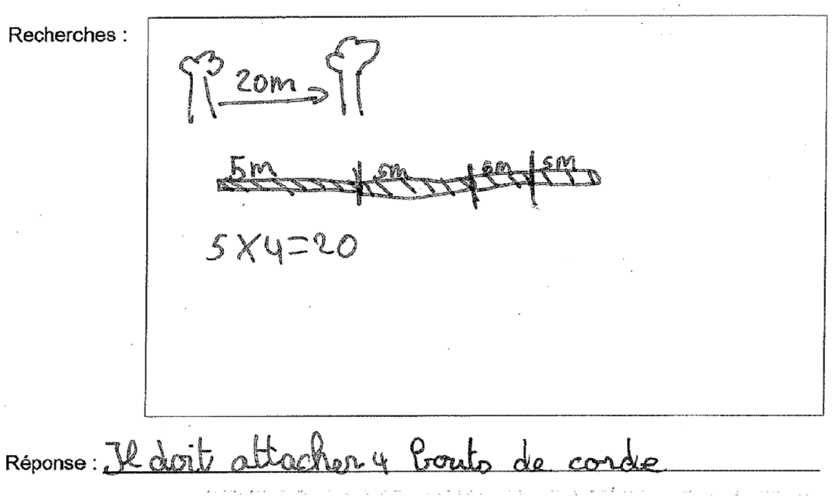


Fig. 8 : Exemple de résolution sans représentation réelle

Dans l’exemple ci-dessus, bien que l’élève ait utilisé un croquis, cela ne lui a pas permis de prendre en compte la dimension réelle. Cela rejoint les résultats de Verschaffet et De Corte (2008) : qui relevaient que dans la majorité des élèves ont tendance à ne pas tenir compte de la connaissance du monde réel lorsqu’ils résolvent des problèmes dans la salle de classe.

Problème B : Dans ce problème B, 29% des élèves proposent une réponse sous forme de nombre en combinant ceux de l’énoncé. Considérons les questionnaires de ces 29% (21 élèves) ayant donné un âge à la maîtresse.

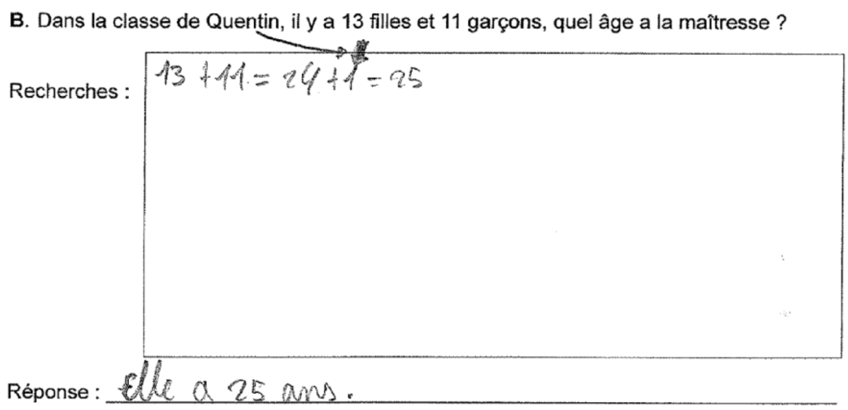


Fig. 9 : Exemple de résolution donnant un âge à la maîtresse

Pour 16 des 21 élèves, tous les problèmes proposés à l'école peuvent être résolus ; pour 14 d’entre eux, la consigne contient toutes les informations nécessaires. Autre analyse des résultats obtenus aux problèmes de recherche par ce groupe des 21 élèves : 10 d'entre eux échouent à résoudre les problèmes de recherche.

Les résultats des problèmes C et D présentant des similarités, seuls ceux du problème C seront présentés.

Problème C : Dans ce problème de recherche, 30 élèves sur 73 sont parvenus aux solutions correctes, 19 ont utilisé des procédures permettant d’y arriver, 8 choisissent une méthode ne permettant pas d’atteindre la solution, 13 ne respectent pas la consigne et 3 élèves n’ont rien fait.

Une analyse détaillée des questionnaires des trois élèves qui ne se sont pas engagés dans la recherche nous donne des informations très intéressantes. Deux ne savent pas ce qu’est un problème et le troisième sait que c'est quelque chose à résoudre. A propos de l'utilité, cela aide pour les calculs (argent, facture) ou cela ne sert à rien. Les trois pensent qu'il faut utiliser ce que l'on a appris en classe récemment et quand on leur demande ce qui est le plus difficile, deux cochent « trouver la bonne méthode » et le troisième « trouver le bon calcul ». On peut donc imaginer que leurs conceptions ont fait « écran » comme le relève De Vecchi (2010) et les ont freinés dans leur recherche. En effet, ils n'avaient pas étudié récemment une méthode permettant de résoudre ce problème et dans un problème ouvert, comme l'important est justement de faire des essais, il n'y a pas de « bonne méthode ou de bon calcul » (Arsac & Mante, 2007).

A l'inverse, si l'on observe ceux qui ont de bons résultats aux problèmes ouverts, il y a 9 élèves qui ont résolu les deux problèmes de recherche. On constate que 8 de ces 9 élèves aiment résoudre des problèmes. Tous sauf un se considèrent comme forts en résolution de problèmes. De plus, aucun d'entre eux n'est tombé dans le piège de l'âge de la maîtresse. Voici quelques citations de ces élèves : *« J'aime essayer des choses pour trouver la réponse », « Pour moi, (les problèmes) ça me sert à être plus logique ».* Il y a donc des représentations majoritairement communes en faveur d'une position de chercheur chez ces élèves.

Discussion

Un point nous interpelle : seuls 15% des élèves voient dans les problèmes une possibilité de développer des compétences. Ces élèves répondent par exemple que les problèmes servent « à s'organiser et à faire des schémas ; à développer la logique ». Ils se rapprochent de la définition de Charnay (1996) qui pense que les problèmes contribuent au développement de l'intelligence et de celle de Gérard (1999) pour qui résoudre un problème consiste principalement à construire un raisonnement. À l'inverse, des réponses telles que : « dans la vie, on n'a pas beaucoup de problèmes de maths, c'est plus des problèmes d'autre chose » ou « pour me doucher je n'ai pas besoin de maths » semblent montrer que le sens des problèmes est absent dans beaucoup des conceptions. Cela rejoint les questionnements de Baruk (1985) sur le sens des mathématiques à l'école et appuie les conclusions de Brissiaud (1984) ; pour celui-ci les problèmes devraient préoccuper un minimum les élèves et avoir un lien avec la réalité vécue pour que les élèves puissent s'engager dans leur résolution.

Un autre résultat intéressant est la relation entre le sentiment de compétence des élèves et leur engagement dans la recherche des problèmes ouverts. En effet, ceux qui se lancent le mieux dans cette recherche se considèrent comme bons en maths. En revanche, comme le montre Berdonneau (2006), les élèves ayant des difficultés feront plus facilement recours à des règles mémorisées (contrat didactique). Cela rejoint les analyses réalisées à partir du questionnement des élèves aux évaluations PISA : elles ont établi « une corrélation étroite entre moindre performance en mathématiques et manque de confiance des élèves dans leur capacité à résoudre des problèmes de mathématiques » (Feyfant, 2015, p.1). Cela amène à poser une question cruciale : « est-ce que ce sont des représentations « erronées » des problèmes qui engendrent des difficultés dans cette discipline ? Ou bien les difficultés rencontrées par les élèves sont-elles à l'origine de ces représentations « erronées » ? Ces facteurs sont probablement interdépendants mais une étude longitudinale serait nécessaire pour l'établir avec certitude.

Si les élèves moins pris par le contrat didactique ont de meilleurs résultats aux problèmes ouverts, s'engagent davantage dans la recherche et se représentent mieux les problèmes, il ne serait pourtant pas judicieux de tenter de « casser » le contrat didactique en donnant systématiquement des problèmes « pièges », surtout en phase d'évaluation. En effet, comme le relèvent Arsac et Mante (2007), si l'on rajoute une multitude de données numériques ou des détails inutiles donnant des énoncés de 5 à 10 lignes, on rend certes le problème plus compliqué, mais on ne se trouve pas dans le domaine recherché du complexe. Ces auteurs soulignent qu'un problème complexe développant de réelles compétences stratégiques chez les élèves devrait être court, ne pas demander l'application d'une notion étudiée juste avant et rester dans le cadre du domaine conceptuel des élèves.

Conclusion

Cette recherche menée sur 73 élèves de 8H suggère que les difficultés en résolution de problèmes peuvent être liées aux conceptions des élèves et au contrat didactique. Pour un enseignant, prendre en compte les représentations des élèves peut être une clé, et comme le propose (Colomb, 1991) pourquoi ne pas mettre en place un contrat didactique explicite. Le travail sur des problèmes ouverts nécessite, en effet, des explications claires sur les attentes de l'enseignant par rapport au travail et à l'attitude de l'élève.

Cette recherche donne un aperçu de l'influence des représentations des élèves. Elle ouvre de nouvelles pistes de recherche : par exemple comparer les représentations des élèves avec celles de leurs enseignants, ou mener des recherches longitudinales sur l'impact des représentations en situation de résolution de problèmes en classe.

Finalement, les résultats mettent en avant la diversité des représentations au sujet des problèmes chez les élèves. Un questionnaire tel que proposé dans cette recherche pourrait être donné en début d'année afin d'obtenir un aperçu individuel donnant la possibilité de mettre en place des dispositifs de différenciation tout en s'intéressant à l'origine de certaines erreurs dans la résolution de problèmes.

Bibliographie

Arsac, G. & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : CRDP Académie de Lyon.

Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume : deux registres des interactions didactiques. *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Luminy : La pensée Sauvage.

Baruk, S. (1998). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Paris : Seuil.

Berdonneau, C. (2006). *Aider les élèves en difficultés en mathématiques CP/CE1*. Paris : Hachette Éducation.

Brissiaud, R., (1984). La lecture des énoncés de problèmes, in : *Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques*. Paris : INRP.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Charnay, R. (1996). Pourquoi des mathématiques à l'école ?, *Repères-IREM*, *64*, 50-61.

Colomb, J. (Dir.). (1991). *Apprentissage numérique et résolution de problèmes CP*. Paris : Hatier Pédagogie.

Crahay, M., Verschaffel, L., De Corte, E. & Grégoire, J. (2005). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques* ? Bruxelles : De Boeck.

De Vecchi, G. (2010). *Aider les élèves à apprendre*. Paris : Hachette.

De Vecchi, G. & Giordan, A. (1989). *L'enseignement scientifique : comment faire pour que « ça marche » ?* Nice : Z'éditions.

Dias, T. (2015). *Nous sommes tous des mathématiciens. Des clés pour faire aimer les maths à vos élèves.* Paris : Magnard.

Elmaleh, G. (2005). Gad Elmaleh, *L'autre c'est moi* (DVD). Boulogne-Billancourt : TF1 vidéo.

Feyfant, A. (2015). *La résolution de problèmes de mathématiques au primaire*. Dossier de veille de l'Institut Français de l'Education (15) : ENS de Lyon.

Géninet, A. (2015). *Faîtes les réussir en maths. De l'école à l'entrée au lycée*. Lyon : Chronique sociale.

Higelé, P., (Eds.) (2004). *Valise pédagogique ARL. Exercices progressifs pour l'apprentissage des opérations intellectuelles*. Saint Martin de Seigneux : Jonas Formation.

Inserm. (2007). *Dyslexie, dysorthographie, dyscalculie. Bilan des données scientifiques.* Paris : Les éditions Inserm.

Piaget, J. (1926). *La représentation du monde chez l'enfant*. Alcan : PUF.

Perrenoud, P. (1995). *Métier d'élève et sens du travail scolaire*. Paris : ESF.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

QUELLE EST LA PLACE DU RAISONNEMENT SEMI QUANTITATIF (RSQ) DANS L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES

Cedric LORETAN, Laura WEISS, Andreas MUELLER

Université de Genève et Collège d'Oron-Palézieux (Vaud) ; Université de Genève, Institut Universitaire de Formation des Enseignants (IUFE) ; Université de Genève, Faculté des sciences.

INTRODUCTION

Depuis toujours, les mathématiques occupent une place importante dans la plupart des travaux scientifiques et constituent un lien fondamental pour approcher les disciplines scientifiques. Cependant ce lien est quasi méconnu de nos élèves. Pour eux, les sciences et les mathématiques sont deux disciplines à part entière, indépendantes l'une de l'autre. D'ailleurs trop souvent cela est involontairement véhiculé par l'enseignant lui-même qui évite le plus possible l'usage des mathématiques en sciences.

Cependant ce lien est si fondamental qu'il est essentiel de le développer le plus vite possible afin de le rendre intuitif pour les élèves. Un moyen possible de le tisser et de le faire apparaître à l'école, serait de développer chez l'élève le raisonnement « par ordre de grandeur » ou raisonnement semi-quantitatif (RSQ). Cet outil puissant, à la portée de tous, nécessitant l'utilisation de compétences mathématiques accessibles (comme on le verra ci-dessous), permettrait de réconcilier l'allergie aux mathématiques avec la dimension quantitative omniprésente en sciences servant de langage de communication entre scientifiques. Négliger cet outil serait comme entreprendre un voyage à travers le monde sans la maîtrise de la langue de Shakespeare.

Brièvement, l'objectif phare du RSQ est de répondre à des questions en exploitant des données approchées à la puissance de dix près, avec une prise de conscience de la plausibilité des approximations faites et des résultats obtenus. Le but est, entre autres, de développer une posture scientifique et le sens critique à l'égard des données et des résultats (Loretan, Müller & Weiss, 2017). En guise d'illustration, nous proposons ci-dessous un exemple concret.

Le 15 juillet 2009, le Washington Post publie: "Obama announces a plan of 12 billions of dollars dedicated to community school." Que penser de cette annonce ?

Une recherche sur la toile, à l'aide du moteur de recherche Wolfram Alpha, indique que le nombre total d'individus engagés dans une formation scolaire, professionnelle ou universitaire aux USA correspond à 82.29 millions. Une simple comparaison des ordres de grandeur des deux données chiffrées, à savoir 10 milliards de dollars pour la somme offerte et 100 millions pour le nombre de personnes dans un cursus d'étude, donne une somme de 100 dollars par personne ! Ainsi la somme gigantesque de plusieurs milliards de dollars se résume finalement à une distribution de 100 dollars par « tête de pipe ». Mais l'annonce d'Obama présentée de la sorte aurait-elle eu le même impact ?

Fig. 1 : Exemple du sens critique vis-à-vis des données chiffrées

Pour les plus curieux, plusieurs publications (Weinstein & Adam, 2008 ; Schwarz, 2003) proposent des problèmes de ce type, connus sous le nom de problèmes de Fermi en hommage au célèbre physicien Enrico Fermi, maître absolu en la matière (voir aussi Weiss, 2013).

LE RSQ EN LONG ET EN LARGE

Une définition du RSQ

La comparaison entre le raisonnement quantitatif et les mathématiques traditionnelles proposée par Steen (2004) (Fig. 2) met en évidence que le premier est d'ordre pratique, qu'il peut être employé par tout un chacun et concerne des données numériques du monde réel, alors que les secondes sont abstraites et employées le plus souvent par des spécialistes.

Raisonnement quantitatif	Mathématiques traditionnelles
Pratique	Abstraites
Les objets d'étude sont des données tirées du monde réel	Les objets d'étude sont des idéaux mathématiques
Employé par tout un chacun, à tout moment afin de prendre conscience du monde qui l'entoure	Employées dans des domaines comme : les sciences, la technologie, l'ingénierie…

Fig. 2 : Raisonnement quantitatif vs mathématiques (Steen, 2004)

En outre, le but est totalement différent : si les mathématiques permettent une analyse adéquate de problèmes mathématiques appartenant aux différents domaines de celles-ci (analyse, géométrie, topologie, équations différentielles, etc.), le RSQ vise plutôt à se faire une idée chiffrée de l'importance d'un phénomène ou d'une situation. Cela ne signifie pas qu'il n'y ait pas d'abstraction dans l'utilisation du RSQ, au contraire. Mais cette abstraction réside dans la modélisation des situations et dans le choix des données pertinentes plus que dans la manipulation d'objets abstraits.

Le raisonnement quantitatif est donc ancré dans un contexte de vie quotidienne et contribue aux responsabilités citoyennes de l'homme de la rue. En plus des caractéristiques du raisonnement quantitatif, le RSQ ne se base pas sur des données numériques précises, mais sur leur ordre de grandeur. En effet, on peut considérer que ce qui caractérise la mesure d'une grandeur physique, c'est d'une part l'unité associée à cette grandeur (par exemple une unité de distance ou de masse ou de temps) et d'autre part l'ordre de grandeur de la mesure qui permet d'estimer sa valeur relativement à la situation. A cette caractéristique, il faut ajouter le « sens des nombres » (leur importance relativement à une situation donnée) et un regard critique par rapport à l'information en général et en particulier celle diffusée par les médias.

Les compétences intrinsèques au RSQ

Le RSQ se compose principalement de deux compétences complémentaires.

La première est la capacité de pouvoir estimer l'ordre de grandeur de la solution (puissance de 10). En effet, pour citer la célèbre et fameuse règle de Enrico Fermi : "better be approximately right than precisely wrong"[1].

Les outils mathématiques indispensables à cette compétence sont donc :

1. La capacité à manipuler la notation scientifique.
2. L'usage des unités pertinentes pour le problème.
3. La capacité d'arrondir, dans ce contexte le plus souvent à l'unité supérieure ou inférieure.

[1] Mieux approximativement correct que précisément faux.

4. L'approximation des formes géométriques : en deux dimensions tout peut être considéré comme un disque ou un carré et en trois dimensions comme une sphère ou un cube.
5. Enfin une certaine culture scientifique avec entre autres la connaissance de diverses échelles (de longueurs, temps, énergies, température, etc.) qui constituent de véritables portes d'entrée vers le calcul estimatoire.

La tâche suivante, inspirée par Delgado, Stevens et Shin (2008) est un excellent exemple mettant en évidence les outils cités ci-dessus :

> Pour caractériser la dimension d'un globule rouge, l'expert scientifique sait que son diamètre est de l'ordre de grandeur du micromètre. Il est capable de contextualiser ce globule, comme étant environ cent fois trop petit pour être vu à l'œil nu, et autour de 4 ordres de grandeur ou 10'000 fois plus grand qu'un atome. L'expert est en mesure de comparer cette dimension à celle d'autres objets : par exemple, le globule rouge est plus grand qu'un atome, qu'une molécule d'eau, ou qu'une mitochondrie, mais plus petit qu'un acarien ou que des grains de pollen.

La deuxième compétence est le développement d'un regard critique face à l'information diffusée par les médias. Cette compétence est notamment extrêmement importante en matière de santé et de prise de décision comme on le voit dans l'exemple ci-dessous tiré d'une étude de Garcia et Galesic (2009), mettant en scène l'annonce d'une firme pharmaceutique.

> Avec la prise d'un médicament x, le risque de mourir d'un arrêt cardiaque chez les personnes avec un haut taux de cholestérol est fortement réduit : une étude réalisée sur 900 cobayes humains avec un haut taux de cholestérol a montré que 80 personnes sur 800 qui n'ont pas pris le médicament sont mortes après une attaque cardiaque alors que 16 personnes sur 100 qui ont pris ce médicament sont mortes suite à une attaque cardiaque.

Cette information, testée sur un large public montre qu'une grande majorité des personnes interrogées croit aux bénéfices de ce médicament, car seulement 16 personnes meurent lorsque ce dernier est pris comparé à 80 s'il n'est pas consommé. Ce résultat laisse songeur, le public ne prend pas en compte le pourcentage de décès : 10% sans prise à comparer avec 16% avec prise du médicament !

LES PLANS D'ÉTUDES ET LE RSQ « FONT-ILS BON MÉNAGE » ?

Le RSQ – ou du moins une partie de ses compétences – est-il présent dans les plans d'études ? En fait, on trouve des mentions de compétences de type RSQ au sein de documents institutionnels suisses (sur le plan romand et fédéral) et internationaux.

Afin de mettre en évidence sa présence dans l'enseignement romand, le tableau ci-dessous (Fig.3), adapté du programme de l'option spécifique vaudoise « Mathématiques et Physique » (CIIP/DFJC, 2012) du plan d'étude romand (PER), présente différents exemples de compétences étroitement liées au RSQ.

Domaines	Exemples
Recherche, expérimentation et rédaction	Tri et organisation des informations. Pose de conjectures. Déduction d'informations nouvelles à partir de celles connues. Réduction de la complexité d'un problème. Utilisation des propriétés des nombres et opérations afin d'établir des preuves. Acceptation ou refus d'un résultat par estimation de l'ordre de grandeur ou confrontation au réel. Communication d'un résultat en utilisant un vocabulaire et des symboles adéquats.
Nombres	Sensibilité aux nombres. Sensibilité aux probabilités.
Fonctions et équations	Utiliser le concept de fonction dans différentes situations. L'outil informatique (tableur, grapheur)
Mesures et Incertitudes	Associer les bonnes unités. Estimer une incertitude sur une mesure. Développer l'esprit critique envers la plausibilité d'une valeur et sa précision. Arrondir.
Astronomie	Effectuer des opérations avec la notation scientifique standard : Préfacteur × Puissance de dix × Unité. Calculs avec des grands nombres. Résoudre des problèmes de proportionnalités. Comparaison de grandeurs impliquées. La notion d'échelles. Conversion d'unités. Connaissance de : vitesse de la lumière, année-lumière, unité astronomique

Fig. 3 : Compétences explicitement (en italique gras) ou implicitement liées au RSQ (en italique)

Sur le plan suisse, les standards HARMOS sciences reprennent aussi ces notions à maints endroits, on trouve ainsi les termes tels que réunir, classer, comparer, exposer, présenter, estimer, justifier et argumenter.

Au niveau international, les concepts de RSQ apparaissent dans les projets "Adult Literacy and Life Skills Survey" de l'OCDE (2011), "Project 2061 Science for all Americans" de l'American Association for the Advancement of Science (AAAS, 1990), "Statement of Beliefs" du National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, USA). Ce dernier affirme : "Computational skills and number concepts are essential components of the mathematics curriculum, and a knowledge of estimation and mental computation are more important than ever" (NCTM, 2014)[2].

Or, déjà dans les années 80, Reys, Rybolt, Bestgen et Wyatt (1982) et avant eux Carpenter, Coburn, Reys, et Wilson (1976) constataient que l'estimation était un des domaines de compétences les plus négligés dans les programmes de mathématiques. Son traitement était souvent superficiel et donc insuffisant pour construire des compétences appréciables. Plus de deux décennies plus tard, les recherches empiriques de Siegler et Booth (2005) et de Jones *et al.* (2012), montrent que les élèves, comme les adultes, sont toujours de pauvres estimateurs. Par exemple, Jones *et al.* (2012) calculent que le pourcentage d'erreur obtenu dans des estimations de longueur d'objets usuels par des élèves de 12-14 ans varie de 16% à 237%. De façon générale, les élèves ont tendance à la surestimation.

Cela révèle que la capacité d'estimation, qui est la pièce maîtresse du RSQ, reste problématique. L'apprentissage du RSQ est complexe, car non seulement l'enseignant doit remédier à l'apprentissage de notions censées être déjà connues comme les unités ou les puissances de dix, souvent négligées dans l'enseignement car elles semblent intuitives, mais il doit aussi développer chez l'élève le sens des nombres et le regard critique.

Encore d'autres obstacles viennent se greffer au RSQ…

En plus de l'obstacle dû à l'estimation évoqué ci-dessus, trois types principaux d'obstacles liés à l'apprentissage du RSQ sont à considérer.

Le premier se situe sur un plan conceptuel, à savoir la difficulté à se représenter les échelles de grandeurs, à établir des relations entre elles et à percevoir les grands et petits nombres (Tretter, *et al.*, 2006). Beaucoup d'élèves ont du mal avec ces concepts, notamment dans la compréhension et la comparaison des grandeurs très petites ou très grandes. Cela est confirmé par Jones *et al.* (2007) qui constatent qu'effectivement les élèves éprouvent de la difficulté avec des dimensions se situant en dehors de l'échelle humaine. La Fig. 4, ci-dessous, issue de l'étude que nous menons avec les élèves français de 15-16 ans illustre bien ces dires : il leur a été demandé de donner des noms d'objets de dimensions (ou des distances) exprimées en mètre correspondant aux puissances de 10 proposées. La figure fait très nettement apparaître la plus grande aisance dans les dimensions entre 1 mm et 1 km, même après l'enseignement d'une séquence sur le RSQ.

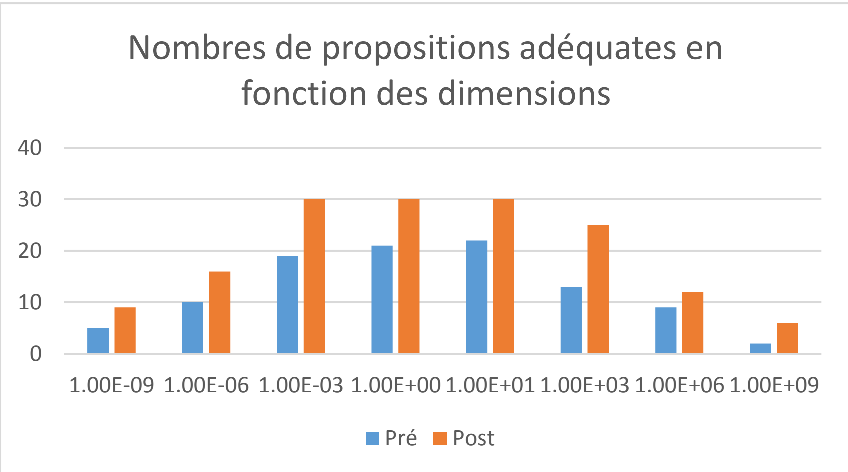


Fig. 4 : Nombre d'élèves (N = 64) de 15-16 ans choisissant des propositions adéquates

[2] Les compétences de calcul et le sens des nombres sont des composantes essentielles d'un curriculum, et la capacité d'estimer et le calcul mental sont plus importants que jamais.

Le second concerne des compétences plutôt techniques comme les changements d'unités, la maîtrise de la notation scientifique et les opérations avec des puissances de 10.

Finalement le troisième est la combinaison de ces deux premiers – obstacles conceptuels et obstacles techniques – dont l'effet est de créer une lourde charge, voire une surcharge cognitive chez les élèves (van Merriënboer & Sweller, 2005 ; Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011). Dès que trop d'informations sont nécessaires dans la mémoire de travail à court terme si les élèves n'ont pas automatisé un certain nombre de procédures, ils se trouvent à devoir gérer trop de données, ce qui a souvent pour conséquence l'abandon de la tâche.

Les enjeux du RSQ pour l'apprentissage des sciences

En tant qu'enseignants, nous constatons que les élèves du secondaire I et II ne pratiquent pas ce type de raisonnement, car ils se sentent mal à l'aise face à des problèmes qui n'ont pas une réponse exacte ou pour lesquels ils ne disposent pas d'un algorithme qui les conduit à une solution indiscutable. De plus, les compétences définies plus haut trouvent trop peu de place dans les activités qui leur sont proposées. En effet, si les puissances de 10 et la notation scientifique sont effectivement enseignées, il existe peu de séquences concrètes d'enseignement scientifique faisant appel au RSQ.

A la vue de ce qui précède, il est donc essentiel de réagir et de proposer davantage d'activités d'enseignement qui pourraient permettre de développer l'outil puissant qu'est le RSQ. En effet, l'enjeu est grand, car les mathématiques sont une véritable porte d'entrée vers une compréhension profonde des sciences et un outil essentiel dans la communication scientifique. Dans un prochain article, nous proposerons une discussion autour d'une séquence d'enseignement « un voyage dans l'espace et le temps » qui développe le RSQ, dont voici le texte introductif :

> « Un simple regard depuis le hublot d'un avion permet d'apprécier le paysage, par exemple la forme d'une forêt, alors que pourtant seuls des arbres sont visibles depuis l'observation au sol. Les arbres sont certes importants, les détails sont importants, mais c'est souvent en s'éloignant d'eux qu'une structure plus grande devient visible. Il est souvent plus facile d'apprendre et de comprendre les détails une fois que la "grande image" a été perçue. Si tous les objets de l'Univers étaient très proches en matière de grandeurs diverses (dimensions, énergies, vitesses...), les détails seraient alors cruciaux et les approximations n'auraient pas lieu d'être. Pour notre plus grand plaisir, l'Univers présente des grandeurs variant sur des échelles extrêmement larges. D'un côté, le tout petit et de l'autre le très grand. Entre eux, les contrastes sont si spectaculaires que rechercher la précision dans un premier temps serait le meilleur moyen de faire fausse route. ».

Avec comme cerise sur le gâteau, la maitrise de cet outil associé à une composante éthique qui invitera les élèves à devenir des citoyens actifs, munis d'un regard critique sur l'information diffusée par les médias.

BIBLIOGRAPHIE

AAAS (1989). *Project 2061: Science for all Americans*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E. & Wilson, J. W. (1976). Notes from national assessment: Estimation. *Arithmetic Teacher, 23*, 297-302.

CDIP (2014). *HarmoS*. http://www.cdip.ch/dyn/11737.php (accès 28/09/17)

CIIP/DFJC (2012). Plan d'études romand (PER) – Complément vaudois au PER : Mathématiques et Physique. Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP), Département de la formation, de la jeunesse et de la culture (DFJC) du Canton du Vaud (Edts.) (accès 28/09/2017).

Delgado, C., Stevens, S. & Shin, N. (2008). *Development of a learning progression for students' conceptions of size and scale*. Paper presented at the National Association for Research in Science Teaching Annual Conference, Baltimore, MD, April 2008.

Hattie, A.C. (2009). *Visible Learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* London, New York: Routledge.

Jones, M. G., Taylor, A., Minogue, J., Broadwell B., Wiebe, E. & Carter, G. (2007). *Journal of Science Education and Technology*, *16*(2), 191-202.

Jones, M. G., Gardner, G. E., Taylor, A. R., Forrester, J. H. & Andre, T. (2012). Students' Accuracy of Measurement Estimation: Context, Units, and Logical Thinking. *School Science and Mathematics, 112,* 171–178.

Loretan, C., Müller, A. & Weiss, L. (2017). Développement du raisonnement semi-quantitatif (RSQ) en classe avec comme outil pédagogique le « Worked-out example » (WE). Accepté pour publication.

NCTM (2014). *Statement of Beliefs.* http://www.nctm.org/beliefs.aspx, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM ed.). (accès 28/09/2017).

OCDE, Statistique Canada (2011). *La littératie, un atout pour la vie : Nouveaux résultats de l'Enquête sur la littératie et les compétences des adultes*. Éditions OCDE. http://www.statcan.gc.ca/pub/89-604-x/89-604-x2011001-fra.pdf, (accès 28/09/2017).

Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J. & Wyatt, J. W. (1982*). Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 183-201.

Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J. I. D. Campbell (Ed.), Handbook of mathematical cognition (pp. 197–212). Boca Ratan, FL: CRC Press.

Steen, L. A. (2004). "Everything I Needed to Know about Averages. . . I Learned in College." *Peer Review 6*(4), 4–8.

Swartz, C. (2003). *Back of the Envelope Physics.* Baltimore: Johns Hopkins University Press.

Sweller, J., Ayres, P. & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory: Explorations in the learning sciences, instructional systems and performance technologies*. New York, NY: Springer.

Tretter, T. R., Jones, M. G., Andre, T., Negishi, A. & Minogue, J. (2006). Conceptual boundaries and distances: Students' and experts' concepts of the scale of scientific phenomena. *Journal of Research in Science Teaching, 43*(3), 282-319.

Van Merriënboer, J. (1997). Training Complex Cognitive Skills: a Four-Component Instructional Design Model for Technical Training. Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications.

Van Merriënboer, J.J.G., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent development and future directions. *Educational Psychology Review, 17*(2), 147–176.

Von Baeyer, H. C. (2001). *The Fermi Solution: Essays on Science*. New York: Dover.

Weiss, L. (2013). Les questions de Fermi. *Math-École 219,* 34-41.

Wolfram Alpha LLC. (2009). Wolfram|Alpha http://www.wolframalpha.com/input/?i=2%2B2 (accès 10/12/2017).

Weinstein, L. & Adam, J. A. (2008). *Guesstimation: Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin*. Princeton: Princeton University Press.

ENUMERATION ET ORGANISATION

Michaël CHALVERAT, Ricardo SERIGADO

Etudiants, Université de Genève

Cet article vise à résumer une recherche effectuée dans le cadre de notre formation en didactique des mathématiques à l'Université de Genève. À travers une articulation entre les différents contenus proposés dans la formation et les discussions entre les acteurs de cette recherche, nous avons tout d'abord construit une analyse a priori d'une activité de 5H (en annexe). Nous avons ensuite eu l'opportunité de la confronter au terrain en nous rendant dans une classe genevoise. À l'aide des productions d'élèves récoltées lors de cette expérimentation, nous avons élaboré quelques pistes de réflexion sur la manière dont les élèves s'organisent afin d'atteindre l'exhaustivité des réponses.

QUESTION DE RECHERCHE

Avant de penser à l'énumération, nous devions nous poser la question de savoir si les élèves sont en mesure de construire un nouveau système, c'est-à-dire passer « d'un système "réel" complexe à un modèle mathématique épuré » (Burgermeister & Dorier, 2012, p.11). Cela signifie que l'élève, dans l'activité qui lui sera proposée, doit trouver le moyen de partir du problème concret — comment puis-je affranchir une lettre à 70 centimes à l'aide de sept types de timbres ? — afin de le transformer en un problème mathématique — quels sont les outils mathématiques dont je vais avoir besoin pour arriver à résoudre mon problème —, ce qui revient à élaborer, pour l'élève, un nouveau système. Comme Burgermeister et Dorier (2012) l'affirment, « […] l'activité de modélisation peut faire intervenir plusieurs modèles concurrents entre lesquels il faut essayer de déterminer le plus approprié pour la réalisation du problème initial. » (p.7) C'est pourquoi, nous avons décidé d'introduire, dans cette tâche, du matériel manipulable — des multicubes — qui se trouvent généralement dans les écoles du Canton. Le but pour nous est, dans un premier temps, d'observer si les élèves arrivent à passer de ce matériel manipulable au papier-crayon, c'est-à-dire d'un système « réel » — les timbres représentés par les multicubes — à un système mathématique (ou autre). Au vu de la difficulté apparente, selon nous, d'atteindre l'exhaustivité des solutions sur ce genre de problèmes, nous avons opté pour une observation sur ce passage à l'abstraction, car ce type de processus doit généralement être assimilé à ce stade de la scolarité par un élève de 5H. Dans un deuxième temps, si ce passage est réussi, nous analysons les différentes stratégies que les élèves mettent en place afin d'atteindre l'exhaustivité des réponses.

Notre étude interroge ainsi les stratégies des élèves. Elle s'intéresse à leur activité lorsque, pour résoudre un problème concret, ils doivent passer d'une manipulation de matériel fourni par l'enseignant à une représentation papier-crayon, le but final étant d'arriver à trouver toutes les réponses possibles. Dans ce cadre, notre question de recherche s'articule selon les trois sous-questions, ces dernières allant dans un ordre progressif de difficultés pour l'élève :

- Est-ce que l'élève cherchera à garder une trace visible des résultats qu'il a déjà obtenus à l'aide des multicubes ?
- S'il garde une trace visible, quelle est la méthode/technique qu'il utilisera (dessin dans son cahier, nombres, etc.) ?
- Quelle est l'organisation qu'il choisira afin d'atteindre l'exhaustivité des résultats (méthode de l'arbre, selon le nombre de timbres, etc.) ?

ANALYSE A PRIORI

L'activité choisie est issue des moyens d'enseignement COROME présents dans les écoles du canton de Genève. Il s'agit de la tâche Recherche 70 (Fig. 1) proposée dans le livre de l'élève pour le degré

5H (Danalet et al. 1998), c'est-à-dire pour des élèves de 8-9 ans. Cet exercice se situe dans le module 1 — Problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement —, dans le domaine de l'énumération. Ce choix de domaine a été motivé par le fait que nous souhaitons analyser de plus près l'activité des élèves lorsqu'ils doivent s'organiser afin de dénombrer toutes les combinaisons possibles pour atteindre l'exhaustivité. Pour rappel, énumérer est l'action de « passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule » (Briand et al., 1999, p.9). L'activité Recherche 70, dans laquelle il s'agit de trouver toutes les manières d'affranchir une lettre à 70 centimes à l'aide des sept différents types de timbres, se prête parfaitement à notre observation, du fait que l'élève ne peut plus compter sur une règle potentiellement induite, comme cela a pu être le cas lors d'activités présentes au cycle 1 (« Les feux » en 3H ou « Les tours » en 4H), mais doit trouver d'autres méthodes pour réussir la tâche demandée.

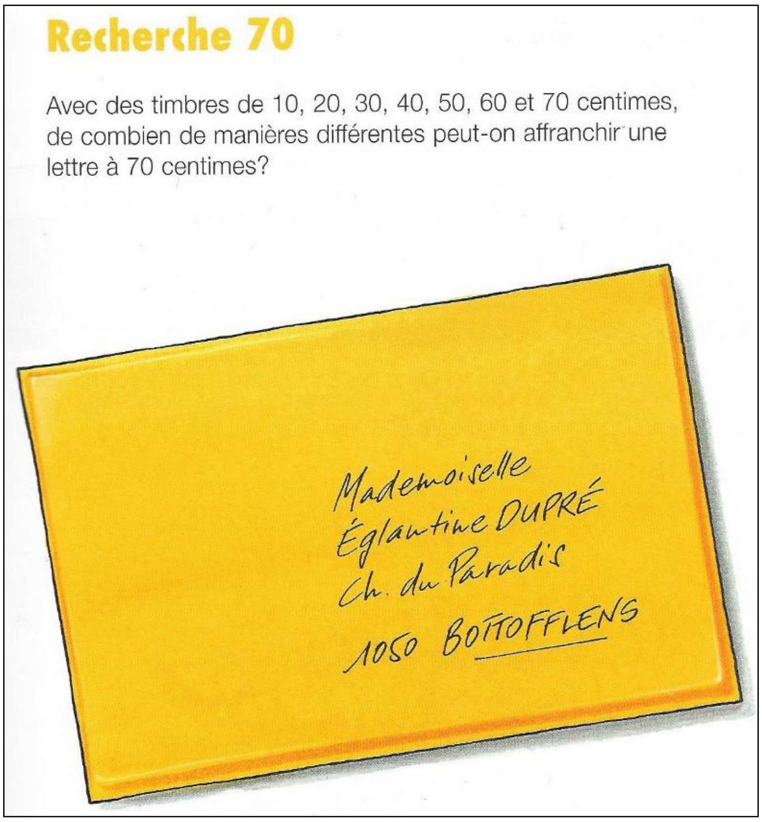


Fig. 1 : Énoncé de l'activité « Recherche 70 »

Dans l'analyse a priori, nous avons dégagé trois stratégies principales de résolution de cette activité pour l'élève.

Premièrement (Fig. 2), il est possible d'établir une liste selon le nombre de timbres utilisés (Fig. 2), cette liste allant d'un timbre (1x70) à sept timbres (7x10).

Nombre de timbres utilisés	Manières différentes d'affranchir la lettre à 70 centimes				total
1	70	-	-	-	1
2	60+10	50+20	43+30	-	3
3	50+10+10	40+20+10	30+20+20	30+30+10	4
4	40+10+10+10	30+20+10+10	20+20+20+10	-	3
5	30+10+10+10+10		20+20+10+10+10		2
6	20+10+10+10+10+10				1
7	10+10+10+10+10+10+10				1
Total					15

Fig. 2 : Stratégie 1

Deuxièmement (Fig. 3), il est possible de créer un arbre avec toutes les décompositions du nombre 70 (Fig. 3), c'est-à-dire partir des sept valeurs possibles et procéder à toutes les sous-décompositions possibles (exemple : 40+30/40+20+10/40+10+10+10, etc.).

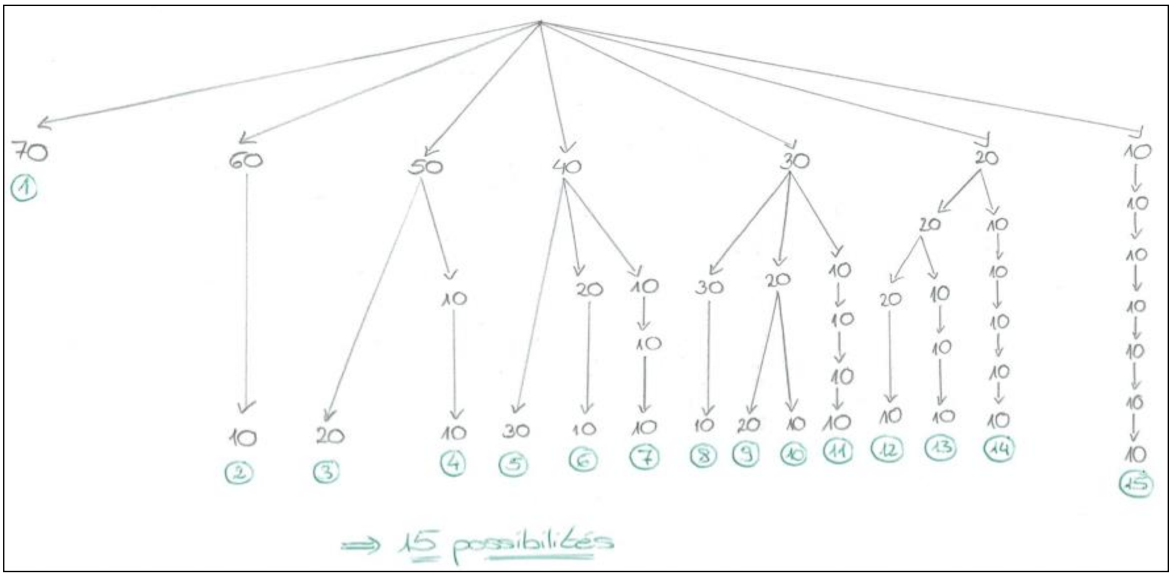


Fig. 3 : Stratégie 2

Finalement (Fig. 4), il est possible d'établir une liste organisée hiérarchiquement selon la plus grande valeur de timbre (Fig. 4), ce qui correspond à un schéma proche de celui en arbre.

Plus grande valeur de timbre utilisé	Manières différentes d'affranchir la lettre à 70 centimes				total
70	70				1
60	60+10				1
50	50+20	50+10+10			2
40	40+30	40+20+10	40+10+10+10	-	3
30	30+30+10	30+20+20	30+20+10+10	30+10+10+10+10	4
20	20+20+20+10	20+20+10+10+10	20+10+10+10+10+10		3
10	10+10+10+10+10+10+10				1
Total					15

Fig. 4 : Stratégie 3

Il est important de signaler que ces trois stratégies sont, selon nous, bien différentes du point de vue de leurs difficultés et qu'elles ne représentent pas une liste exhaustive de toutes les stratégies envisageables. Ainsi, nous laissons la porte ouverte à d'autres possibilités de résolution du problème.

Ensuite, nous nous sommes intéressés aux stratégies de base (ou erronées) et aux stratégies visées. En effet, dans ce genre d'activité, l'élève doit se préoccuper en priorité de deux choses : *ordonner* et *contrôler*. Cela signifie qu'à chaque fois qu'une nouvelle combinaison de timbres est trouvée afin d'affranchir la lettre, il faut nécessairement l'ordonner dans la collection des combinaisons déjà trouvées dans un premier temps — selon l'organisation choisie — et ensuite, il faut contrôler dans un deuxième temps si elle ne représente pas un doublon, c'est-à-dire une solution déjà trouvée précédemment. Comme l'affirme Briand (1999), « […] que ce soit dans le domaine de la construction des opérations arithmétiques, et plus tard, dans celui de l'analyse combinatoire, la question se pose toujours de contrôler les collections d'objets qu'il faudra dénombrer (…) » (p.9). C'est pourquoi, nous constatons que l'organisation — d'un point de vue « énumération » seulement — a une importance capitale dans les résultats trouvés et dans la présence ou non de doublons dans les productions d'élèves.

Sur un autre plan, nous avons décidé — comme recommandé dans le manuel d'enseignement — de faire travailler les élèves en binômes. En effet, il nous semble pertinent et judicieux d'une part de ne pas laisser un élève seul face à la tâche et d'autre part, de les faire collaborer, dans le but d'atteindre l'exhaustivité. En effet, selon une idée répandue, il est souvent plus facile pour les élèves d'arriver à trouver la réponse s'ils sont en groupe. À ce stade de l'analyse, nous ne pouvons pas encore saisir l'impact que ce mode de travail aura sur la suite de nos résultats. En effet, nous nous sommes uniquement préoccupés des trois différentes méthodes de résolution de l'activité — exposées plus haut — que les élèves peuvent mettre en place (Fig. 2 à 4) et de leurs différentes stratégies (de base, erronées et visées).

Analyse a posteriori

Le premier constat qu'il est possible de faire à la suite de notre intervention dans une classe de 5H est que notre question de recherche doit se focaliser en particulier sur la troisième sous-question énoncée plus haut. En effet, suite à nos observations, tous les binômes — sauf un seul — ont réussi à se détacher du matériel manipulable afin de passer par la décomposition additive du nombre 70. Ainsi, pour répondre aux deux premières sous-questions :

- Tous les groupes ont gardé une trace visible de leurs résultats, un d'entre eux n'ayant pas utilisé les multicubes de toute l'activité.
- La technique employée afin de garder les résultats en mémoire a été la décomposition additive du nombre 70.

Dans la suite de ce développement, nous nous concentrerons donc sur la dernière sous-question et nous tenterons de répondre à la question suivante :

Après être passé à la décomposition numérique du nombre 70, comment l'élève s'organisera-t-il pour ordonner ses résultats de façon à atteindre l'exhaustivité des réponses (c'est-à-dire à trouver la dernière possibilité) ?

Tout d'abord, le point qui paraît essentiel à aborder et qui a été mis en évidence lors de notre intervention dans la classe est l'impact du travail en binôme. Lorsque nous sommes passés dans les rangs, il a été possible de remarquer différents modes d'organisation à l'intérieur même des groupes. Par exemple, certains binômes ont d'emblée décidé de travailler sur le même cahier, afin de ne pas se surcharger. Pour d'autres binômes, les élèves ont préféré travailler chacun sur leur cahier. Cependant, il est également possible de constater une différence au sein de cette catégorie. En effet, certains élèves ont fait le choix de s'appuyer sur une même organisation spatiale, alors que les autres ont choisi de travailler chacun pour soi. Ainsi, à l'aide des productions d'élèves récoltées à la fin de l'activité, nous avons classé les différents groupes (onze binômes en tout) et nous sommes arrivés au résultat suivant :

- Travail à deux sur le même cahier – 2 groupes (G/J)
- Travail à deux avec la même organisation spatiale – 4 groupes (A/E/F/H)
- Travail à deux avec deux organisations spatiales différentes – 5 groupes (B/C/D/I/K)

Comme émis précédemment, nous ne pouvions pas mesurer l'impact de ce mode de travail avant notre intervention dans la classe. Nous avons seulement pensé que le fait de travailler en binôme pouvait aider les élèves à atteindre l'exhaustivité des réponses. Nous n'avions ainsi pas pris en compte la possibilité que certains élèves rencontrent des difficultés à communiquer, à se partager les tâches ou encore à trouver un objectif commun. De plus, à l'aide du résultat explicite ci-dessus, nous remarquons également que la moitié des groupes a opté pour un travail plutôt individuel, malgré le fait que les élèves pouvaient collaborer par deux.

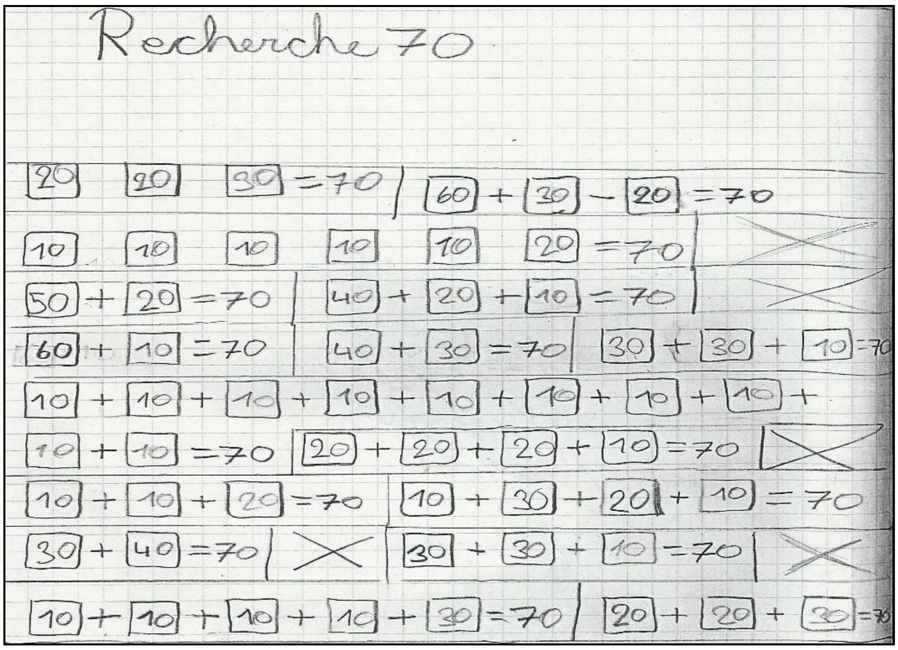


Fig. 5 : Exemple de travail à deux sur le même cahier

Ensuite, le deuxième point sur lequel nous devons nous concentrer lorsque nous analysons les productions d'élèves est les différentes méthodes utilisées dans la résolution de cette activité. Nous remarquons qu'il y a trois catégories de stratégies distinctes.

- Établir une liste selon le nombre de timbres utilisés – 7 groupes (A/C/D/E/F/I/K)
- Établir une liste organisée selon la valeur du plus grand timbre en premier – 2 groupes (B/H)
- Aucune organisation visible – 4 groupes (G/I/J/K)

Nous constatons que deux groupes — le I et le K — se trouvent dans deux catégories. Ce résultat n'est pas surprenant, car comme mentionné auparavant, ces deux groupes ont opté pour un travail individuel, ce qui se manifeste par deux stratégies différentes sur leurs productions. Malgré le fait que plus de la moitié des groupes ont utilisé la première méthode — établir une liste selon le nombre de timbres utilisés —, cela ne signifie néanmoins pas que cela soit la seule stratégie experte pour la résolution de ce problème. En effet, un autre groupe — le H — a réussi à trouver toutes les possibilités à l'aide d'une autre méthode. Par conséquent, nous sommes arrivés à la conclusion qu'il n'existe pas une « meilleure façon » d'atteindre l'exhaustivité dans ce type de problème, ce qui est certainement dû au fait qu'il n'y a pas de règles induites (c'est-à-dire que l'élève ne peut pas appliquer une règle mathématique afin de trouver le nombre de combinaisons possibles).

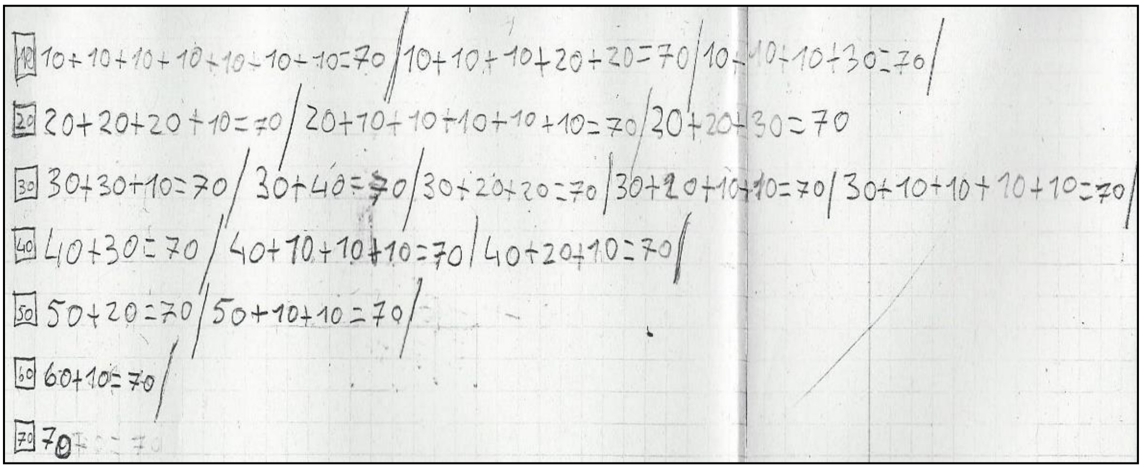


Fig. 6 : Établir une liste selon la présence du plus grand timbre en premier — Groupe H

Finalement, afin de répondre plus précisément à notre question de recherche, nous avons décidé d'affiner l'analyse de la stratégie consistant à établir une liste selon le nombre de timbres utilisés. En effet, nous avons été intrigués par une structure présente dans la plupart des groupes qui ont adopté cette technique. Lorsque nous observons le début de leur raisonnement, tous les élèves commencent par identifier les mêmes possibilités pour affranchir la lettre. Si nous essayons de résumer cela selon les étapes observées dans les productions d'élèves, nous arrivons au schéma suivant (du point de vue de l'élève) :

- Je peux, bien évidemment, affranchir la lettre à l'aide d'un seul timbre (70).
- Ensuite, je peux essayer de l'affranchir à l'aide de deux timbres (60+10/50+20/40+30).
- Finalement, si j'essaye de trouver la décomposition maximale, je peux affranchir ma lettre avec sept timbres au maximum (7x10).

Il est intéressant, de notre point de vue, de relever la « zone de flou » qui existe entre la présence de trois et six timbres. En effet, il existe, selon nous, des « incontournables », que nous avons listés ci-dessus. Ces derniers représentent les cinq possibilités les plus évidentes et les plus faciles à trouver lorsqu'il faut commencer l'exercice. Ainsi, il existe peu d'oublis ou de doublons pour ces résultats, comme il est possible de le voir ci-après sur la Fig. 7. Après les avoir énumérés, la tâche devient alors plus ardue, et c'est à ce moment précis que la plupart des doublons sont apparus. En effet, à partir de trois timbres utilisés, l'élève est obligé de s'organiser différemment et de trouver une stratégie efficace qui permettra de prendre en compte toutes les possibilités. À titre d'exemple de stratégie, si nous reprenons la Fig. 2, nous remarquons que l'élève peut s'appuyer sur les résultats trouvés pour deux timbres afin d'orienter son raisonnement. Il aurait ainsi pu trouver les « sous-décompositions » suivantes :

60+10 → (50+10)+10

50+20 → (40+10)+20 - (30+20)+20 -$\underline{(50+10)+10}$

40+30 → (30+10)+30 - $\underline{(20+20)+30}$ - $\underline{(40+20)+10}$[1]

Cependant, au vu de la plupart de leurs productions, les élèves n'ont que très rarement pris appui sur les résultats qu'ils avaient trouvés précédemment, ce qui s'est manifesté par un nombre important de doublons. Il n'est alors pas étonnant de constater que ce type de stratégie peut présenter des difficultés quant à l'organisation, en particulier lorsque les deux élèves du même groupe travaillent chacun de leur côté. Selon notre analyse des productions, nous nous sommes également rendu compte que certains groupes n'avaient pas les mêmes doublons, ce qui vient appuyer notre constat selon lequel l'organisation à l'intérieur de chaque groupe a eu un rôle déterminant dans les résultats obtenus. Par conséquent, cette phase de « sous-décompositions » effectuées ci-dessus montre qu'il s'agit d'un enjeu d'apprentissage central lors d'exercices relatifs à l'énumération.

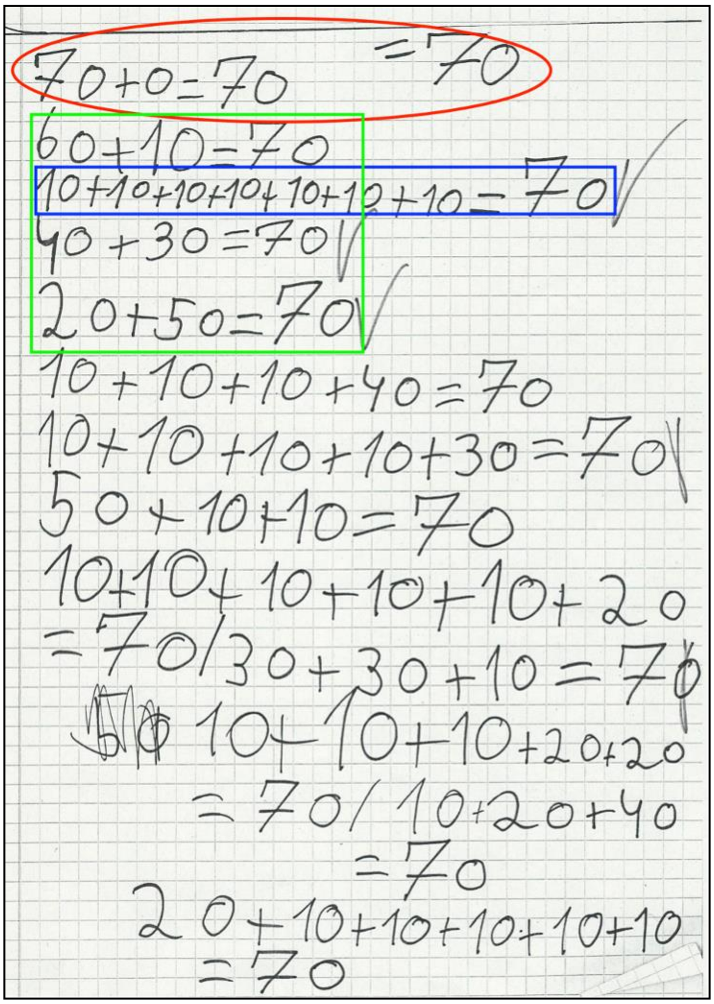


Fig. 7 : Les « incontournables » du groupe D

[1] Les trois décompositions soulignées représentent les doublons à supprimer.

CONCLUSION

Le but de notre recherche était d'observer et d'analyser une activité consistant à organiser ses résultats, l'objectif final étant d'atteindre l'exhaustivité des réponses pour l'élève.

L'analyse a priori de l'activité mathématique choisie ainsi que l'analyse a posteriori basée sur des productions d'élèves nous ont permis de repérer leur importance pour un enseignant. En effet, tout au long de nos discussions, il est possible d'extraire petit à petit des hypothèses sur le raisonnement des élèves qui nous sont utiles dans une éventuelle progression dans leurs apprentissages. À titre d'exemple, nous pensons qu'il est utile de proposer d'autres tâches aux élèves afin qu'ils puissent apprendre à mieux collaborer entre eux, dans le but de réussir plus aisément un problème du type « énumération ». Cela demande une certaine habitude du travail en groupe, ce dernier mode de travail devant être favorisé dès que c'est possible selon nous.

De plus, l'analyse plus fine des « incontournables » permet également de mettre en avant les différentes étapes intermédiaires nécessaires aux élèves pour atteindre l'exhaustivité. En effet, les différentes décompositions et sous-décompositions nécessitent une organisation spatiale et visuelle que l'élève doit entreprendre et également comprendre, dans le but d'être sûr de ses résultats et de sa méthode utilisée. Ainsi, des activités liées à des décompositions de nombre pourraient s'avérer utiles afin d'approfondir ce domaine pour les élèves.

BIBLIOGRAPHIE

Briand, J., Lacave Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D. & Goua De Baix, V. (1999). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, 66*, 7-22.

Burgermeister, P.-F., & Dorier, J.-L. (2012). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse Romande. *Petit x, 91*, 5-24.

Danalet, C., Dumas, J. P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Mathématiques, Troisième année, Fichier de l'élève.* Neuchâtel : COROME.

ANNEXE – FICHE PÉDAGOGIQUE

1 – B

Recherche 70

Tâche

- Rechercher systématiquement les décompositions de 70 à l'aide de multiples de 10.

Recherche 70

Avec des timbres de 10, 20, 30, 40, 50, 60 et 70 centimes, de combien de manières différentes peut-on affranchir une lettre à 70 centimes?

Nombre d'élèves

- 2

Matériel

- LE p. 55

Mise en œuvre

- Cette activité se prête bien à une présentation à la classe par affiches, transparents, etc. Dans ce cas, au terme de la recherche, les élèves peuvent se réunir par quatre afin de préparer une présentation de leurs solutions à la classe.

Déroulement

Relance

- L'enseignant renvoie à la consigne les élèves qui ne cherchent que les affranchissements constitués de deux timbres. Il peut aussi dire qu'il a trouvé d'autres manières encore d'affranchir.

Mise en commun

- Les élèves recensent les solutions obtenues[1].
- Ils confrontent leurs démarches. Ils examinent celles qui présentent la plus grande efficacité pour l'exhaustivité des solutions.

Démarches possibles de l'élève

- Établir une liste de réponses sans organisation
- Établir une liste structurée en fonction de la présence de certains timbres
  - Réponses avec 1 fois 70, avec 1 fois 60, avec 1 fois 50, ...
  - Réponses avec 7 fois 10, avec 5 fois 10, avec 4 fois 10, ...
- Établir une liste structurée en fonction du nombre de timbres
  - Réponses avec 1 timbre, 2 timbres, ...
- ...

1 Information à l'usage des enseignants
Il y a 15 solutions

53

DE L'ANALYSE CONCEPTUELLE A LA REALISATION D'UNE CARTE CONCEPTUELLE : UN DISPOSITIF DE FORMATION POUR LES FUTURS ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE EN MATHEMATIQUES

Jean TCHEUFFA NZIATCHEU

Université du Québec à Montréal[1]

INTRODUCTION

Amener les futurs enseignants à s'approprier un concept mathématique est fondamental dans un cours de didactique des mathématiques et c'est l'objectif poursuivi par le travail dont le présent article rend compte. Pour tendre vers cet objectif, nous proposons à des futurs enseignants du préscolaire primaire et adaptation scolaire[2] (MELS, 2007) un travail qui consiste à réaliser une analyse conceptuelle et une carte conceptuelle dans le cadre du cours universitaire de didactique de l'arithmétique.

CADRE THÉORIQUE

Les concepts théoriques utilisés dans ce travail portent sur l'analyse conceptuelle et la carte conceptuelle. Une analyse conceptuelle est une étude de divers modes de représentations d'un concept (le concept de division et de multiplication dans notre cas) contribuant à l'enrichissement de la compréhension de ce concept (Deblois, 1996). Quant à la carte conceptuelle, c'est une représentation graphique d'un domaine de connaissance tel que perçu par un ou plusieurs individus, et qui établit des liens entre différents concepts évoqués par son ou ses auteurs (Laflamme, 2006, p. 8). La carte conceptuelle est un outil efficace pour apprendre à tous les niveaux scolaires ou professionnels et elle aide à apprendre comment apprendre (Novak et Gowin, 1984 ; Novak, 2002). La carte conceptuelle peut fonctionner comme un artefact à travers lequel des apprenants démontrent une compréhension progressive d'un réseau de concepts et développent leurs connaissances par collaboration et coopération (Novak, 2010, 1998). Dans le cadre du présent travail, l'analyse conceptuelle et la carte conceptuelle ont été mises en place dans le contexte décrit ci-après.

CONTEXTE

Pour savoir comment l'analyse conceptuelle et la carte conceptuelle peuvent aider les étudiants à analyser et s'approprier un concept, nous avons mis sur pied un travail de session avec des étudiants inscrits en 2e année du programme de baccalauréat au Québec. Le travail de session est un ensemble de tâches que ces étudiants réalisent le long d'une session de quatorze semaines de cours. En début de session, les étudiants forment des groupes de trois ou quatre. Il y a cinq groupes de 4 étudiants et sept

---

[1] tcheuffa_nziatcheu.jean@courrier.uqam.ca

[2] Au Québec, a été adoptée en 2000 une politique de l'adaptation scolaire. Elle préconise une organisation des services éducatifs au service de l'élève, basée sur une approche individualisée et accorde une place centrale à la prise en compte des jeunes à risque ou en difficulté d'adaptation et/ ou d'apprentissage (MELS, 2007).

groupes de 3 étudiants, soit douze groupes au total. Dans le cadre de son cours de didactique, l'enseignant identifie douze concepts à travailler. Chaque groupe tire au sort un sujet. Le travail de session – l'analyse et la carte conceptuelle – est remis à la treizième semaine parce que l'examen final du cours se déroule à la quatorzième semaine.

Dans cet article, nous analysons plus particulièrement le travail de six étudiants, répartis dans deux groupes nommés A et B, qui ont travaillé respectivement sur la division et la multiplication.

Dans les sections suivantes sont exposés la méthodologie d'expérimentation, l'analyse et les résultats.

MÉTHODOLOGIE

La carte conceptuelle est élaborée par les étudiants en débutant par l'intitulé « arithmétique » et en la réalisant au fur et à mesure que le cours se déroule (c'est-à-dire après l'enseignement d'un concept dans le cours de didactique), et ce, jusqu'à la fin de session.

Quant à l'analyse conceptuelle du concept (dans cet article de division ou de multiplication), il s'agit d'une tâche qui se déroule en deux phases. Dans la première phase, les étudiants doivent mener une recherche dans le Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ), dans la Progression des apprentissages (PDA) et dans des manuels scolaires afin de rapporter, à travers un document élaboré, les façons de présenter ce concept.

Dans la seconde phase, ces étudiants réalisent un travail pratique de terrain dans un contexte semi-réel de pratique professionnelle en enseignement. Ils conçoivent eux-mêmes des tâches portant sur le concept traité dans l'analyse conceptuelle et ses différents sens en lien avec la progression des apprentissages qui correspond au niveau scolaire des élèves du cycle primaire où ils expérimentent. Ces expériences concrètes se font en contexte clinique, c'est-à-dire hors de la salle de classe et des heures de cours. Chaque membre du groupe travaille tour à tour avec l'élève qui est recruté sur une base volontaire avec le consentement de ses parents, sous forme d'un entretien semi-dirigé. Dans celui-ci, la parole est donnée le plus possible à l'élève afin qu'il verbalise la résolution de la tâche. D'une durée de 45 min, cette séance est enregistrée en vidéo puis transcrite par le groupe pour des fins d'analyses. Dans le cadre de cet article, nous avons pris un extrait de cette transcription. Au niveau des cartes conceptuelles, nous avons pris deux cartes, celle du groupe A et celle du groupe B afin de les comparer.

RÉSULTATS DES ANALYSES CONCEPTUELLES

Dans la première partie du travail sur l'analyse conceptuelle, le groupe A rapporte que dans le Programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) et la Progression des apprentissages (PDA), la division est une opération qui consiste à trouver combien de fois une quantité est contenue dans une autre. En analysant les manuels Clicmaths (Dagenais, 2014) et Défi mathématique (Lyons et Lyons, 2005a, 2005b), le groupe rapporte que la division est reliée aux notions de quotient (le résultat d'une opération), de dividende (le nombre qui est divisé), de diviseur (le nombre qui divise) et plus tard du reste. Toujours dans le sens de l'analyse conceptuelle, le groupe mentionne que dans les manuels analysés ci-dessus, la division est la dernière opération arithmétique introduite après l'addition, la soustraction et la multiplication.

Pour le groupe B, la multiplication est une opération qui est souvent notée par la croix de multiplication (×) et est reliée à des notions d'addition, de retenue et de position des chiffres dans un nombre.

D'après le groupe A, la division est abordée dès le 2e cycle primaire (8-9 ans au Québec) et se poursuit en 3e cycle (10-11 ans) ; c'est aussi le cas pour le groupe B en ce qui concerne la multiplication.

Dans leur recherche, les deux groupes nous renseignent sur certains programmes (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006) qui recommandent d'enseigner la division au même moment que la multiplication parce que ce sont deux concepts complémentaires. Dans la suite de leur travail, ils soutiennent que l'apprentissage de la division/multiplication au primaire va de l'algorithme personnel (démarche intuitive de l'apprenant) pour tendre vers l'algorithme conventionnel admis dans une communauté de pratique. Pour donner suite à leur analyse sur des travaux de recherche, le groupe A met en avant le fait que les sens de la division travaillés au primaire sont le sens partage et le sens groupement tandis que le groupe B mentionne que les sens de la multiplication travaillés au primaire sont l'addition répétée, l'aire et le volume, la comparaison, le produit cartésien (ou la combinaison) et la disposition rectangulaire (Poirier, 2001).

Selon les deux groupes, plusieurs auteurs pointent quelques difficultés que pourraient vivre des élèves comme l'interprétation du reste de la division ou de la retenue en multiplication, celle qui consiste à penser qu'une même division peut avoir deux sens différents (partage et mesure) (Boulet, 1998). Certaines difficultés d'élèves peuvent provenir de la présence d'un diviseur à deux chiffres ainsi que la présence de zéros au milieu de la division ou encore de la manipulation de la retenue dans la multiplication (Van De Walle & Lovin, 2008).

Concernant les commentaires des étudiants suite à leur analyse conceptuelle, les deux groupes constatent que travailler un concept mathématique (division/multiplication), c'est porter un regard réflexif sur les différents sens de ce concept et sur différentes représentations (figures, images, mots et dessins) mobilisées pour présenter ce concept. Le groupe A mentionne les faits suivants :

> *Au regard des recherches menées en didactique des mathématiques, ce travail nous a aussi permis de constater que les sens partage et groupement ne sont pas toujours explicités et distingués dans des manuels analysés. Ce flou entre différents sens de la division peut engendrer des difficultés de compréhension du concept de division aussi bien au niveau des enseignants que des élèves.*

De notre point de vue, amener les étudiants à réaliser cette première partie de l'analyse conceptuelle est une façon de les sensibiliser à la variété d'approches possibles qui existent pour aborder la division ou la multiplication et à la nécessité de prendre un certain recul lorsqu'ils utilisent des manuels scolaires ou du matériel didactique pour concevoir des tâches et les piloter auprès des élèves. Ainsi, selon le groupe A, « bien que les manuels offrent un excellent point de départ, il est nécessaire, pour les exploiter à leur plein potentiel, de les utiliser de façon réfléchie et en complémentarité avec d'autres outils ». En tant que futurs enseignants, les membres des deux groupes conviennent de l'importance de développer un regard critique vis-à-vis du matériel didactique qu'ils utilisent dans le but d'offrir aux élèves des éléments nécessaires à une compréhension approfondie du concept mathématique enseigné.

En ce qui concerne l'expérimentation, voici un extrait de l'entretien d'une élève de 5e année, âgée de 10 ans et 11 mois, réalisé par le groupe A. Après un bref entretien sur les modalités d'accueil, voici un extrait de l'échange :

> **Étudiante** : […] c'est quoi pour toi diviser ?
>
> **Léonie** : Diviser, c'est quand tu es en groupe, tu as de la nourriture et que tu le divises avec tes amis. Comme 3 diviser par. Je veux dire 15 divisés par 3.

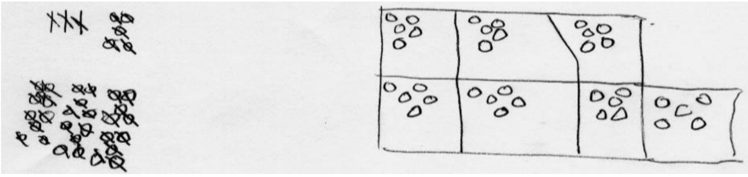
Dans cette définition, le sens de la division mis en avant par Léonie est le sens partage. Dans la suite du déroulement de l'expérimentation, nous avons choisi de revenir sur la tâche 3 proposée à Léonie. L'étudiante lit cette tâche et demande à Léonie de la résoudre.

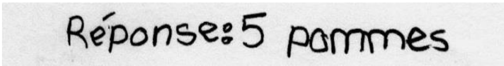
3. J'ai acheté des pommes à 7 cents chacune. Le coût total des pommes s'élève à 35 cents. Combien de pommes Jules a-t-il achetées?

Léonie : Ce que je vais faire, c'est que je vais faire 35 divisés par 7.

Léonie : […] Là je vais venir faire un tableau qui est divisé en 7. Ce que je vais faire après, c'est que je vais défaire mes dizaines en unités. J'ai défait deux dizaines, il m'en reste juste une. Là je vais les diviser (l'élève fait un cercle dans chacune des 7 cases). Je vais en enlever 7 (l'élève barre 7 unités avant de continuer et elle fait un cercle dans chacune des 7 cases). Je vais en enlever 7 que j'ai dessinés et je vais en remettre 7 (l'élève fait l'ajout dans les cases qu'elle a dessinées). Elle refait cette étape jusqu'à ce qu'elle n'ait plus d'unité. Ma réponse est 5.

Une illustration de la démarche de Léonie se présente comme suit :





En plus de verbaliser sa démarche, Léonie, dans ses représentations, fait usage d'une procédure personnelle pour résoudre ce problème.

À la suite de ce travail, Le groupe A mentionne les faits suivants :

[…] *Lorsque questionnée sur le sens de la division, Léonie fait spontanément référence au sens partage, où la taille des ensembles égaux est inconnue, en négligeant le sens mesure ou groupement. Nous avons pu constater, dans le cadre de l'analyse conceptuelle, à quel point le sens partage était mis en avant par les manuels scolaires, tant sur le plan de la définition du concept de division que sur le plan des exercices proposés. Cette tendance pourrait également s'expliquer par le fait que les élèves sont exposés, dès le préscolaire, à des problèmes de type partage.*

Quant à un extrait d'expérimentation du groupe B, l'enseignante propose à Esther (11 ans en 5e année du primaire) la situation suivante : Tu prépares ton voyage d'été. Pour cela, tu mets deux pantalons et trois chandails dans ta valise. De combien de façons différentes peux-tu t'habiller ?

Esther : quand je prends 1 chandail, je peux porter avec trois pantalons. Ça fait que j'ai 3 façons de m'habiller. Je fais la même chose avec le deuxième chandail, j'ai encore trois autres façons. En tout, j'ai trois façons et trois façons qui donnent 6 façons de s'habiller.

Le sens de la multiplication mis en avant dans cette tâche est le produit cartésien. Esther utilise le langage pour résoudre le problème tout en mettant en évidence la combinaison (pantalons/chandails) et l'addition répétée (trois façons et trois façons font 6 façons). En proposant ces tâches, les groupes A et B expérimentent la compréhension de la division/multiplication par l'élève et l'analyse conceptuelle leur permet d'explorer les entrées possibles pour travailler la division/ multiplication. En observant l'élève lors de la résolution des tâches, ces groupes parviennent à associer des concepts théoriques à des comportements observables, c'est-à-dire qu'ils établissent des liens entre pratique et théorie. Ce travail a pour avantage de favoriser une prise de conscience en amont de la part des étudiants des erreurs potentielles et des diverses conceptions que peuvent avoir des élèves sur une notion mathématique, en vue d'anticiper et d'intervenir sur ces erreurs.

Dans cette section, nous faisons une analyse des cartes conceptuelles des deux groupes, selon notre point de vue, qui pourrait être différent de celui des auteurs de ces cartes. Ce sont bien nos interprétations et non celles des étudiants concernés. Les représentations des deux groupes sont en annexe (voir annexes 1 et 2).

Grâce aux deux cartes, on constate que pour leurs auteurs, le cours de didactique de l'arithmétique traite de l'étude des nombres (qui intègre directement le développement du concept de nombre, les modes de représentation du nombre, le matériel utilisé pour représenter les nombres), des chiffres, du contrat didactique et de ses effets, de types d'obstacles rencontrés, des systèmes de numération, des opérations sur les nombres qui prennent en compte les algorithmes, des propriétés, des sens travaillés.

Ces deux représentations sont non linéaires et constituent des traces de chaque groupe : on y retrouve un réseau de concepts traités dans le cadre du cours de didactique de l'arithmétique. Elles sont structurées et structurantes parce qu'elles mettent en évidence des relations entre ces concepts. On peut constater que les deux cartes, de structures différentes, traduisent différentes manières de concevoir et de mettre en image des liens entre plusieurs concepts. Pour le groupe B, la carte conceptuelle part de la didactique de l'arithmétique, et s'étend sur le nombre, le contrat didactique et ses effets, et enfin sur les attentes incomprises (obstacles et glissement métadidactique). Le fait que la multiplication et la division soient dans la même case signifie que pour les auteurs les deux opérations évoluent ensemble, et sont directement issues des algorithmes. Par ailleurs, il n'y a pas de lien direct entre la division et les procédures personnelles et conventionnelles, ce qui laisse penser que les procédures personnelles et conventionnelles ne sont pas directement sollicitées lors de la résolution de problèmes de division. On peut constater que la division est fortement influencée par les systèmes de numération, ce qui laisse penser qu'il est fondamental pour les élèves de connaitre au préalable les systèmes de numération et les groupements avant de s'embarquer dans la division proprement dite.

La carte conceptuelle du groupe A est détaillée (des tableaux à titres avec des contenus en sous-titres) et montre que faire travailler les élèves en arithmétique fait appel au développement du concept de nombre. Elle montre que le travail de l'arithmétique au primaire nécessite l'usage de matériel concret, et que l'on doit prévoir de rencontrer dans son enseignement (et donc d'anticiper) divers obstacles ainsi que les effets du contrat didactique. Cette carte met en avant l'importance de connaitre les systèmes de numération, et les opérations sur les nombres (addition, soustraction, multiplication et division). Le sens de lecture des quatre opérations (de la droite vers la gauche) semble montrer qu'il faut amener l'élève à débuter son apprentissage par l'addition et à le terminer par la division, en passant tour à tour par la soustraction et la multiplication. La multiplication et la division sont dans des cases différentes. Il n'y aurait donc pas de lien direct entre ces deux notions pour les auteurs.

Sur cette carte, on remarque aussi la présence d'îlots épars, dans la mesure où le contrat didactique n'est pas en lien avec les opérations sur les nombres ; c'est aussi le cas pour les types d'obstacles et le matériel. Par contre, sur la carte conceptuelle du groupe B, on aperçoit les trois grands pôles que sont le nombre, le contrat didactique et les systèmes de numération autour desquels gravitent d'autres concepts. Sur la carte du groupe A, on retrouve des doubles flèches qui semblent mettre en avant des relations d'équivalence entre les cases tandis que dans le groupe B, l'on a plutôt des flèches à sens unique qui semblent marquer une relation d'implication entre les divers concepts.

Conclusion

Au terme de ce travail, dans le cadre de la formation en didactique des mathématiques des futurs enseignants à l'école primaire, on constate que réaliser une analyse conceptuelle, expérimenter ledit concept auprès d'élèves et réaliser une carte conceptuelle permet à ces futurs professionnels de tendre vers une appropriation de différents concepts mathématiques dans leur formation. Notre analyse de l'analyse conceptuelle et des cartes conceptuelles de deux groupes d'étudiants montre qu'il y a eu à la fois apprentissage et formation en didactique de l'arithmétique.

Une des limites de ce travail est qu'il ne permet pas de préciser en quoi les cartes conceptuelles produites illustrent le cheminement conceptuel dans la mesure où nous n'avons accès qu'à la version finale. Il serait important, dans un travail futur, de questionner les étudiants sur leur démarche de réalisation des cartes pour avoir des éléments de réponse à cette préoccupation.

Bibliographie

Boulet, G. (1998). La nature dichotomique de la division : une analyse didactique. *Bulletin AMQ*, *38* (2), 14-22.

Deblois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 16* (1), 71-127.

Laflamme, A. (2006). *Carte conceptuelle : un outil pour soutenir l'acquisition des connaissances.* BENA, Université de Montréal, Canada.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2006). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 6e année.*

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). (2007). *L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'apprentissage ou d'adaptation (EHDAA).* Gouvernement du Québec, Québec.

Novak, J.-D. (2010). *Learning, creating, and using knowledge: Concept maps as facilitative tools in schools and corporations*. Routledge.

Novak, J.-D. (2002). Meaningful learning: the essential factor for conceptual change in limited or appropriate propositional hierarchies (LIPHs) leading to empowerment of learners. *Science Education, 86* (4), 548-571.

Novak, J.-D. (1998). *Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Novak, J.-D., & Gowin, D.-B. (1984). *Learning How to Learn*. New York, NY: Cambridge University Press.

Poirier, L. (2001). *Enseigner les maths au primaire ; notes didactiques*. Éditions ERPI, Québec.

Van De Walle, J. & Lovin, L.-H. (2008). *L'enseignement des mathématiques : l'élève au centre de son apprentissage ; Deuxième année du deuxième cycle.* Montréal, Québec : Éditions du renouveau pédagogique Inc.

Manuels scolaires

Clicmaths

Dagenais, S. (2014). *Clicmaths+. Cahier d'apprentissage. Corrigé. 5e année du primaire (vol. A et B).* Laval, Québec : Éditions Grand-Duc.

Défi mathématique

Lyons, R., & Lyons, M. (2005a). *Défi mathématique, manuel de l'élève, 3e cycle, livre 1*, Chenelière éducation, Québec.

Lyons, R., & Lyons, M. (2005b). *Défi mathématique, manuel de l'élève, 3e cycle, livre 2*, Chenelière éducation, Québec.

Annexes

Annexe 1

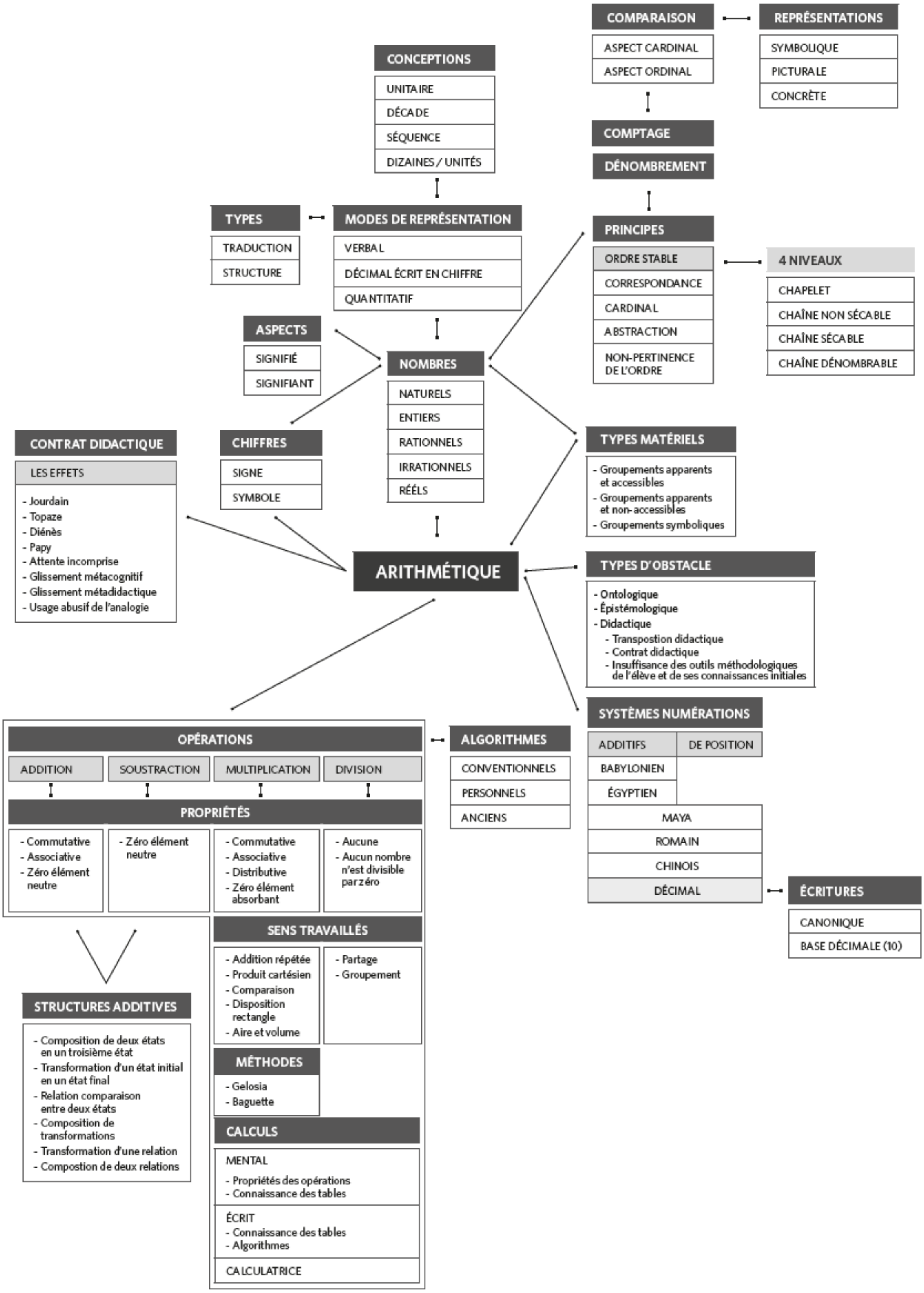


Fig. 1 : Carte conceptuelle du groupe A

Annexe 2

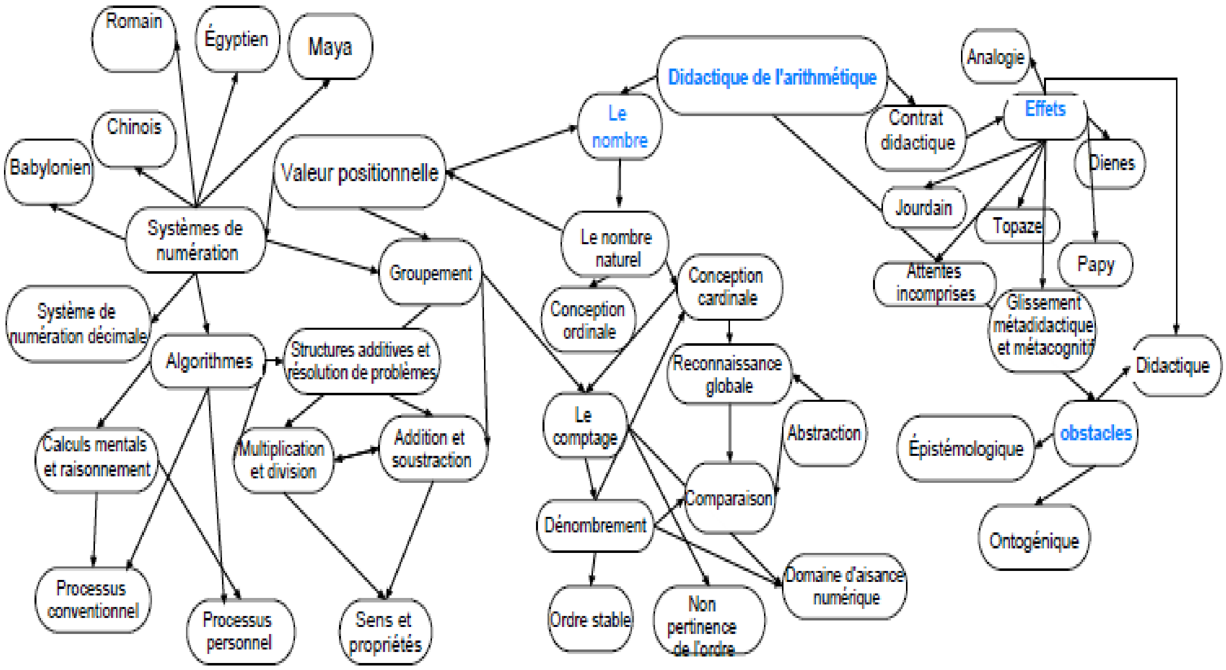


Fig. 2 : Carte conceptuelle du groupe B

UNE SITUATION-PROBLEME MOTIVANTE AUTOUR DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Salek OUAILAL, Noura BOUSSAA, Naceur ACHTAICH

Laboratoire d'Analyse, Modélisation et Simulation ; Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca (Maroc)

INTRODUCTION

« Logarithme et Exponentielle mangent au resto… Qui règle l'addition ? Exponentielle, car Logarithme ne-paie-rien (népérien) ». Cette blague a été évoquée par un professeur stagiaire de mathématiques au lycée, lors de son introduction du chapitre de la fonction exponentielle. Interrogé à ce propos, dans une séance de régulation tenue à notre centre de formation[1], il a répondu : « à cette époque 'morte' de l'année scolaire, la motivation observée au début a tendance à diminuer ; alors on cherche des stimulants pour animer la classe ». Ce constat, partagé par la plupart des enseignants expérimentés, nécessite à notre avis une discussion sérieuse pour combattre la routine que revêt l'opération d'enseignement-apprentissage des mathématiques.

En général, la motivation pour le travail scolaire baisse à l'adolescence (Gurtner et al, 2006). Néanmoins, vu la diversité des facteurs influençant sa dynamique (groupe de classe, environnement scolaire, famille, approches pédagogiques, société, …), nous allons préciser le cadre théorique pour inscrire notre contribution dans un dispositif d'apprentissage, que nous nommons *situation-problème motivante*. Plus précisément, nous retenons la théorie de l'autodétermination, selon laquelle l'apprenant est censé désirer être actif (Decy & Ryan, 2002). Pour autant, pour encourager le passage à l'action par différentes approches, que ce soit psychologique, sociologique ou anthropologique, la littérature soutient qu'il faut dépasser les débats sur l'importance attribuée à un facteur ou à un autre de la problématique de la motivation (Bourgeois, 2006 ; Vallerand & Thill, 1993). Nous avons déjà essayé d'exhiber quelques émergences du rôle didactique de certains de ces facteurs dans des situations particulières à savoir la *situation-problème historique* (Ouailal, 2015) et la *situation-problème étonnante* (Ouailal Achtaich, 2017). Notre objectif, ici, à travers des tâches d'apprentissage, est de présenter des outils mathématiques d'une manière non habituelle et ludique dans le but d'incarner un nouveau sentiment positif envers les mathématiques chez les lycéens. L'expérimentation que nous avons menée traite le thème de la fonction exponentielle et permet de discuter et d'analyser les impressions des apprenants qui ont compris nos suggestions.

VOULOIR AU LIEU DE FALLOIR FAIRE DES MATHÉMATIQUES : LA THÉORIE DE L'AUTO-DÉTERMINATION

La définition de la motivation que nous adoptons s'appuie sur une approche socio-cognitive et est proposée par Pintrich et Schunk (2002) comme « un processus qui suscite une action dirigée vers un but ». Dans cette ligne, la théorie de l'auto-détermination fait le point sur la dynamique motivationnelle responsable de l'engagement ou non de l'individu dans une activité[2]. Un de ses principes est que chaque être humain a une tendance innée à chercher continuellement le

[1] Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation où les professeurs stagiaires suivent une année de qualification dont ils bénéficient de 12 semaines d'étude théorique et 14 semaines de pratique.

[2] Nous entendons par "activité", une situation de recherche pour la classe.

développement de son potentiel humain. Cette théorie subdivise la motivation en d'autres types selon un continuum plutôt qu'une dichotomie. Plus les motifs d'une activité sont internalisés, plus les comportements de l'individu sont autodéterminés. La non-autodétermination est située à l'extrémité gauche d'un segment (voir la fig. 1).

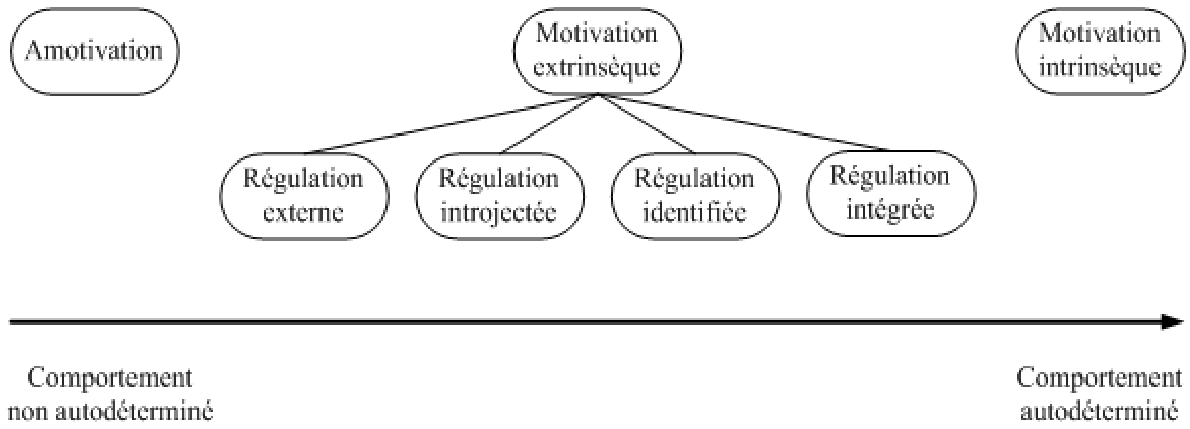


Fig. 1 : Le continuum de la motivation selon la théorie de l'autodétermination de Deci et Ryan (1985, 2000).

CARACTÉRISTIQUES D'UNE SITUATION-PROBLÈME MOTIVANTE (SPM) ET MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE

Afin de motiver un apprenant de façon intrinsèque, nous mettons en place une stratégie d'apprentissage, qui maximise la persévérance de l'élève adolescent dans l'apprentissage des mathématiques. On appellera cette stratégie la situation-problème motivante (SPM). Précisons d'emblée que qu'une SPM, doit être proposée en fin d'apprentissage à la différence de la situation-problème au sens de Brousseau (1998) qui s'utilise au début de l'apprentissage.

Les caractéristiques de la SPM

Une situation-problème motivante devrait :

- être liée à une notion mathématique précise ;
- correspondre à trois situations : une première déclenchante se basant sur un phénomène observable, amusant ou créatif qui participe à l'exploitation de la notion mathématique abordée. Une deuxième auxiliaire qui ne détient pas de difficultés dans les consignes, qui fait émerger des liens possibles entre langue naturelle et symbolisation mathématique et/ou sur l'utilisation des outils de la logique propositionnelle. Enfin, une troisième qui donne des éléments de réponse à la situation déclenchante ;
- être ouverte sur plusieurs méthodes de résolution y compris le changement de cadres (Douady, 1986), et ce, pour donner plus de contrôlabilité à la tâche d'apprentissage.

Modalités de mise en œuvre de la SPM

Nous suggérons que la SPM soit mise en action dans une séance complémentaire, tout en profitant du travail en petits groupes, situation dans laquelle l'adolescent est en test de compétences avec autrui. Ainsi, l'enseignant devrait :

- Etre attentif à son langage : les expressions de respect et de confiance sont recommandées, car l'adolescent est sensible aux paroles des adultes ;

- Proposer, au début de la séance, un tirage au sort pour constituer des petits groupes. Chaque groupe crée une charte du travail (donner des noms aux groupes, préciser l'élève qui va exposer les processus et les dialogues de son groupe, …) ;
- Introduire l'émergence historique des outils mathématiques : ceci va permettre aux élèves de réaliser que « les mathématiques » sont un produit qui a nécessité des siècles de recherches et que les mathématiciens ont rencontré des obstacles et des controverses pendant leurs recherches.

Énoncé de la SPM

L'enseignant distribue la situation suivante :

Partie 1 : Un défi amusant... Peut-on rouler avec une bicyclette à pneus carrés ?

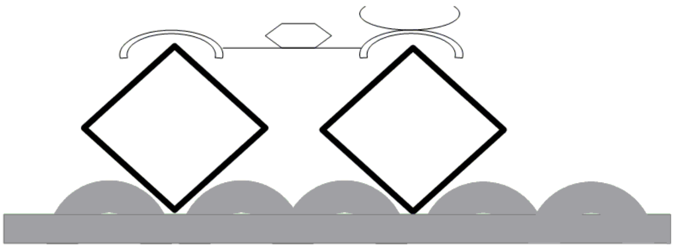


Fig. 2 : La bicyclette à pneus carrés

Le but de cette activité est d'étudier une fonction générée à partir de la fonction exponentielle, d'exploiter son graphique pour favoriser une modélisation de la courbe sur laquelle on peut dérouler un carré. Pour faire vivre le défi annoncé ci-dessus, on propose à la fin une séquence vidéo mettant en scène sa réalisation concrète.

Partie 2 : Le graphique ci-dessous est la courbe représentant une fonction numérique définie sur l'ensemble des réels dans un repère orthonormé :

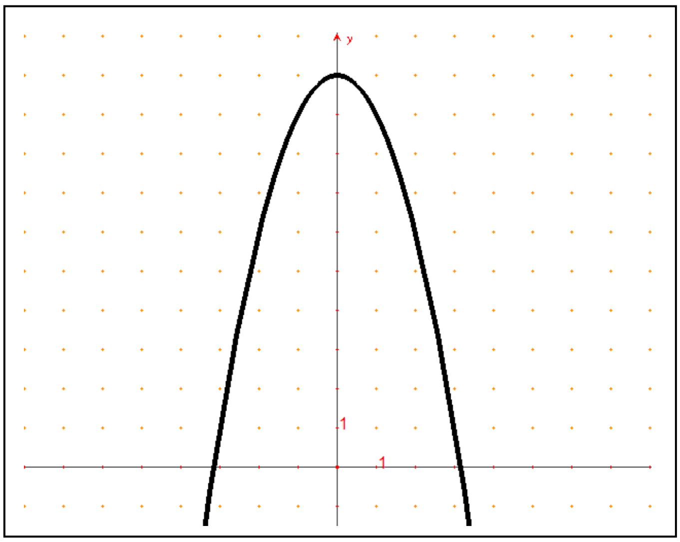


Fig. 3 : La fonction à étudier

1. Que dites-vous de la continuité et la monotonie de cette fonction ?
2. La fonction proposée admet-elle une fonction réciproque sur l'ensemble des réels ou seulement sur une partie ?

3. Calculez les images par la fonction réciproque – si elle existe – des points d'abscisse zéro, deux, moins un et moins trois.

Partie 3 : On considère la fonction numérique définie sur ℝ par : $b(x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$.

1. Étudiez la fonction numérique b sur son ensemble de définition, puis représentez sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. Soit f la restriction de la fonction b sur [0;1000000], montrez que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle à préciser.
3. Complétez le tableau suivant :

	La fonction f	La fonction réciproque
Ensemble de définition		
La continuité		
La monotonie		
Les tangentes		
Les asymptotes		

4. En déduire la représentation graphique de la fonction réciproquef^{-1}.

DÉROULEMENT PROPOSÉ

La première partie est composée d'une seule question qui a un sens concret pour les élèves. La discussion de la réponse pourrait se faire d'abord dans chaque groupe, puis par interaction entre les groupes. Dans ce cas, la technique du brainstorming est suggérée dans le but de faire émerger des idées originales. L'enseignant garde la solution jusqu'à la fin de la séance. Le but est d'une part, de sortir de la routine de la classe, d'autre part, de garder l'attention des élèves tout au long de l'activité car chacun d'eux va se forcer à s'engager cognitivement pour déchiffrer le défi.

Dans la deuxième partie, on a proposé un « simple » graphique (la parabole) fort connu par les élèves du lycée. En outre, comme ils peuvent aisément aborder les questions posées dans cette partie, l'objectif est de donner un sentiment de contrôlabilité de l'exercice. Le texte ne contient aucun signe mathématique, on s'est contenté d'utiliser un énoncé avec un langage naturel pour inviter l'apprenant à réfléchir sur la signification et l'utilisation de la symbolisation mathématique, et aussi sur le registre de représentation au sens de Duval (1993).

La troisième partie, est un sujet sur lequel les élèves n'ont pas l'habitude de travailler : remplir un tableau, utiliser la notation d'une fonction par la lettre b au lieu de f, écrire le « grand » nombre 1000000 au lieu de +∞. L'objectif est double, d'une part, offrir aux élèves des opportunités pour développer une pensée formaliste, initiant la transition vers la mathématique formelle du supérieur (Corriveau et Tanguay, 2006 ; Sackur et al, 2005) et, d'autre part insister sur les outils graphiques nécessaires pour construire le graphique d'une fonction numérique, le travail dans le cadre graphique étant peu traité en classe.

L'enseignant peut demander aux élèves de tracer, via un logiciel de géométrie dynamique, les deux graphiques des fonctions b et $x \mapsto x^2 + 1$ dans un même repère. Ces derniers ont tendance à avoir la même allure (cf. fig. 4), ce qui devrait permettre à l'apprenant de visualiser la convexité sous-jacente. Dans ce contexte, une variable didactique intéressante consiste à changer les valeurs de la constante C dans l'expression de la fonction B(x)=$\frac{e^{-Cx}+e^{CX}}{2}$, qui est responsable de la convexité du graphique.

Par ailleurs, l'anecdote historique sur l'étude des courbes « chaînettes[3]» peut être racontée, vu que les élèves peuvent voir des chaînettes réelles dans leur vie courante (ponts, arches, fils de téléphérique…). Pourtant c'est la clé du défi énoncé au début de notre situation-problème motivante !

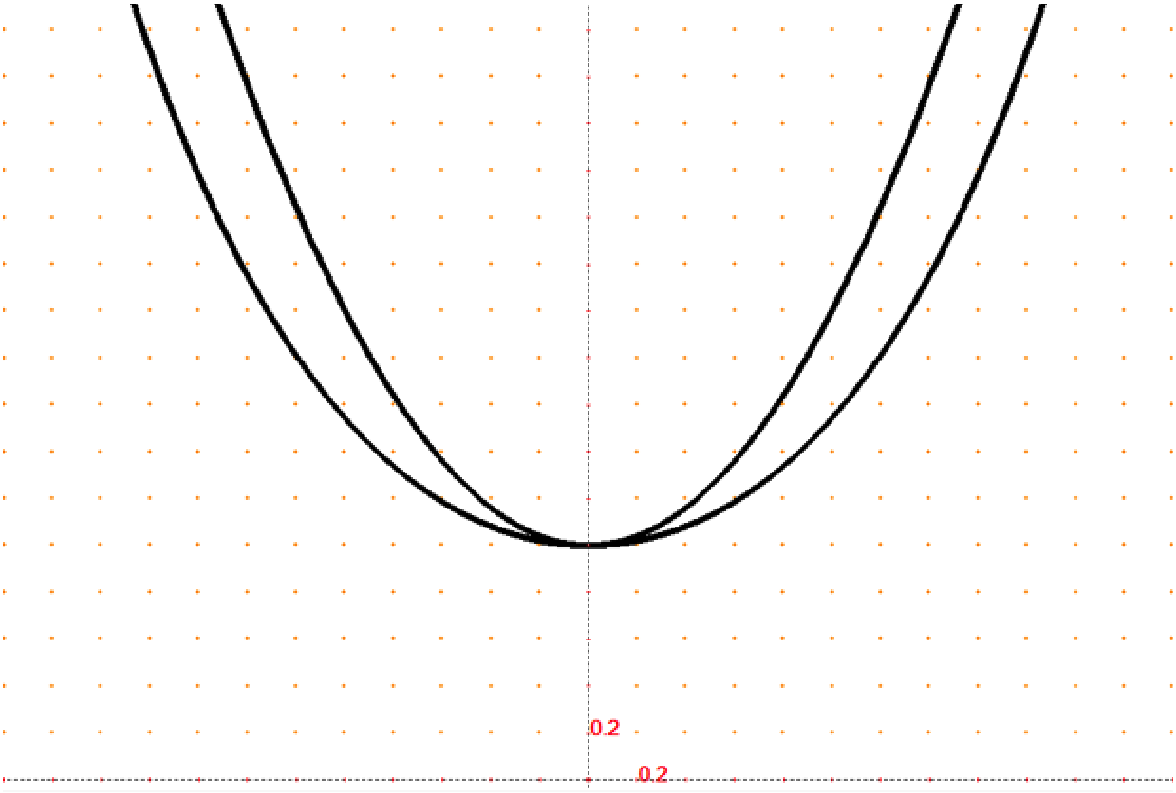


Fig. 4 : Graphiques des deux fonctions : $x \mapsto \frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$ et $x \longmapsto x^2+1$

EXPÉRIMENTATION DIDACTIQUE DE LA SPM

Le déroulement de l'expérimentation est programmé l'après-midi d'un mercredi, dans une séance complémentaire de mathématiques, obligatoire pour les élèves. Nous l'avons menée avec quinze classes. Chacune des classes comporte 35 élèves environ et est sous la responsabilité de deux professeurs stagiaires. Au total l'effectif est de 525 élèves de la dernière année du lycée, série scientifique. L'expérimentation s'est déroulée entre le mois de mars et le mois d'avril, selon le retard ou l'avance de chaque établissement dans le chapitre « La fonction exponentielle népérienne », cette période de l'année étant généralement caractérisée par le fait que les professeurs travaillent avec un rythme accéléré pour finir le programme. Dans une routine stressante, une partie des élèves se contente « d'avaler » les notions mathématiques.

LE TRAVAIL DES ÉLÈVES

D'un point de vue méthodologique, les séances sont retranscrites. Au début une feuille contenant les parties 1 et 2 de notre SPM[4], est distribuée aux élèves. Au bout de 5 minutes de réflexion, il y a des réactions à la situation déclenchante (partie 1), dont on présente quelques extraits ci-dessous.

[3] La chaînette est la forme prise par un fil pesant flexible, mince, homogène, inextensible, suspendu entre deux points, placé dans un champ de pesanteur uniforme ; Galilée pensait que c'était un arc de parabole, mais Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens ont montré en 1691, indépendamment, qu'il n'en était rien. (Voir www.mathcurve.com/courbes2d/chainette/chainette consulté le 12 juillet 2017)

- Pourquoi ne pas prendre des pneus triangulaires c'est plus économique !
- Pourquoi ne pas penser aux segments… les roues en forme de ski !
- Pourquoi ne pas penser à des véhicules et de coup prendre des roues carrées pour les moteurs rapides et des roues pentagonales pour des moteurs puissants …
- Qu'on est-il pour la stabilité du conducteur ? Les moyeux sont-ils à hauteur constante du sol ?

Ensuite, l'enseignant conclut avec les élèves la partie 1 en présentant une vidéo où l'expérience a été effectivement réalisée, puis il essaye d'orienter les discussions en se focalisant sur les propriétés de la fonction numérique, dont la parité qui est rapidement décelée. Un élève déclare que le parcours de la bicyclette est formé des demi cercles, la question discutée est alors : le cercle est-il le graphique d'une fonction numérique ?

Dans une deuxième séquence, chaque élève travaille individuellement pendant 12 minutes, Nous avons repéré en particulier dans leurs réponses les deux productions suivantes :

- Les courbes de la fonction et de sa fonction réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice… Mais quand je fais le dessin je trouve une courbe qui ne représente pas une fonction du fait qu'un point dispose de deux images ! c'est ce qu'on vu dans la première partie... Je pense que la fonction proposée n'admet pas de fonction réciproque !
- Du fait que les mesures sont positives… pour parler d'une fonction réciproque je pense qu'il faut se limiter à un intervalle positif !

Pour une troisième séquence, les élèves travaillent individuellement pour faire le tour des questions. Au bout de 5 minutes, ils se réunissent pour discuter puis écrire les réponses sur la feuille du groupe et doivent décider entre eux celui qui va expliciter à la classe leurs façons de répondre. Nous présentons ci-dessous une procédure mise en œuvre par un groupe autour du tracé du graphique de la fonction réciproque.

- Les éléments graphiques de la fonction réciproque b^{-1} sont facilement déduits de ceux de la fonction b en substituant y par x. Ainsi, l'équation de la tangente au point 0 est la droite horizontale $y = 1$ donc la tangente à b^{-1}est bien la droite verticale $x = 1$. On a aussi que (C_b) présente une branche parabolique de direction asymptotique (Ox) au voisinage de +¥ ($\lim b(x) = \infty$ et $\lim b(x)/x = 0$), donc $(C_{b^{-1}})$ admet l'axe (Oy) comme branche parabolique au voisinage de $+\infty$ ($\lim b^{-1}(x) = \infty$ et $\lim b^{-1}(x)/x = 0$).

LA MOTIVATION DES ÉLÈVES

Dans la section qui suit, nous revenons sur le retour de l'expérimentation et sa relation avec le cadre théorique adopté, à savoir la théorie de l'auto-détermination et l'approche socio-cognitive de la motivation. La grande surprise c'est que plus de la moitié des élèves (62%) a dit : « c'est tard » dans le sens que ces élèves font preuve d'un engagement autodéterminant pour travailler les mathématiques, mais le fait qu'il ne reste pas suffisamment de temps avant l'examen standardisé les renvoie à rentrer dans la routine habituelle de la préparation classique. Nous proposons de dresser le tableau ci-dessous, reliant les interprétations des séquences de l'expérience avec notre cadre théorique.

[4] Les exemples présentés sont des productions d'élèves relatives à chaque partie de la situation proposée.

Indicateurs / facteurs de la motivation		Indices vus dans l'expérience
Amotivation / Choix		Certains élèves démotivés (7%) cherchent des stratégies d'évitement de la tâche d'apprentissage, ce comportement se manifeste par les déclarations suivantes : « Monsieur, je peux sortir...? » « Monsieur, on n'a pas été prévus pour cette activité ! »
Motivation extrinsèque	Régulation introjectée / perception de l'adulte	Une partie des élèves (20%) ont participé à l'activité car leur professeur de classe leur a suggéré d'être présents, ces élèves ont une relation de confiance forte avec le professeur qui les a convaincus de l'intérêt de l'activité.
	Régulation identifiée	Les élèves adhérents au club de mathématiques (8%) étaient parmi les premiers à venir à l'établissement, ils ont collaboré à faire circuler l'annonce de l'activité au lycée. Les élèves en difficulté d'apprentissage des mathématiques (12%) ont volontairement participé, parce qu'ils ont cru qu'il s'agissait d'une séance de soutien.
	Régulation intégrée	Des élèves sérieux (5%) qui veulent avoir un bon classement pour intégrer une grande école. Des élèves (20%) veulent éviter une sanction de la part du professeur ou de l'administration.
Motivation intrinsèque	Perception de valeur	Un rapporteur d'un groupe a déclaré « Ma fonction préférée est la fonction exponentielle car elle possède des propriétés étonnantes : elle est définie sur tout IR, positive, continue, dérivable sa dérivée est elle-même, elle est facile à manipuler en calcul algébrique en utilisant les propriétés des puissances... »
Autodétermination	Voici quelques déclarations des élèves à la fin de l'activité : «J'ai éprouvé du plaisir à découvrir en un après-midi le secret d'un problème historique » ; « Je suis heureux de développer mes compétences sur plusieurs points d'Analyse ». Un élève a proposé d'exposer le programme Maple présentant une bicyclette à pneus carrés roulant sur une trajectoire en forme de « chaînette ».	

CONCLUSION

Au regard des résultats issus des expériences faites nous pouvons nous rendre compte que, tout au long de l'année scolaire, il y a des moments pour installer une *situation problème motivante* dans le but de motiver des lycéens en mathématiques, et ce avant qu'il ne soit trop tard !

Un facteur important pour susciter la motivation scolaire dans la classe de mathématiques est le professeur, qui devrait connaître les fondements de la motivation pour choisir des critères convenables afin de faire vivre un projet pédagogique personnel motivant à sa classe.

Enfin, notre objectif dans ce travail est de convaincre l'enseignant que la motivation scolaire n'est pas une condition préliminaire pour l'action d'apprentissage. Mais que c'est à lui de chercher à tisser des liens entre les notions mathématiques et les facteurs de la motivation scolaire. Et comme le disait Rousseau en 1762 : "*Donnez à l'enfant la motivation à apprendre et toute méthode lui sera bonne* !"

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998). *La Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Bourgeois, E. (2006). La motivation à apprendre. In E. Bourgeois & G. Chapelle (Eds.). *Apprendre et faire apprendre.* (pp. 229-244). Paris : P.U.F.

Corriveau, C. & Tanguay, D. (2006). Arrimage secondaire-collégial, formalisme et démonstration. à paraître dans les *Actes du 49e Congrès de l'Association Mathématique du Québec* (AMQ), Université de Sherbrooke.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (2002). *Handbook of self-determination research*. Rochester: University of Rochester Press.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-32.

Duval, R. (1993) Registres de représentation et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et des sciences cognitives*, *5*(1), 37-65.

Gurtner, J.-P., Gulfi, A., Monnard, I. & Schumacher, J. (2006). Est-il possible de prédire l'évolution de la motivation pour le travail scolaire de l'enfance à l'adolescence ? *Revue française de pédagogie, 155,* 21-33.

Ouailal, S. (2015). L'origine des nombres complexes. Une situation-problème pour motiver l'apprentissage. *Petit x*, *99*, 57-76.

Ouailal, S. & Achtaich, N. (2017). L'étonnement face à l'erreur scolaire. Une situation problème étonnante : Résolution des inéquations. *Revue de Mathématiques pour l'école, 227*, 20-28.

Pintrich, P. R. & Schunk, H. (2002). *Motivation in education. Theory, research, and applications.* New Jersey: Merill Prentice Hall.

Rousseau, J.-J. (1762). *Emile ou de l'éducation*, volume 4, tome premier, Collection complète des œuvres, Genève, 1780-1789, Récupéré du site de l'ouvrage : https://www.rousseauonline.ch/Text/volume-4-emile-ou-de-l-education-tome-premier.php

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P. & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique, *Recherches en didactique des mathématiques*, *25*(1), 57-90.

Vallerand, R. J. & Thill, E. E. (1993). *Introduction au concept de motivation*. Laval : Editions Etudes Vivantes.

PERSPECTIVES DE RECHERCHES SUR LES DIFFICULTES D'APPRENTISSAGE EN MATHEMATIQUES

Thierry DIAS, Cécile OUVRIER BUFFET

Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud ; Université de Reims Champagne-Ardenne

INTRODUCTION

Ces dernières décennies sont clairement marquées, au niveau international, par une augmentation du nombre de recherches dont les objectifs sont tournés vers une meilleure compréhension des troubles spécifiques d'apprentissage. Si certains d'entre eux sont aujourd'hui mieux identifiés et pris en charge (comme la dyslexie, par exemple), d'autres font encore l'objet d'études du fait de la complexité de leur repérage et de leur compréhension (Lewis & Fisher, 2016). C'est le cas des "troubles des apprentissages en mathématiques" souvent dénommés *mathematical learning disabilities* dans la littérature anglo-saxonne (et que nous choisissons en conséquence de noter MLD tout au long de cet article). Les troubles d'apprentissage spécifique en mathématiques font l'objet d'une définition au sein du DSM-5[1] en tant que « déficiences » à propos : du sens du nombre, de la mémorisation des faits arithmétiques, de la précision et de la fluidité du calcul ou du raisonnement mathématique. Le DSM-5 donne trois niveaux de gravité : léger, modéré et sévère.

Ces déficiences toucheraient plus de 5 à 10 % des élèves (Szũcs & Goswami, 2013) et seraient persistantes dans la scolarité (Geary et al., 2012), y compris au niveau de l'enseignement supérieur (McGregor et al., 2016), mais aussi dans la société où l'innumérisme[2] (Vannetzel, 2012) pourrait concerner un cinquième de la population (Geary, 2011), créant ainsi de nouvelles inégalités scolaires et sociales. Même si ces chiffres de prévalence font l'objet de nombreuses critiques (Vannetzel, 2012), il n'en est pas moins certain qu'ils témoignent de l'importance de difficultés spécifiques dans l'apprentissage des mathématiques. Leurs définitions et les processus de repérage qui leur sont associés font également l'objet de nombreuses interrogations au niveau de la recherche en psychologie et neurosciences cognitives (Lewis & Fisher, 2016 ; Szũcs, 2016). Cependant, au sein de ces paradigmes de recherche, les MLD sont souvent restreintes à des difficultés dans le traitement des quantités numériques et dans le calcul arithmétique (d'où le terme souvent utilisé de *dyscalculia*) (Butterworth, Varma & Laurillard, 2011). Cela étant, un nombre de plus en plus important d'études indiquent que les MLD sont hétérogènes (Fias, Menon & Szũcs, 2013 ; Karagiannakis et al., 2016) et affectent plusieurs aspects des compétences mathématiques (Kaufmann et al., 2013). Ces différents problèmes de définition (de la dyscalculie, des troubles d'apprentissages en mathématiques, de ce que revêt le terme de "raisonnement" mathématique, entre autres) rendent notamment la validité méthodologique du repérage discutable (Lewis & Fisher, 2016). Soulignons enfin que les remédiations actuelles apportées aux MLD ne prennent pas encore en charge le point de vue didactique (Kaufmann et al., 2013).

---

[1] Notamment : Loi pour la Refondation de l'École, 2013 en France ; Loi 170/2010 et Dir. 27/12/2012 (MIUR, 2010 & 2012) en Italie ; De l'intégration à l'inclusion scolaire des élèves en difficulté d'adaptation et d'apprentissage (CTREQ, 2009) pour le Québec.

[2] La terminologie innumérisme est synonyme de troubles des apprentissages concernant la numératie. Vannetzel la reprend d'autres auteurs et même acteurs institutionnels en France (Chatel, Vigier entre autres).

C'est à ce niveau spécifique de la dimension scolaire que nous avons souhaité réunir nos compétences au sein d'un groupe de chercheurs en didactique des mathématiques (équipe de Recherche Internationale sur les Troubles d'Enseignement et d'Apprentissage des Mathématiques, RITEAM). Nous souhaitons interroger les MLD au travers de filtres didactiques qui nous semblent nécessaires et complémentaires aux études internationales actuellement menées plutôt dans les domaines de la psychologie et de la neuropsychologie, afin de porter un regard davantage centré sur les processus d'enseignement et d'apprentissage. Il nous semble en effet important de développer des collaborations scientifiques se situant à deux niveaux :

1) au sein de la didactique des mathématiques, afin de baliser et organiser l'étude didactique des MLD ;

2) à l'interface entre didactique des mathématiques et neurosciences cognitives pour agir/intervenir en éducation (tel que cela apparaît dans les préconisations d'une conférence de l'OCDE de 2008). A cette interface se développent déjà des collaborations (Gardes & Prado, 2016) et des travaux spécifiques en didactique (Peteers, sous presse).

Ces collaborations scientifiques devraient permettre de mieux prendre en compte l'étude des environnements (milieu) et des processus didactiques, tant nous sommes persuadés de leur responsabilité dans certains phénomènes de dysfonctionnement dans les transmissions et acquisitions de connaissances (Deruaz & Dias, 2016 ; Dias & Deruaz, 2012). Nous souhaitons développer l'idée que dans de nombreux cas ce sont des choix, des postures et des démarches d'enseignement inadaptées qui doivent être interrogés pour expliquer les difficultés d'apprentissage. Nous sommes en effet convaincus que les potentiels d'apprentissage des élèves en mathématiques sont sous-estimés et tout particulièrement dans le contexte de l'enseignement spécialisé (Dias, 2015a).

En choisissant de bâtir une équipe francophone réunissant des universités de quatre pays différents (Suisse, France, Italie et Canada), le groupe RITEAM souhaite piloter des actions de recherche susceptibles de s'étendre sur d'autres terrains d'expérimentation notamment anglophones à l'avenir. Il ne s'agit pas en effet de limiter l'étude aux contextes de la francophonie, mais plutôt de profiter des apports de la recherche en didactique dans cet univers langagier. Pour l'heure, la liste des établissements concernés par la constitution du groupe RITEAM à l'automne 2017 est la suivante :

- Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud, Swiss Universities
- Université de Reims Champagne-Ardenne
- Université Claude Bernard, Lyon 1
- Université Unito, Turin
- Université du Québec à Montréal

Afin de rendre accessibles nos interrogations scientifiques, un site dédié aux travaux du groupe est disponible sur l'URL suivante : http://riteam.ch

Axes et objectifs de recherche

Afin de poursuivre une diversité d'objectifs, le groupe RITEAM souhaite développer trois principaux axes de recherche. Chacun de ces axes fera l'objet de projets spécifiques qui pourront s'appuyer sur des collaborations élargies à d'autres équipes de recherche s'intéressant à la spécificité des troubles d'apprentissage en mathématiques. Nous souhaitons ici préciser que notre choix terminologique de dénomination de ces difficultés par le sigle anglo-saxon MLD (*mathematical learning disabilities)* tient à la fois d'une clarification langagière et d'une forme de compromis scientifique en termes de classification. En effet, même si nous distinguons les notions de “trouble” (dont la caractérisation est la durabilité et la persistance) de celle de “difficulté” (déficience provisoire et contextuelle), nous adoptons la posture prônée par le DSM-5 qui consiste à désigner les troubles d'apprentissage dans un spectre large comportant des degrés de sévérité.

Axe 1 : Dispositifs et outils de repérage des MLD

Ce premier axe de recherche a pour objectif principal d'établir à terme une comparaison internationale des modalités de repérage des troubles d'apprentissage en mathématiques (MLD) selon la définition du DSM-5, mais nous prêterons attention à tout élève en difficulté (comme potentiellement atteint d'un trouble non encore identifié). Il s'agit de faire un état des lieux puis un comparatif des processus mis en place par les différents acteurs éducatifs quant au repérage des troubles des apprentissages en mathématiques. Soulignons qu'il n'existe pour l'heure aucun consensus scientifique dans le domaine de la définition des MLD (Karagiannakis et al., 2016 ; Mazzocco et al., 2003), ce qui implique *a priori* une grande diversité quant aux procédures de leur repérage et quant aux professionnels qui effectuent un tel repérage (milieux paramédicaux, médicaux, etc.). Il existe plusieurs protocoles qui sont d'ores et déjà en œuvre (Karagiannakis et al., 2016 ; Lafay et al. 2014).

Les acteurs professionnels que sont les enseignants sont de plus en plus sollicités pour répondre à des demandes institutionnelles d'adaptation, de remédiation et même de compensation afin de permettre une scolarité réussie pour des élèves bénéficiant d'un repérage effectué hors contexte scolaire (Dias & Deruaz, 2012). Au-delà de la mise en évidence de ces pratiques diverses, cette étude comparative devrait également permettre d'identifier les points cruciaux nécessaires à l'enrichissement de la formation des enseignants en termes de MLD.

En conséquence, les questionnements de recherche de ce premier axe de travail porteront sur les outils de repérage et la participation des enseignants à ce dépistage/diagnostic :

- Quels sont les outils utilisés pour diagnostiquer les MLD et de quelles disciplines scientifiques sont-ils issus ? Quels sont leurs fondements théoriques, à quelles définitions des MLD correspondent-ils ? Qu'évaluent-ils et quelle est leur portée ?
- Quelles sont les connaissances, les représentations et les conceptions des enseignants sur les MLD ? Quels sont leurs modes d'action (signalement et action) dans les différents pays du panel de l'étude ?

Pour répondre à ces questionnements, nous prévoyons de mettre en place une méthodologie principalement bâtie sur une enquête par questionnaires dans les différents pays faisant partie d'un panel qui reste à construire à ce jour. Cet axe de recherche fera l'objet de demandes spécifiques de subsides lors des deux prochaines années du fait des nombreuses contraintes et exigences méthodologiques.

Axe 2 : Etude des spécificités de l'activité mathématique des élèves MLD dans des situations d'apprentissage

La dimension "inclusive"[3] du cadre scolaire est définie, mais on ne peut que constater l'absence de prise en compte réelle et efficace des élèves ayant des difficultés en mathématiques. De telles difficultés affectent non seulement la scolarité des élèves et des étudiants, mais aussi des adultes dans leur vie de tous les jours, notamment par des déficits réels dans l'accès aux concepts et aux raisonnements mathématiques. Dans "raisonnement mathématique", nous englobons les raisonnements logiques élémentaires, pris en compte par quelques recherches en psychologie et neurosciences cognitives sur les MLD tels la dyscalculie (Morsanyi et al., 2013), mais également tout processus basé sur l'implication et l'induction mathématique, jusqu'au "mathematical thinking" (Singley & Bunge, 2014). L'étude de ce domaine encore inexploré (Lewis & Fisher, 2016) nécessite une articulation de modèles théoriques et un focus de la recherche fondamentale sur les processus à

[3] Notamment loi pour la Refondation de l'École, 2013 en France ; loi 170/2010 et Dir. 27/12/2012 (MIUR, 2010 & 2012) en Italie ; De l'intégration à l'inclusion scolaire des élèves en difficulté d'adaptation et d'apprentissage (CTREQ, 2009) pour le Québec.

l'œuvre dans les apprentissages mathématiques (Dennis, Berch, & Mazzocco, 2009), au-delà de la seule exploration des “word-problems” (Fuchs et al., 2008).

Nos questionnements de recherche dans cet axe concernent ainsi les potentialités et les difficultés des élèves du côté de l'activité mathématique, mais aussi l'étude des effets de la manipulation et de l'expérimentation dans la conceptualisation en mathématiques chez des élèves en difficulté. Nous visons ici différents types d'élèves identifiés ou non comme présentant des difficultés dans les apprentissages mathématiques. Pour mener à bien une telle étude, nous prenons un appui fort sur la dimension épistémologique et sur les travaux didactiques spécifiques à l'activité de recherche en mathématiques (e.g. Gardes & Yvain, 2015 ; Gardes & Durand-Guerrier, 2016 ; Ouvrier-Buffet, 2009 & 2011) et sur la manipulation et l'expérimentation (Dias, 2015a ; 2015b ; 2017). Ainsi, nos principaux questionnements sont les suivants :

- Comment définir les composantes de raisonnements mathématiques nécessaires à un élève, à un étudiant, et au futur citoyen ?
- Comment caractériser des types de problèmes mathématiques permettant de mobiliser ces composantes ?
- Quelles sont les spécificités des environnements d'apprentissage susceptibles de mieux reconnaître les potentiels d'apprentissage et de raisonnement des élèves ?

Les réponses à ces trois questions permettront d'élaborer des modèles d'analyse de dispositifs traitant des MLD, et plus particulièrement un modèle spécifique d'identification des troubles du raisonnement en mathématiques. L'objectif est de construire ensuite des types d'interventions appropriés pour les élèves en difficulté, ce qui nous amène à notre troisième axe de recherche : « Intervenir ».

Axe 3 : Propositions innovantes de processus de remédiation, de dispositifs de soutien et d'étayage auprès d'élèves MLD

Ce troisième axe de recherche vise à mettre en œuvre et évaluer des outils et dispositifs de soutien aux élèves présentant des MLD. Même si c'est le cœur de notre étude, nous ne souhaitons pas limiter le processus de recherche à l'inventaire et la présentation des outils de repérage et des dispositifs de prise en charge des élèves dans les différents pays partenaires de l'étude. Nous poursuivons l'objectif de concevoir puis de mettre en place des outils de remédiation au service des enseignants dans le cadre de leur formation professionnelle (qu'elle soit initiale ou continue). Nous constatons en effet un manque important dans le champ des difficultés en mathématiques, discipline pour laquelle les outils pédagogiques et didactiques ont été développés pour la scolarité ordinaire. On peut cependant signaler quelques travaux sur la remédiation auprès de publics spécifiques dans le domaine numérique (Daffaure & Guedin, 2011) ou plus généralement sur les dispositifs d'aide intégrés scolairement (Guedin, 2012).

Deux orientations sont d'ores et déjà envisagées pour le développement de cet axe de recherche, le premier concerne la notion d'étayage par le développement d'un outil d'analyse professionnel (Dias, Sermier Dessemontet et Dénervaud, 2016) et le second l'analyse d'un dispositif de soutien individualisé (Deruaz & Dias, 2016). Avec ce troisième axe de travail, nous souhaitons également entretenir des collaborations étroites entre la didactique des mathématiques et d'autres champs disciplinaires comme celui des neurosciences cognitives afin de montrer que les dispositifs d'aide peuvent se fonder dans une diversité et une pluralité d'offres.

Les principales questions de recherche associées à cet axe sont les suivantes :

- Quels sont les dispositifs opérationnels existants suivant les pays ? Sur quelles définitions des MLD sont-ils éventuellement construits ?

- Quelles modalités, quelles démarches didactiques sont-elles utilisées dans ces dispositifs existants ?
- Quels gestes professionnels, quelles formations professionnelles, quelles pratiques enseignantes sont-ils liés à ces dispositifs, peut-on en faire une typologie ?
- Quelles nouvelles propositions concrètes de processus de remédiation et de dispositifs de soutien sont concevables et applicables (notamment dans le cadre de la formation des enseignants) ?
- Quelles spécificités des pratiques enseignantes (dans des contextes spécifiques de l'éducation spécialisée où les élèves présentent des troubles de langage) ?

PERSPECTIVES

Les objectifs de recherche du groupe RITEAM concernent ainsi trois niveaux :

- Les processus de diagnostics des MLD sous l'angle de la didactique : la production d'une synthèse des modalités au niveau international (francophone dans un premier temps) de dépistage des troubles spécifiques des apprentissages en mathématiques. Il s'agit là, au niveau de la recherche en didactique des mathématiques, de faire un état des lieux mais aussi de produire des modèles d'analyse de dispositifs traitant des MLD.

- L'élaboration de nouveaux dispositifs permettant la prise en charge des élèves souffrant de MLD le plus tôt possible, dans un contexte scolaire (du cycle 2 au cycle 4) et des remédiations adaptées aux élèves en difficulté. Il s'agit là de construire et mettre à l'épreuve des modèles de test pour anticiper les adaptations nécessaires à la scolarisation de type inclusive.

- La formation initiale et continue des enseignants : il s'agit d'envisager la construction d'outils professionnels d'aide à la scolarisation réussie des élèves présentant des troubles d'apprentissage en mathématiques et de proposer des pistes tangibles pour la formation des enseignants.

Au niveau scientifique, ce projet dépasse les travaux actuels sur les troubles des apprentissages mathématiques par sa dynamique d'expertise et d'intervention articulée sur des approches issues de la didactique des mathématiques, en définissant l'interface possible avec les neurosciences cognitives. C'est là aussi un enjeu majeur du consortium RITEAM que de parvenir à définir les clés et les outils pour construire un dialogue entre sciences cognitives et éducation.

BIBLIOGRAPHIE

Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *Science*, *332*(6033), 1049-1053.

Daffaure, V., & Guedin, N. (2011). *Construction et utilisation du nombre : outils d'aide pour des élèves en difficulté d'apprentissage*. Marseille : Solal.

Centre de transfert pour la réussite éducative au Québec. (2009). *De l'intégration à l'inclusion scolaire des élèves en difficulté d'adaptation et d'apprentissage*. Repéré à : http://rire.ctreq.qc.ca/de-l'integration-a-l'inclusion-scolaire-des-eleves-en-difficulte-d'adaptation-et-d'apprentissage-version-integrale/

Dennis, M., Berch, D.B. & Mazzocco, M.M. (2009). Mathematical Learning Disabilities in Special Populations: Phenotypic Variation and Cross-Disorder Comparisons. *Developmental Disabilities Research Reviews, 15*(1), 80–89.

Deruaz, M. & Dias, T. (2016). Elèves en difficultés ? Dyscalculiques ? *Petit x*, *101*, 7-35.

Dias, T. (2017). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Paris : Magnard.

Dias, T. (2015a). Des mathématiques expérimentales pour révéler le potentiel de tous les élèves. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, *65*, 151-161.

Dias, T. (2015b). *Nous sommes tous des mathématiciens.* Paris : Magnard.

Dias, T., Sermier Dessemontet, R., & Dénervaud, S. (2016). Etayer les élèves à besoins particuliers dans la résolution de problèmes : un modèle d'analyse. *Math-Ecole*, *225*, 4-9.

Dias, T., & Deruaz, M. (2012). Dyscalculie : et si les enseignants reprenaient la main ? *ANAE. Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*, *120–121*, 529–534.

Fias, W., Menon, V., & Szucs, D. (2013). Multiple components of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, *2*(2), 43–47.

Fuchs, L.S., Fuchs, D., Hamlett, C.L., Lambert, W., Stuebing, K. & Fletcher, J.M. (2008). Problem Solving and Computational Skill: Are They Shared or Distinct Aspects of Mathematical Cognition? *Journal of Educational Psychology, 100*(1), 30-47.

Gardes, M.-L. & Yvain, S. (2015). Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème. In Aldon, G. (Ed.) *Actes de la 66ème CIEAEM Mathématiques et réalités* (p. 363-369). IFé.

Gardes, M.-L. & Prado, J. (2016). Entre neurosciences et éducation : les chaînons manquants. *Les Cahiers Pédagogiques, 527*, 35-38.

Gardes, M.-L. & Durand-Guerrier, V. (2016). Designation at the core of the dialectic between experimentation and proving: a study in number theory. In E. Nardi, C. Winsløw, T. Hausberger (Eds), *Proceedings of 1st conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (p. 286-293). Université de Montpellier.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology, 104*(1), 206–223.

Geary, D. C. (2011). Consequences, Characteristics, and Causes of Mathematical Learning Disabilities and Persistent Low Achievement in Mathematics. *Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics*, *32*(3), 250–263.

Guedin, N. (2012). Difficultés multiples en mathématiques : comment compter sur des aides à l'école ? *ANAE. Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*, *120-121*, 579-586.

Karagiannakis, G. N., Baccaglini-Frank, A. E., & Roussos, P. (2016). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, *21*(2), 115–141.

Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., & Nuerk, H. C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*, *4*(AUG).

Lafay, A., Saint-Pierre, M.-C., Macoir, J. (2014). L'évaluation des habiletés mathématiques de l'enfant : inventaire critique des outils disponibles. *Glossa*, *116*, 33–58.

Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking Stock of 40 Years of Research on Mathematical Learning Disability: Methodological Issues and Future Directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(4), 3-38.

Morsanyi, K., Devine, A., Nobes, A., & Szũcs, D. (2013). The link between logic, mathematics and imagination: Evidence from children with developmental dyscalculia and mathematically gifted children. *Developmental science, 16*(4), 542-553.

Mazzocco, M. M. M. & Myers, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, *53*(1), 218–253.

McGregor, K. K., Langenfeld, N., Van Horne, S., Oleson, J., Anson, M., & Jacobson, W. (2016). The University Experiences of Students with Learning Disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, *31*(2), 90–102.

MIUR, Legge 8 ottobre 2010, nº 170 : Nuove norme in materia di disturbi specifici dell'apprendimento in ambito scolastico. Repéré à : http://www.gazzettaufficiale.it/gunewsletter/dettaglio.jsp?service=1&datagu=2010-10-18&task=dettaglio&numgu=244&redaz=010G0192&tmstp=1288002517919

MIUR, Direttiva Ministeriale 27 Dicembre 2012 : Strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica. Repéré à :

http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/8d31611f-9d06-47d0-bcb7-3580ea282df1/dir271212.pdf

OCDE (2008). *Apprendre au XXIème siècle : recherche, innovation et politiques. Comprendre le cerveau : naissance d'une science de l'apprentissage - Nouveaux éclairages sur l'apprentissage apportés par les sciences cognitives et la recherche sur le cerveau.* CERI (Centre de la recherche pour la recherche et l'innovation dans l'enseignement). OCDE : Paris. Repéré à : https://www.oecd.org/fr/sites/learninginthe21stcenturyresearchinnovationandpolicyapprendreauxxiesieclerechercheinnovationetpolitiques/40583325.pdf

Ouvrier-Buffet, C. (2009). Maths à Modeler: Research-Situations for Teaching Mathematics. In Barbeau, E. & Taylor, P. (Eds.) *ICMI Study 16, Challenging Mathematics in and beyond the Classroom*, (pp. 23-29). Springer.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero- definitions. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(2), 165-182.

Peteers, F. (sous presse). Un trouble à l'interface entre différents champs disciplinaires (didactique des mathématiques, psychologie et sciences cognitives) : la dyscalculie. In S. Coppé & E. Roditi (Eds), *Actes de la XIXè école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Singley, A. T. M., & Bunge, S. A. (2014). Neurodevelopment of relational reasoning: Implications for mathematical pedagogy. *Trends in Neuroscience and Education, 3*(2), 33-37.

Szucs, D. (2016). Subtypes and comorbidity in mathematical learning disabilities: Multidimensional study of verbal and visual memory processes is key to understanding. *Progress in Brain Research*, *227*, 277-304.

Szũcs, D., & Goswami, U. (2013). Developmental dyscalculia: Fresh perspectives. *Trends in Neuroscience and Education*, *2*(2), 33–37.

Vannetzel, L. (2012). Dyscalculiques ou laissés pour compte ? *ANAE. Approche Neuropsychologique Des Apprentissages Chez L'enfant*, *120–121*, 497–502.

RMÉ POUR CELLES EST CEUX QUI S'INTÉRESSENT À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.revue-mathematiques.ch, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 1 depuis la rubrique *Consultation*.

Contact : revue.mathematiques@gmail.com

Site internet : www.revue-mathematiques.ch