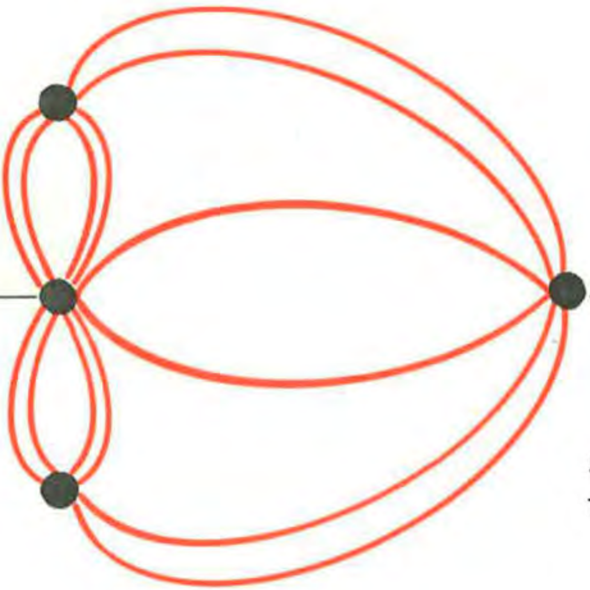
54



# MATH ECOLE

SEPTEMBRE 1972

11e ANNÉE

MATH ECOLE SEPT. 1972 11e ANNÉE 54

# La mathématique et la langue

L'essor de la mathématique et de la linguistique et ses conséquences dans l'enseignement ont conduit les pédagogues à s'interroger sur les relations possibles à établir entre ces deux disciplines.
Le présent numéro de Math-Ecole prolonge cette interrogation et propose des éléments de réponse. L'équipe des collaborateurs se compose d'un mathématicien, André Calame, d'un spécialiste des problèmes d'enseignement de la langue maternelle, Charles Muller et d'un praticien de l'enseignement, Gaston Guélat.
On se rendra compte qu'une intersection existe entre les deux grands ensembles de la mathématique et de la langue. Dans cette intersection, on trouve plusieurs choses:

a) les faits mathématiques, souvent traduits graphiquement au moyen de symboles particuliers peuvent être, et même doivent être, verbalisés: exercice de rigueur dans l'expression de la pensée;
b) les faits de langue peuvent être traités au moyen des instruments d'ordonnancement du réel proposés par la mathématique: exercice de clarification des choses de la langue;
c) les faits de langue, enfin, comportent une substructure logique qui les relie de manière directe aux structures mathématiques: exercice d'approfondissement du réel linguistique.

Les exercices que nous proposent nos auteurs ressortissent surtout aux deux premiers: a et b. Il n'était pas inutile, cependant, de voir évoqué, par Charles Muller surtout, le troisième aspect de la liaison de la logique avec la langue. Le fonctionnement de l'esprit humain est tel qu'il n'est pas possible d'imaginer qu'une fonction aussi importante que le langage ne soit pas, pour une large part, établie sur un fondement logique. C'est ce qu'avaient pressenti ces messieurs de Port-Royal, c'est ce que cherche à établir Noam Chomsky. Cette base engendre la langue profonde, la langue primordiale. Elle serait la même pour toutes les langues du monde. C'est par son truchement que s'élaborent les systèmes de traduction automatique. La langue cependant n'est pas logique seulement. S'appuyant sur ce premier soubassement, elle produit, en surface, des variations infinies qui permettent de dire tout l'homme: ses pensers et ses affects. Il s'ensuit que l'enseignement de la langue sera d'autant meilleur qu'il se développera sur deux plans: celui du logique et celui du non logique. Deux pôles entre lesquels des tensions s'établissent, tensions propres à assurer, chez qui en est conscient, la fermeté rationnelle des propos et leur humaine sensibilité.

S. R.

# Enseignement de la mathématique et enseignement du français

par A. Calame, maître de mathématique au gymnase cantonal
et chargé de cours à l'université, Neuchâtel

## Préambule

Notre propos sera de décrire quelques situations dans l'enseignement du français qui relèvent des mathématiques élémentaires. Il serait faux, bien sûr, de prétendre que la coordination entre la langue maternelle et les mathématiques est un phénomène récent. Au niveau primaire, tout particulièrement dans les classes à maître unique, il s'établit naturellement des ponts, des liaisons entre les diverses disciplines. Les pédagogues n'ont pas attendu notre époque pour donner une certaine unité à leur enseignement. Toutefois, il nous paraît utile de souligner dans les perspectives actuelles la richesse de certaines situations que l'on peut exploiter aussi bien du côté du français que du côté des mathématiques.

Inutile de rappeler ici l'évolution des mathématiques élémentaires au cours des dernières décennies. Il suffirait de parcourir les différents numéros de Math-Ecole pour trouver le reflet de cette évolution et de ses incidences sur l'enseignement. On sait aussi combien l'enseignement du français — de la grammaire, en particulier — a été modifié et enrichi à la suite des travaux des linguistes de notre époque. Ce qui nous paraît remarquable, c'est que cette double évolution de l'enseignement des mathématiques et du français conduit à une convergence de vues très prometteuse. Au niveau de la recherche même on pressent en linguistique tout le parti que l'on pourra tirer des structures de l'algèbre moderne et il est tout aussi certain que les problèmes posés par la linguistique influenceront les travaux des mathématiciens.

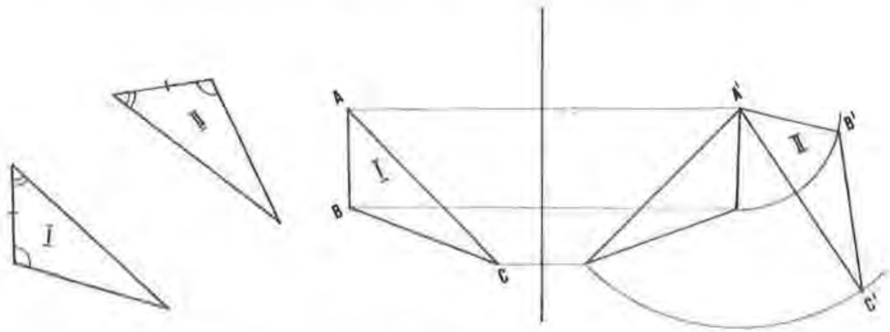
Dans ces pages, nous nous limiterons à l'enseignement primaire et nous commencerons par décrire brièvement quelques changements récents les plus significatifs du point de vue méthodologique tant dans l'enseignement des mathématiques que dans l'enseignement du français.

Nous verrons combien ces modifications procèdent d'une même démarche et offrent de grands espoirs pour la coordination de ces enseignements. Nous donnerons ensuite quelques exemples d'utilisation de situations mathématiques qu'on peut développer dans les leçons de français.

Enfin, en guise de conclusion, nous esquisserons les difficultés auxquelles pourrait conduire une coordination mal comprise. La langue naturelle, dans sa souplesse, dans ses nuances ne saurait se laisser formaliser de manière élémentaire. L'application abusive de l'algèbre des ensembles peut mener à des absurdités au niveau de la langue courante et du sens commun.

## Evolution de la mathématique

Un des aspects les plus frappants de la mathématique moderne est la part laissée au non numérique. Loin de nous l'idée de négliger l'aspect utilitaire de l'arithmétique et d'abandonner le calcul formel. Mais il est incontestable que l'étude des relations propose des situations très riches et très favorables à l'activité de l'élève. L'enseignement des mathématiques autrefois «statique» est devenu «dynamique». Pensons à l'égalité des triangles et à son utilisation en géométrie. On apprenait: «Deux triangles sont égaux s'ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun». Actuellement, c'est par un mouvement, au moyen d'une isométrie, que l'on aborde l'égalité des triangles: «Deux triangles sont égaux si l'on peut passer de l'un à l'autre par une isométrie» (par exemple au moyen d'une symétrie axiale suivie d'une rotation).



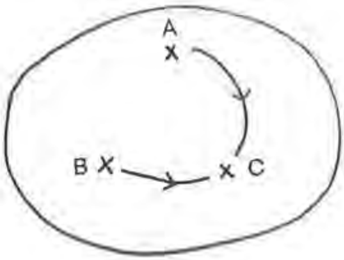

Dans les programmes classiques, tout l'accent portait sur l'arithmétique. Les seules notions de géométrie ne dépassaient pas le niveau du vocabulaire. On demandait aux élèves de reconnaître certaines figures géométriques: carré, rectangle, losange, etc. Mais ces figures devenaient vite prétexte à faire de l'arithmétique: calcul de périmètres et d'aires. Au lieu de *dire* ce qu'est un rectangle ou un carré, il est bien plus formateur de commencer par *agir* sur de telles figures. Avant même de rechercher les propriétés de symétrie du rectangle ou du carré, l'élève aura manipulé ces figures dans des situations tout autres, par exemple en se servant des blocs logiques. Ce qui compte, ce sont les jeux effectués, les classements, les partitions. Cela importe beaucoup plus que les noms donnés aux figures et l'on admettra même que les petits élèves parlent de «longs» ou de «pointus» plutôt que de rectangles et de triangles.
On retrouve le même esprit dans la découverte du nombre. Il convient d'abord de dégager intuitivement et expérimentalement la notion de bijection entre ensembles (ou si l'on préfère, de correspondance bi-univoque). Le nombre cardinal apparaît ensuite comme une propriété commune à tous les ensembles entre lesquels on peut établir une bijection. L'action, au niveau de la manipulation, précède et prépare la notion de nombre.

Une même évolution pédagogique transforme l'enseignement du français. Est-il vraiment utile que l'enfant commence par distinguer sur le plan verbal la nature des mots? Doit-il reconnaître d'abord les verbes, les noms, les adjectifs? Ne vaut-il pas mieux exercer l'expression, établir une correspondance entre les mots utilisés et des symboles appropriés comme dans les méthodes issues des travaux de Galichet? Il y a là un parallélisme évident entre l'usage des symboles en français et des blocs logiques en mathématique. L'élève reconnaît la fonction des mots avant d'apprendre la terminologie grammaticale.
Il n'est dès lors pas surprenant que la pédagogie des mathématiques et la pédagogie de la langue maternelle puissent tirer profit d'un même type de situations. Dans la démarche de la découverte du nombre, aux manipulations succéderont d'une part des schémas, des diagrammes, première abstraction à partir de l'expérience concrète. D'autre part, la description orale des manipulations permettra aussi de prendre le recul nécessaire par rapport à la manipulation. L'enseignement des mathématiques va donc s'appuyer sur la langue courante. Mais inversement, nous voudrions insister sur l'apport d'une situation mathématique pour l'exercice de la langue.

**Quelques situations**

*Premier exemple*

— Dans une classe, choisissons trois enfants que nous nommerons: Anne, Béatrice et Claude. Ces enfants se placent de manière que Béatrice et Anne regardent Claude. Quant à Claude, il ne regarde pas ses deux camarades. Au niveau d'un diagramme, la situation peut se traduire ainsi:



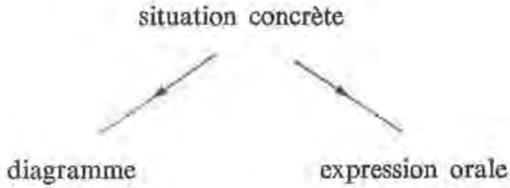

Les flèches symbolisent la relation «regarde»

Au niveau du langage, il y a plusieurs façons de décrire la situation envisagée. Imaginons d'abord, ce qui est le plus facile, que la situation soit décrite par un autre élève extérieur à l'ensemble {A, B, C}. Il dira: «*Anne regarde Claude et Béatrice regarde Claude*».

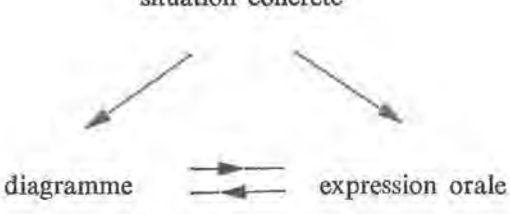
Si l'on demande à Anne de faire la description, elle pourra dire: «*Je regarde Claude et Béatrice regarde Claude*» ou avec plus d'élégance: «*Béatrice et moi, nous regardons Claude*».
Enfin, demandons à Anne de décrire la situation en s'adressant à Béatrice. Elle dira:

«*Je regarde Claude et tu regardes Claude*»
ou «*Toi et moi, nous regardons Claude*»
ou «*Tu le regardes et je le regarde*».

Dans cette première approche, les trois élèves miment la scène qui est ensuite décrite d'une part par un diagramme, d'autre part par des expressions orales variées, selon le schéma:

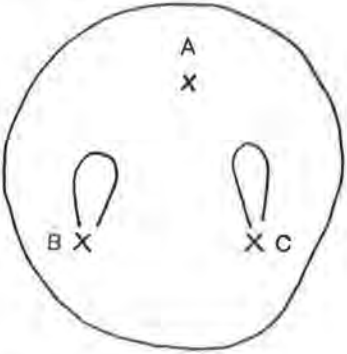


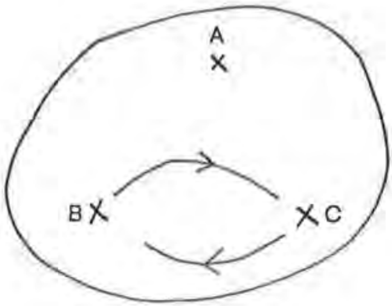

— Dans une seconde approche, on pourra soit partir du diagramme pour mimer la scène, puis la décrire oralement, soit partir de la description orale d'une situation pour la mimer et la représenter par un diagramme.
— Enfin, étape plus abstraite, on s'exercera au passage direct du diagramme à l'expression orale ou inversement, sans plus recourir à la situation mimée:




La situation envisagée est suffisamment riche pour permettre des exercices variés. En effet, avec trois élèves, il y a 64 situations différentes possibles. Parmi elles, 27 sont des applications de l'ensemble $\{A, B, C\}$ dans lui-même; ce sont les situations où chaque élève regarde un élève, lui-même ou un camarade. Dans les 37 autres situations, l'un au moins des trois élèves ne regarde personne.

Notons en passant les deux situations particulières suivantes:




Anne dit:
*«Béatrice se regarde
et Claude se regarde»*

Anne dit:
*«Béatrice regarde Claude
et Claude regarde Béatrice»*

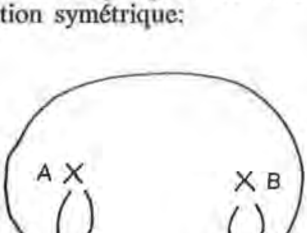
ou Anne dit à Béatrice, en usant des pronoms:

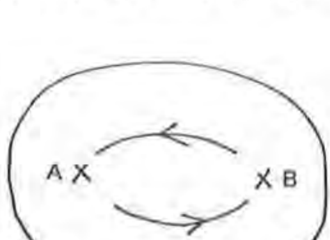
*«Tu te regardes et il se regarde»* *«Tu le regardes et il te regarde»*

Supposons qu'Anne emploie une forme au pluriel; elle pourra dire dans les deux cas:

*«Béatrice et Claude se regardent»*
ou *«Vous vous regardez»*

La forme utilisée est ambiguë en l'absence d'un contexte qui permettrait de distinguer les deux situations. A ce stade, il serait intéressant de représenter par un diagramme des expressions telles que: «nous te regardons», «nous nous regardons», «vous me regardez» en relevant les formes ambiguës. L'analyse des formes ambiguës permet de souligner le rôle des pronoms «nous», «vous» tantôt dans le sens réfléchi, tantôt dans le sens réciproque. Sur un ensemble de deux élèves, la forme réfléchie «nous nous regardons» (nous-mêmes) correspond à une relation réflexive, tandis que la forme réciproque «nous nous regardons» (l'un l'autre) correspond à une relation symétrique:



Dans tout ce qui précède, nous avons employé les diagrammes fléchés, mais il est bien clair qu'on pourrait travailler avec d'autres représentations telles que les tableaux à double entrée. Il est même recommandé de varier le type des diagrammes.

*Deuxième exemple*

Considérons des blocs logiques de deux formes différentes (ronds, carrés) et de deux couleurs différentes (bleus, jaunes). Sur cet ensemble de blocs, on peut faire agir les «machines» suivantes:

— la machine C qui modifie la couleur;
— la machine F qui modifie la forme;
— La machine T qui modifie la couleur et la forme;
— la machine N qui ne modifie ni la couleur, ni la forme.

Il est bien connu que la mise en chaîne des quatre machines conduit à combiner les machines deux à deux selon la table suivante:

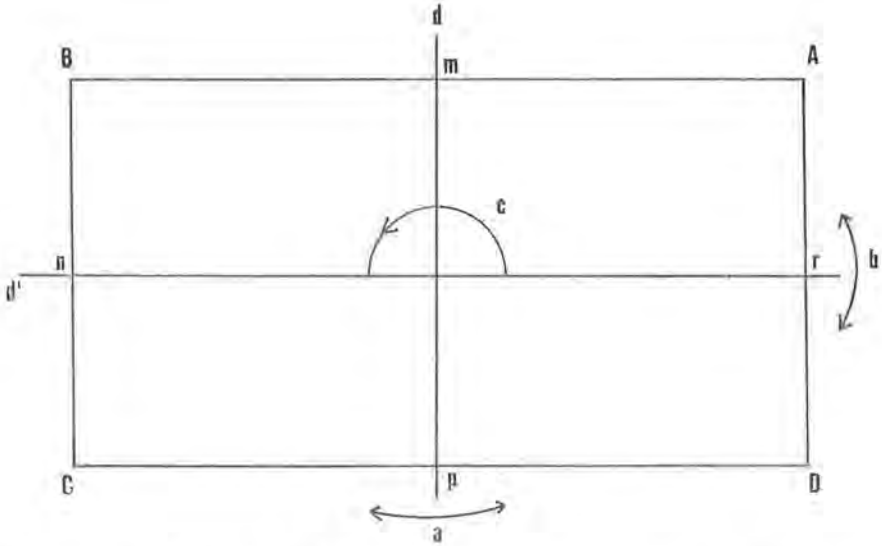
| * | N | C | F | T |
|---|---|---|---|---|
| N | N | C | F | T |
| C | C | N | T | F |
| F | F | T | N | C |
| T | T | F | C | N |

Il s'agit d'une table de groupe qui est un modèle du groupe de Klein [8, p. 122][1].
Ce groupe se rencontre dans de nombreux domaines et Jean Piaget en a souligné l'importance en psychologie de l'intelligence [5, p. 27].
Il existe bien des manières d'introduire le groupe de Klein par des modèles concrets. Nous pouvons même dire que presque toutes les expériences pédagogiques qui portent sur la notion de groupe font une place privilégiée à ce groupe-là. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages cités dans la bibliographie [1 et 6].
Nous nous contenterons de décrire très simplement le groupe de Klein par son *action* sur un ensemble de 4 points bien choisis: les sommets d'un rectangle ayant pour axes de symétrie les droites d et d'. Chaque élément du groupe de Klein agissant sur l'ensemble des sommets détermine une bijection de cet ensemble sur lui-même. Nous en donnons le détail ci-dessous:

$$\text{e}[2]\begin{cases}A \mapsto A\\ B \mapsto B\\ C \mapsto C\\ D \mapsto D\end{cases}\quad a:\begin{cases}A \mapsto B\\ B \mapsto A\\ C \mapsto D\\ D \mapsto C\end{cases}\quad b:\begin{cases}A \mapsto D\\ B \mapsto C\\ C \mapsto B\\ D \mapsto A\end{cases}\quad c:\begin{cases}A \mapsto C\\ B \mapsto D\\ C \mapsto A\\ D \mapsto B\end{cases}$$

(Voir figure page 8)

[1] Voir bibliographie en fin d'article.
[2] e, transformation identique (aucun changement).




Le groupe de Klein est ainsi illustré par son action sur l'ensemble des 4 sommets d'un rectangle. C'est pourquoi, on dit souvent que le groupe de Klein «est» le groupe du rectangle.
Remarquons qu'il est possible de faire agir le groupe de Klein non pas sur les sommets, mais sur les côtés du rectangle. En notant m, n, p et r les côtés du rectangle, nous avons les quatre bijections suivantes:

$$e: \begin{cases} m \longmapsto m \\ n \longmapsto n \\ p \longmapsto p \\ r \longmapsto r \end{cases} \quad a: \begin{cases} m \longmapsto m \\ n \longmapsto r \\ p \longmapsto p \\ r \longmapsto n \end{cases} \quad b: \begin{cases} m \longmapsto p \\ n \longmapsto n \\ p \longmapsto m \\ r \longmapsto r \end{cases} \quad c: \begin{cases} m \longmapsto p \\ n \longmapsto r \\ p \longmapsto m \\ r \longmapsto n \end{cases}$$

Bien que ces deux façons de faire agir le groupe de Klein sur les éléments d'un rectangle (sommets ou côtés) paraissent très analogues, il nous faut remarquer une différence tout de même. Dans le premier exemple, il existe toujours pour deux sommets quelconques un élément du groupe qui transforme le premier sommet en le second. Ainsi, pour le couple (B; D), il existe un élément du groupe, ici c, qui envoie B sur D. De même pour tous les autres couples, comme on peut le vérifier facilement. On exprime ce fait en disant que le groupe de Klein *opère transitivement* sur l'ensemble des sommets du rectangle. Au contraire, dans le second exemple, il n'y a aucune transformation qui envoie m sur n ou r sur m. On dira, par opposition à l'exemple précédent que le groupe de Klein *n'opère pas transitivement* sur l'ensemble des côtés du rectangle. Le groupe permute séparément m et p d'une part, n et r d'autre part.

Ces considérations semblent nous éloigner de notre sujet. Il n'en est rien pourtant. En effet, au lieu de faire opérer le groupe de Klein sur des figures géométriques, il est possible de le faire opérer sur des propositions de la langue française. Par exemple, envisageons les 4 propositions suivantes:

(A) *Jean a lu ce livre*
(B) *Jean n'a pas lu ce livre*
(C) *Jean a-t-il lu ce livre?*
(D) *Jean n'a-t-il pas lu ce livre?*

(voir aussi l'article de Chs Muller)

Désignons par n la transformation qui fait passer de la forme affirmative à la forme négative et inversement. On a:

$$n: \begin{cases} A \longmapsto B & \text{«\textit{Jean a lu ce livre}» devient «\textit{Jean n'a pas lu ce livre}»} \\ B \longmapsto A & \text{«\textit{Jean n'a pas lu ce livre}» devient «\textit{Jean a lu ce livre}»} \\ C \longmapsto D & \text{«\textit{Jean a-t-il lu ce livre?}» devient «\textit{Jean n'a-t-il pas lu ce livre?}} \\ D \longmapsto C & \text{«\textit{Jean n'a-t-il pas lu ce livre?}» \textit{devient} «\textit{Jean a-t-il lu ce livre?}»} \end{cases}$$

Désignons par i la transformation qui fait passer de la forme affirmative à la forme interrogative ou inversement. Notons seulement les propositions par les lettres A, B, C, D. On a:

$$i: \begin{cases} A \longmapsto C \\ B \longmapsto D \\ C \longmapsto A \\ D \longmapsto B \end{cases}$$

Enfin, en composant les transformations n et i, on obtient le passage de la forme affirmative à la forme interrogative-négative et inversement. En désignant cette nouvelle transformation par t et en désignant par e la transformation identique qui ne modifie aucune des propositions, nous obtenons une nouvelle illustration du groupe de Klein. Il suffit de comparer l'action de e, n, i, t sur les 4 propositions avec l'action de e, a, b, c sur l'ensemble des sommets du rectangle pour relever la complète analogie ou l'isomorphisme comme disent les spécialistes. A nouveau le groupe de Klein opère transitivement sur l'ensemble des 4 propositions choisies.

*Troisième exemple*

Un autre modèle du groupe de Klein est fourni par les changements de genre, de nombre sur un ensemble de noms [8].

*Quatrième exemple*

Enfin, considérons les 4 propositions suivantes:
(1) «*Je sais qu'il viendra*»
(2) «*Je sais qu'elle viendra*»
(3) «*Tu sais qu'il viendra*»
(4) «*Tu sais qu'elle viendra*»

Désignons par p le passage de la 1re personne à la 2e personne et inversement. La transformation p permute les phrases (1) et (3) d'une part, les phrases (2) et (4) d'autre part. Soit g le passage du masculin au féminin ou le passage inverse portant sur les pronoms «il», «elle». La transformation g permute les phrases (1) et (2) d'une part, les phrases (3) et (4) d'autre part.
En composant les transformations p et g, nous obtenons une nouvelle transformation que nous notons t et qui permute les phrases (1) et (4) d'une part, les phrases (2) et (3) d'autre part. Avec l'identité e, les transformations p, g et t forment un groupe pour la composition et ce groupe est à nouveau un modèle du groupe de Klein. Si l'on met en évidence les pronoms de conjugaison, chacune des phrases est caractérisée par un ensemble de deux pronoms:

(1) {je, il}
(2) {je, elle}
(3) {tu, il}
(4) {tu, elle}

On remarque sans peine l'action du groupe de Klein sur ces ensembles de pronoms. Les pronoms «je» et «tu» sont permutés par les transformations p et t; ils sont invariants par les transformations e et g. Les pronoms «il» et «elle» sont permutés par les transformations g et t; ils sont invariants par les transformations e et p. Il n'y a donc aucune transformation qui envoie «je» sur «il» ou sur «elle». Dans cet exemple, le groupe de Klein n'opère pas transitivement. L'exemple est analogue à l'action du groupe de Klein sur les côtés du rectangle.

**Groupes de transformations**

A travers les exemples précédents, nous découvrons une situation très courante à la fois en mathématique et en linguistique. *Il s'agit d'étudier les transformations qui laissent invariantes certaines propriétés:*

- — isométries qui laissent un rectangle globalement invariant;
- — interrogation et/ou négation portant sur la proposition: «Jean a lu ce livre»;
- — changement de genre et/ou de nombre portant sur un ensemble fixe de noms;
- — changement de pronoms de conjugaison sur une phrase donnée.

Dans chaque cas, nous retrouvons l'étude de certaines transformations compatibles avec une structure donnée. Sommes-nous en présence de situations caractéristiques de ce qu'on a convenu d'appeler les mathématiques modernes? Peut-être, mais à condition de voir dans ces «mathématiques nouvelles» une longue évolution commencée il y a plus d'un siècle. Nous voudrions rappeler ici qu'il y a exactement cent ans que Félix Klein, dans son célèbre programme d'Erlangen, définissait la géométrie comme l'étude des groupes qui laissent invariantes certaines propriétés. Ainsi, le groupe de la géométrie métrique est le groupe des transformations qui conservent les distances; le groupe de la géométrie affine est le groupe des transformations qui conservent le

parallélisme; le groupe de la géométrie projective est le groupe des transformations qui conservent les alignements [4]. On pourrait citer encore les groupes plus spécialement étudiés dans l'enseignement élémentaire: les dilatations (homothéties et translations) qui conservent les directions, les similitudes qui conservent la mesure des angles en valeur absolue.
De même en linguistique, on peut étudier les transformations au niveau de l'ensemble des pronoms qui sont compatibles avec une phrase donnée [3]. Par exemple, à partir de la proposition «je te vois», on peut remplacer les deux pronoms de telle manière que la nouvelle expression garde un sens, c'est-à-dire qu'elle soit sémantiquement acceptable. En laissant invariante la forme «vois», l'ensemble des transformations possibles est assez restreint: le pronom sujet est nécessairement «je» ou «tu» pour des raisons d'orthographe. Si l'on s'autorise à conjuguer le verbe «voir», les formes sont beaucoup plus nombreuses:

«*nous les voyons*»
«*vous vous voyez*»
«*nous te voyons*»
«*ils me voient*» etc.

Deux couples de pronoms sont incompatibles sémantiquement, ceux qui conduiraient aux expressions inacceptables: «*nous me voyons*» et «*vous te voyez*».

Dans ce qui précède, nous avons tenté de montrer combien l'enseignement du français et des mathématiques peuvent être proches dans leurs démarches. A l'aide d'exemples particuliers, nous avons essayé d'illustrer dans quelle direction pourrait se dessiner une coordination des deux enseignements. Ces situations sont ouvertes, c'est-à-dire qu'elles se prêtent à des généralisations intéressantes. Ce sont aussi des situations riches, car elles sont plus qu'une simple traduction d'une situation mathématique en langage courant, plus qu'une tentative de formaliser mathématiquement une donnée linguistique. C'est pourquoi nous osons dire qu'il y aurait avantage à développer ce genre d'expérience.

**Les risques à ne pas courir**

En revanche, nous nous devons de prendre nos distances par rapport à certains essais que nous qualifierons de dangereux dans le domaine de l'algèbre des ensembles. Un mathématicien aussi averti que René Thom a même cru bon d'intervenir vigoureusement sur ce sujet dans la revue «L'âge de la science» [7]. En évitant les excès polémiques de R. Thom, il est tout de même permis de relever les abus manifestes commis au nom d'une certaine conception artificielle du rôle de la langue dans l'enseignement le plus élémentaire. Nous ne parlerons ici que de l'usage de la conjonction «et» en laissant au lecteur le soin de consulter l'article de R. Thom pour d'autres considérations pertinentes.

En algèbre des ensembles, il est commun de présenter l'intersection comme une illustration de la conjonction «et». Si A désigne l'ensemble des triangles (dans un référentiel de blocs logiques) et B l'ensemble des blocs rouges, alors A $\cap$ B désigne l'ensemble des blocs qui sont triangles *et* rouges, l'ensemble des triangles rouges. *La conjonction «et» dans ce sens précis ne peut relier que des termes désignant des attributs de nature différente,* ici la forme et la couleur. On voit immédiatement à quelle ambiguïté conduirait l'expression «l'ensemble des blocs rouges **et** bleus». Il s'agit soit de l'ensemble vide, car chaque bloc n'a qu'une couleur, soit de blocs bigarrés, mais on ne voit pas au nom de quoi l'ensemble des blocs rouges et bleus serait un sous-ensemble de l'ensemble des blocs rouges (ou des blocs bleus). Il nous paraît d'autant plus utile de citer cette confusion qu'elle se rencontre jusque sur la couverture d'un livre de mathématique moderne [2]. Il serait bon de réserver *l'usage des diagrammes de Venn, de Caroll au seul cas où la conjonction «et» porte sur des attributs de nature différente.* Rappelons à ce propos que la conjonction «et» peut prendre dans le langage courant des sens beaucoup plus variés que ceux admis au niveau de la logique et de l'algèbre des ensembles. Il serait manifestement faux de faire entrer de force ces sens différents de «et» dans les catégories restreintes du langage logico-mathématique. Pour illustrer ce point, il suffit de rappeler que le «et» logique a une valeur commutative: *«l'ensemble des blocs rouges et minces»* est égal à *«l'ensemble des blocs minces et rouges»*. En revanche, cette commutativité de «et» disparaît dans les expressions où cette conjonction prend une valeur temporelle («et puis») indiquant une succession chronologique. Il ne revient pas au même de dire:

*«Il ne mangea plus et il mourut»*
ou *«Il mourut et il ne mangea plus»*

Nous terminerons donc en souhaitant que l'enseignement élémentaire sur les ensembles distingue soigneusement les formes logiquement acceptables des formes qui n'ont rien à faire avec le niveau ensembliste même si elles sont parfaitement correctes du point de vue de la langue. Nous espérons avoir montré dans ce qui précède que la coordination des enseignements du français et des mathématiques peut se situer à un niveau plus riche que celui des «patates».

## Références bibliographiques

[1] Z. P. Dienes - E. W. Golding, *La géométrie par les transformations III - Groupes et coordonnées,* OCDL.
[2] Paul E. Gennart, *Comprendre la mathématique moderne,* Marabout Université.
[3] Yves Gentilhomme *in Recherches pédagogiques No 42,* INRDP, Paris.
[4] Lucien Godeaux, *Les géométries,* Coll. Armand Colin.
[5] Jean Piaget in *L'enseignement des mathématiques,* Delachaux & Niestlé.
[6] Nicole Picard, *Mathématique et jeux d'enfants,* Castermann-poche.
[7] René Thom, *Les mathématiques «modernes»: une erreur pédagogique et philosophique?,* Age de la Science, Vol. III, No 2.
[8] André Calame, *Introduction aux mathématiques modernes,* Griffon.

A propos de la notion de «groupe», voir dans Math-Ecole 53, mai 1972, l'article de Charles Burdet (N. d. l. r.).

# Langue maternelle et mathématique

par Charles Muller, maître de didactique du français à l'Ecole normale, Neuchâtel

## Introduction

L'institution d'une relation explicite entre une langue naturelle et le champ de la démarche rationnelle, ou logico-mathématique, illustre une des principales préoccupations des pédagogues d'aujourd'hui.
Non pas que le sujet soit nouveau. L'Histoire en témoigne d'ailleurs et plus singulièrement encore l'histoire de la philosophie, tout au moins dans sa phase classique. Un rapide retour au passé nous rappellera qu'avec Aristote apparaissent les fondements de ce qui deviendra la logique moderne, laquelle s'exprime selon une systématique rigoureuse portant sur la langue comme vecteur possible de la pensée rationnelle.
Beaucoup plus près de nous, l'école de Port-Royal représente sans doute l'effort le plus significatif quant à la recherche d'une mise en parallèle entre les catégories du langage et celles de la pensée. Il n'est pas inutile de rappeler à ce propos que ses plus illustres représentants, Arnault et Lancelot, auteurs de la «Grammaire générale et raisonnée» (1660) sont les pères d'une linguistique nouvelle issue de la philosophie cartésienne [1][1].
Mais si l'on cherchait à situer précisément l'origine des théories actuelles quant aux relations entre la langue et la démarche mathématique, c'est sans doute à l'Espagnol Sanctius (1587) qu'il faut remonter [2]. Il est en effet le premier à avoir défini la notion de structure linguistique dans sa «Minerva», grammaire latine affirmant la nécessité d'une formalisation dans l'explication des principes de fonctionnement des langues.
Aujourd'hui, nous disposons d'un éventail de références dû à la réflexion de mathématiciens dont les recherches empiétaient nécessairement sur le domaine de la linguistique, les servitudes imposées par les ordinateurs impliquant la création de «langages-machine» posant automatiquement le problème de la relation entre langue naturelle (au sens large) et processus purement logiques. Sur ce plan on peut affirmer que Noam Chomsky est à l'origine d'un mouvement caractéristique quant à l'application des mathématiques à la description des structures linguistiques [3].
Chomsky montre tout d'abord que la «Grammaire générale et raisonnée» constitue, par ses fondements, un «modèle» nettement plus apte à décrire la langue que toutes les grammaires dites traditionnelles qui ont paru par la suite. Celles-ci ne seraient en somme que des produits dégénérés et des sources de confusion incapables de rendre compte du caractère créatif de la produc-

[1] Voir bibliographie en fin d'article.

tion linguistique. Ce qui est d'ailleurs vrai. On pourrait dès lors discuter et se demander si l'ère du confusionisme grammatical n'a pas son origine chez Aristote lui-même, voire chez Platon. Rien ne prouve, en effet, que l'opposition millénaire Sujet-Prédicat à laquelle toute explication se ramène (le chien dort = le chien est dormant) traduise bien une démarche analytique «naturelle». Le fait est que, pour s'y tenir, on n'a pas hésité à mélanger sans trop se poser de questions, langue, logique, sens et construction en recourant selon les nécessités à des classes de critères pour le moins fort disparates.

En fait, ce que Chomsky reprend pour le développer, c'est l'hypothèse émise par Arnault et Lancelot selon laquelle il existe un *niveau de langage* «sous-jacent, logique et universel». En d'autres termes, une langue se manifeste «en surface» à travers des structures immédiatement observables (les sons ou les signes graphiques) mais engendrées «en profondeur» par un système de règles logiques dont il est possible de rendre compte à travers une représentation formalisée. Cette représentation prend généralement chez Chomsky l'aspect d'une structure «en arbre» que les récents ouvrages consacrés à la grammaire nous ont rendue familière. A tel point d'ailleurs qu'on n'éprouve plus aujourd'hui de scrupules à réduire sans transition l'analyse grammaticale (dans certaines classes) à une suite d'activités «arboricoles» souvent malheureuses.

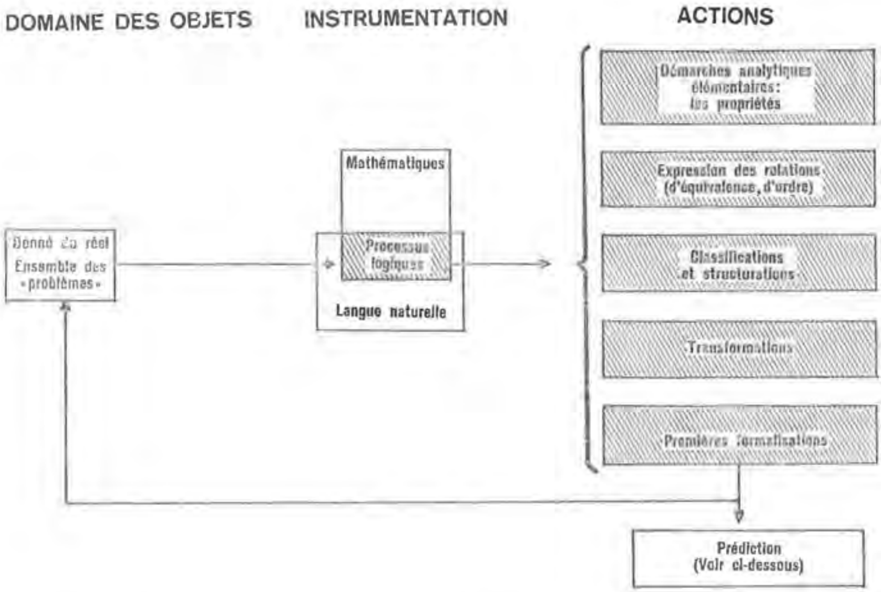
Il semble, en effet, qu'en proposant des simplifications abusives dans l'intention louable de renouveler la grammaire scolaire on ait perdu de vue la vraie signification des arbres de Chomsky. L'effort d'abstraction qu'ils supposent (en tant que représentation formalisée de règles génératives liées aux structures profondes de la langue) nous paraît manifestement hors de la portée d'élèves du degré primaire.

En revanche, et c'est précisément ce qui nous intéresse ici, l'idée d'un traitement opératoire des faits de langue en vue d'une définition plus rigoureuse de la notion de grammaire (donc de règle de construction et/ou de transformation) mérite d'être retenue. Nous y mettons cependant deux conditions. La première est que l'enfant puisse déterminer *de lui-même* les propriétés des objets, c'est-à-dire de tout «ce qui peut être non seulement observé et dénommé, mais modifié, transformé, répété, prédit, bref, ce qui peut être soumis à l'expérimentation» [4]. La deuxième condition implique *l'existence d'une corrélation stricte entre la logique des opérations auxquelles on se propose de soumettre le «matériel» linguistique et la logique des opérations figurant, par exemple, dans un programme de mathématique proprement dit.* En dehors de quoi on ne peut que craindre une grande confusion. Ces précautions n'entravent d'ailleurs en rien la variété des possibilités; il suffira pour s'en convaincre de se reporter aux deux articles où A. Calame et G. Guélat donnent indirectement une illustration de cet aspect de la question.

Notre but est avant tout de déterminer les bases d'une sorte d'épistémologie — et par conséquent d'économie — relativement à la construction des connaissances: l'enfant doit devenir capable de tirer parti, face à des «problèmes» de nature différente, d'une instrumentation sensiblement unifiée. Ce qui revient, en fait, à accorder un rôle prioritaire à la notion de *«savoir-faire», donc d'action,* par opposition à la notion de *«savoir»* tout court.

## Limites et possibilités d'une relation langue maternelle-mathématique

Il ne fait aucun doute que la notion mathématique de structure — particulièrement importante pour ce qui nous occupe — s'applique au domaine linguistique, à condition qu'on veuille bien considérer les objets (ou les opérations) indépendamment de leur sens comme mots. Cette nouvelle restriction nous conduit à une limite un peu plus confortable bien que toute provisoire: *langue naturelle et mathématique marquent incontestablement des intersections, mais seulement cela.* Et ceci par opposition à une thèse après tout imaginable où les catégories de l'une et de l'autre se superposeraient au sens des théoriciens de Port-Royal.
Il semble donc préférable de s'en tenir pour l'instant à une axiomatique peut-être élémentaire (illustrée par le schéma ci-après) mais autorisant des types d'activités précoces de nature logique:




Les obstacles restent toutefois nombreux. Le simple fait, par exemple, d'avoir à considérer, même implicitement, des notions fondamentales comme «valeur», «propriété formelle» ou encore «univocité» incite déjà à la prudence et souligne bien ce qui distingue une langue naturelle (ses «êtres» et surtout son fonctionnement) du champ logico-mathématique proprement dit.
D'intéressantes tentatives ont cependant déjà été faites en vue de réduire cette distinction [5]. Mais pour classer l'ensemble des structures linguistiques parmi les structures générales, il est indispensable de ramener préalablement *toutes* les données (et non seulement certaines d'entre elles) à un niveau

d'abstraction formelle. Ce qui, en d'autres termes, revient ni plus ni moins à une «mathématisation» systématique de la grammaire. Il faut cependant répéter qu'une telle démarche restera toujours une vue de l'esprit, la nature même de la langue imposant des limites dont il s'agit de prendre conscience. Le fait qu'un enfant puisse découvrir et représenter ce qu'une langue naturelle offre de strictement logique parmi l'infini de ses manifestations constitue déjà à nos yeux une évolution considérable par rapport aux conceptions méthodologiques traditionnelles.
Cette évolution correspond d'ailleurs à une transformation significative de la forme et du contenu des leçons. Il y a même lieu d'admettre avec O. Ducrot que «le rapprochement de l'enseignement du français et de celui des mathématiques (...) devrait contribuer à effacer l'image du professeur comme distributeur de savoir — *car il n'y a, dans le domaine dont nous parlons, aucun savoir à distribuer. Le rôle de l'enseignant devient au contraire de provoquer et d'ordonner la réflexion des élèves — ce qui lui permet du même coup de se libérer des programmes et des manuels, et de reprendre possession de son enseignement (car la liberté du professeur et celle des élèves ne font finalement qu'un)*» [6].

## Perspectives pratiques

Trop souvent une pédagogie consistant à munir l'enfant de mécanismes généralement considérés comme prioritaires (règles, moyens mnémotechniques, «trucs», etc.) ne conduit qu'à un comportement aveugle, c'est-à-dire au psittacisme.
Dans le meilleur des cas, c'est par un effort individuel que l'élève cherchera plus tard à restructurer, pour les comprendre, les situations qui étaient demeurées inintelligibles. L'expérience montre alors que cet effort reproduit, au niveau des objets et de manière plus ou moins anarchique, d'une part l'activité élémentaire de perception comme fonction de signal (au sens de Piaget [7]) et, d'autre part, l'exercice nettement plus construit de la *faculté de prédiction* (revoir schéma ci-devant).

Toute invention ou toute création, ou si l'on préfère, toute *transformation* sont autant de preuves d'une compréhension effective du donné et présupposent cette faculté. Mais toute prédiction ne s'élabore que si le sujet est capable d'opérer sur des symboles, c'est-à-dire sur des signes figurant des propriétés ou des valeurs abstraites des objets eux-mêmes par l'action. Apprendre à abstraire des valeurs, à substituer la forme au contenu, c'est se donner la possibilité de manipuler des idées et par conséquent de prédire. A ce titre, la langue est déjà à un certain degré une représentation formalisée du réel dont elle rend compte grâce, en particulier, à une systématique (sa grammaire) et un ensemble fini d'éléments signifiants (les «mots»). Parmi ces derniers, on trouve des éléments d'articulation fonctionnant comme opérateurs

logiques du type «si... alors», «et», «ou», etc.; ou comme relations du genre «avoir même... que», «être plus... que», etc. Enfin, citons l'ensemble des qualificatifs comme exemple d'inclusions.
Si les langues naturelles et les mathématiques procèdent en fin de compte, comme le rappelait J.-Bl. Grize, d'une même intelligence, c'est qu'il existe entre elles une certaine réciprocité. L'algèbre des ensembles nous paraît le confirmer si l'on accepte de la considérer comme un langage au sens premier du terme.
Les exemples qui suivent — donnés sans considération d'ordre ou de niveau — illustrent quelques types d'activités limités toutefois au degré primaire. Que leur objet soit la grammaire proprement dite ou l'orthographe, ils se rapportent tous à l'un ou l'autre aspect des considérations qui précèdent.

### *1. Opérations sur les pronoms*

Référence:

$$\left.\begin{array}{l} [a + b = c] \\ a + \,.\, = c \\ a + b = \,. \\ \text{etc.} \end{array}\right| \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} [\text{toi et moi} = \text{nous}] \\ \text{toi et} \;\;.\;\; = \text{nous} \\ \text{toi et moi} = \;\;. \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Remarque: trouver les différentes valeurs de a (lui, elle, eux).

### *2. Les pronoms: composition de deux pronoms identiques ou non*

| * | moi | lui | vous | elle | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| moi | | | | | |
| lui | | | | | |
| vous | | | | | |
| elle | | | | | |
| ... | | | | | |

| * | moi | vous | elle | lui | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| toi | | | | | |
| nous | | | | | |
| eux | | | | | |
| elles | | | | | |
| ... | | | | | |

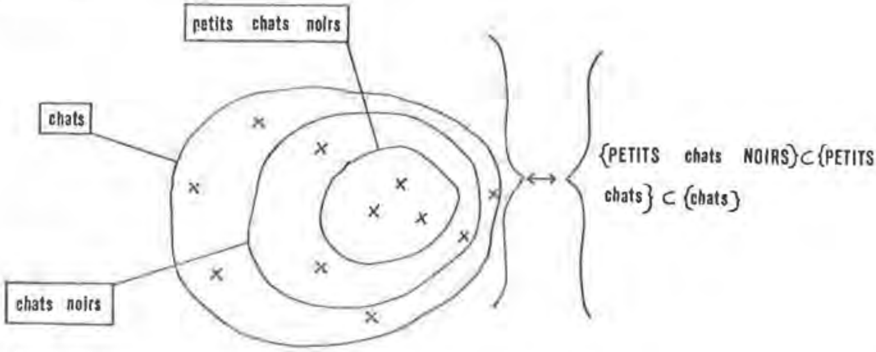
Remarques:

a) Ces tables ont fait l'objet (à un niveau plus élaboré puisqu'elles étaient destinées à des étudiants) d'un excellent article de Y. Gentilhomme [8].

b) Les incidences de telles activités concernent la morphologie du verbe tant du point de vue linguistique proprement dit
[toi et moi (nous) partirONS - venIONS - etc.]
que du point de vue orthographique
[elle et lui arrivENT demain]

## 3. *L'adjectif qualificatif et la relation d'inclusion*

Référence:

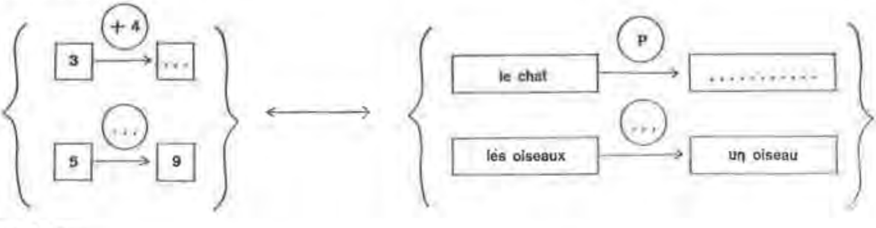



Remarque:
La représentation ci-dessus ouvre sur une fonction plus «opératoire» de l'espèce grammaticale et remplace avantageusement la traditionnelle définition: «L'adjectif qualificatif dit comment sont les personnes, les animaux et les choses» (Les Grammaires).

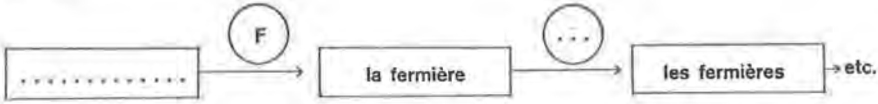
## 4. *Les transformations du nom et du verbe: les «machines»*

Les exercices suivants sont inspirés des travaux de N. Picard [9]. Les transformations du nom (genre et nombre) et du verbe (personne, nombre, temps) aboutissent à des formes que l'élève doit avoir déterminées consciemment, c'est-à-dire dans l'esprit d'une opération (faire passer dans la machine X). L'alternance rapide des situations se révèle plus efficace que les séries habituelles auxquelles on fait subir une seule et même transformation («Mets les noms suivants au pluriel», etc.).

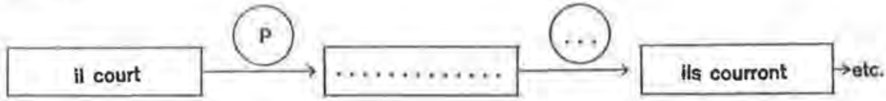
a) Les machines en ligne
Référence:




ou bien:

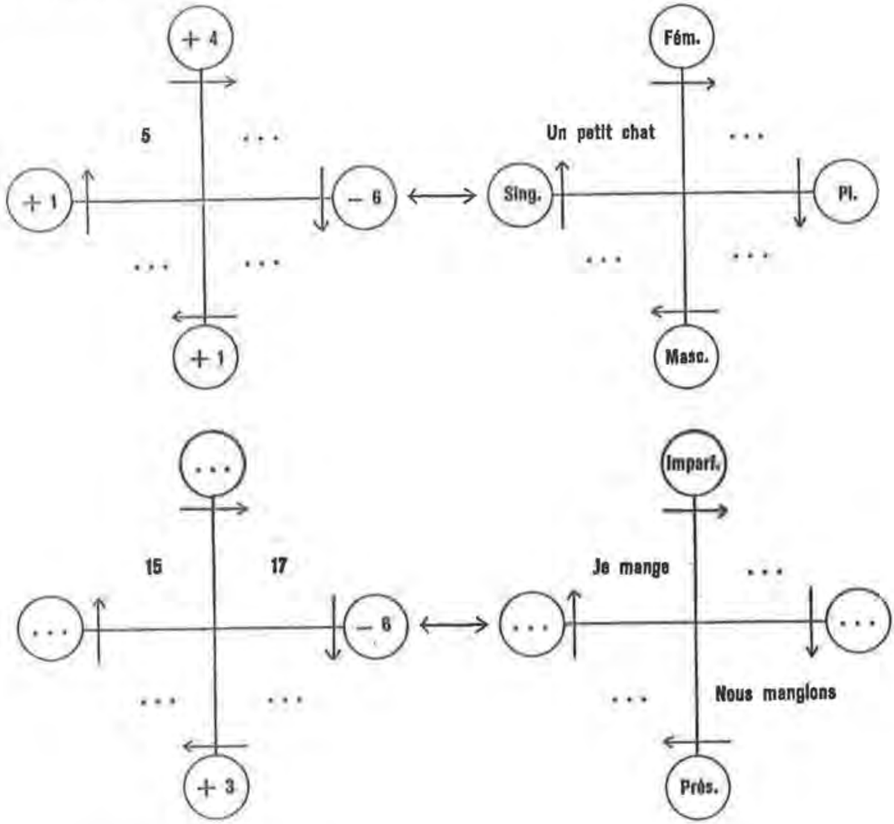


ou bien:




b) Les machines en croix

Référence:



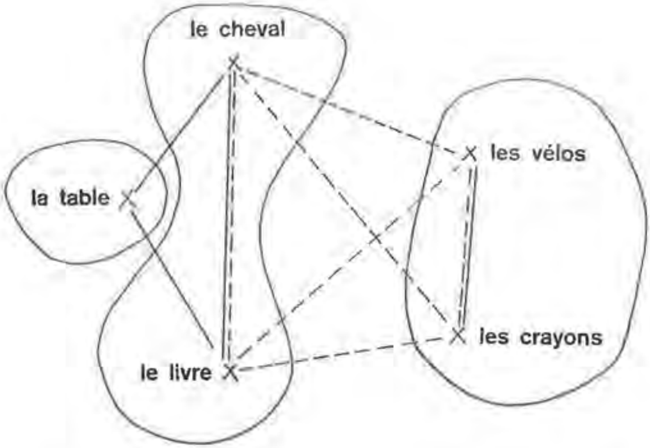

*5. Relations d'équivalence*

Des relations du type G «avoir même genre» et N «avoir même nombre» déterminent des classes d'équivalence. Représentons la relation «avoir même genre» par — — — — — — et la relation «avoir même nombre» par ————

a) Etablir les relations G et N dans l'ensemble des noms: {le cheval, la table, le livre, les crayons, les vélos}

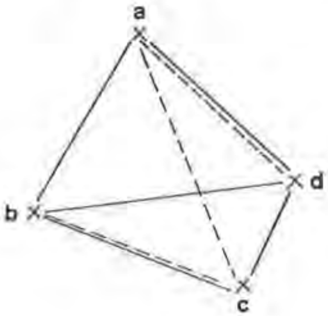
Remarque:

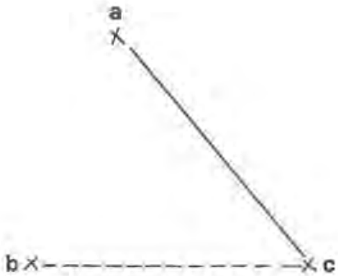
Sur le diagramme, on a renoncé aux boucles de réflexivité. En raison de la symétrie, deux arcs de sens opposé sont remplacés par un seul arc non orienté.




L'intersection G $\cap$ N est représentée par . Elle détermine les trois classes d'équivalence.

b) Exercice inverse. Les relations étant données, trouver un ensemble de noms satisfaisant à ces relations.




*6. Structures d'ordre partiel*

Application à l'ensemble des marques graphiques du système verbal (ici temps simples de l'indicatif).
Les «objets» sont constitués par l'ensemble des marques terminales qu'il est possible de relever dans n'importe quel tableau de conjugaison.

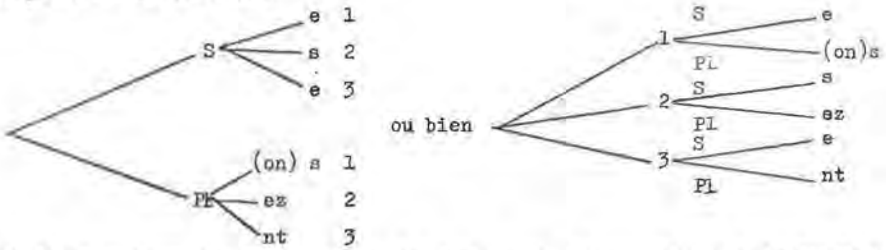
a) Distribution dans des tableaux composant le nombre et la personne (verbes du premier groupe, présent de l'indicatif).

| * | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| S | e | s | e |
| Pl | (on)s | ez | nt |

ou bien

| * | e | s | (on)s | ez | nt |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | | x | | |
| 2 | | x | | x | |
| 3 | x | | | | x |

Représentation en arbre




b) Composition des personnes et des temps selon le nombre (généralisation).

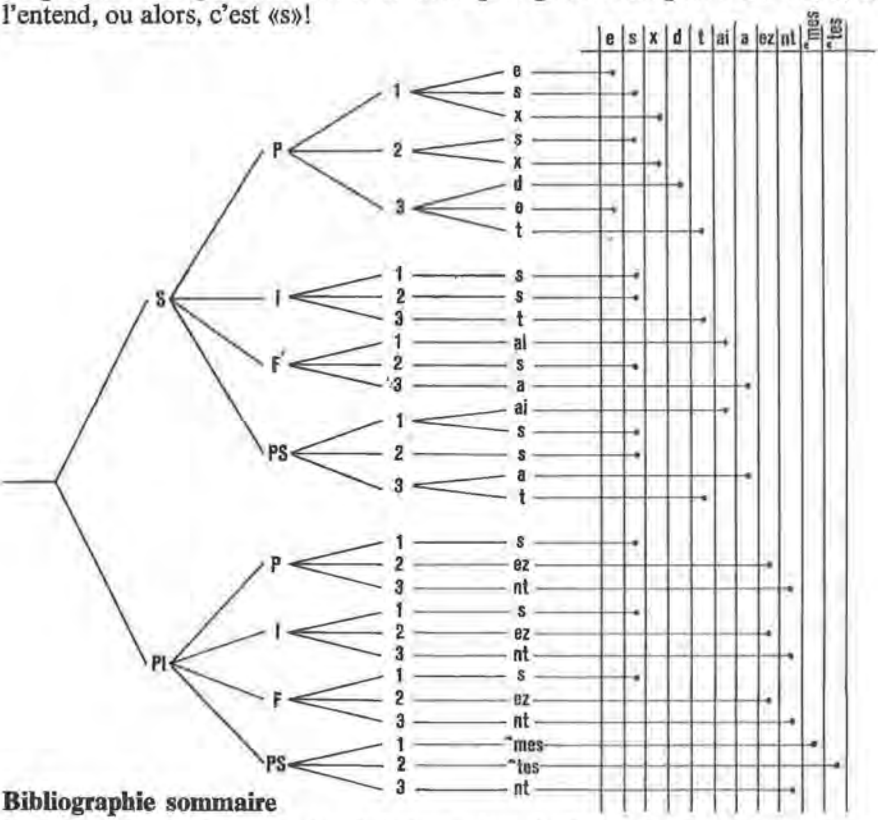
| * S | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | e, s, x | s, x | d, e, t, (c) |
| I | s | s | t |
| F | ai | s | a |
| PS | ai, s | a | a, t |

| * Pl | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | s | ez | nt |
| I | s | ez | nt |
| F | s | ez | nt |
| PS | (^me)s | (^te)s | nt |

c) Arbre de synthèse (voir figure p. 22).

Les symboles utilisés correspondent aux abréviations couramment proposées en classe: S = singulier; Pl = pluriel. Les temps sont abrégés en P (présent), I (imparfait), F (futur) et PS (passé simple). Quant à 1, 2, 3, ils représentent les personnes du verbe. La lecture de gauche à droite (à partir de l'origine) revient à énoncer les propriétés de nombre, de temps et de personne d'une forme. A ces propriétés correspondent une et parfois plusieurs marques terminales mais chacune détermine une classe d'équivalence, et ceci quel que soit le verbe considéré. Ainsi, la suite S-I-3 conduit à une terminaison «t» de la classe {(il) courait, chantait, buvait, ...}. La suite S-P-2 aboutit en revanche à une bifurcation ouvrant sur deux classes distinctes, l'une en «s»: {(tu) marches, viens, danses, ...} et l'autre en «x»: {(tu) veux, peux, vaux}.
Les colonnes donnent la fréquence de distribution de chaque marque terminale possible. On constatera, par exemple, que le graphisme «s» (non perceptible à l'oral et par conséquent sujet à omission) est distribué 10 fois, «e» ne l'est que deux fois, etc. *L'observation, par les élèves, de ces dispositions donne lieu à des commentaires qui tendent à la définition d'une stratégie d'apprentissage déterminée par la nature même de l'ensemble considéré, et non plus par un programme préétabli.* La mémorisation de suites paradigmatiques éminemment variables d'un temps à l'autre est remplacée par la recher-

che des lois générales qui sont alors énoncées de manière naïve. La remarque suivante (d'un élève de 10 ans) en fait foi, remarque que nous transcrirons à titre de conclusion: «Les verbes, à la première personne du singulier, au passé simple, ils n'ont que deux sorties et on ne peut pas se tromper: c'est «ai» et on l'entend, ou alors, c'est «s»!




## Bibliographie sommaire


[1] Arnault-Lancelot, *Grammaire générale et raisonnée*, Paulet, Paris, 1969.

[2] Franciscus Sanctius, *Minerva, seu de causis Linguae Latinae*, éd. Salamanque, 1587 Voir l'article de G. Clerico et G. Lahouati in Le Français, dans le Monde No 1, 1972.

[3] N. Chomsky, *Structures syntaxiques*, le Seuil, Paris, 1969. Pour une information générale et rapide voir l'ouvrage de J. Lyons: Chomsky, éd. Seghers, Paris, 1971 (181 p.).

[4] J. Wittwer, *Réflexions sur l'opposition langue-objet, langue-fonction*, in Bulletin de psychologie No 247, Paris, janvier 1966.

[5] G. Van Hout, *Une nouvelle pédagogie pour l'enseignement de la grammaire*, in Langue Française No 12, Paris, décembre 1971.

[6] O. Ducrot, *Langue et pensée formelle*, même référence que [5].

[7] J. Piaget, *Psychologie et épistémologie*, Gonthier-Denoël, Paris, 1970.

[8] Y. Gentilhomme, *«Les ensembles flous en linguistique»*, de même que *«De Saussure avait raison ou les mathématiques pourquoi?»* in Les Langues modernes, Faculté des lettres et sciences humaines, Besançon, 1971.

[9] N. Picard, *Mathématiques, Exercices CM 1*, OCDL, Paris 1970.

# La Fontaine et la fée électricité

par Gaston Guélat, maître d'application à l'Ecole normale, Porrentruy

*«La pensée ne naît ni littéraire, ni mathématique;*
*la pensée naît LOGIQUE, puis elle se diversifie.»*
*Berthold Beauverd* [*1*]

Trente et un ans d'enseignement. A part un semestre de remplacement dans une classe supérieure des Franches-Montagnes en 1942, j'aurai constamment œuvré avec des petits, d'abord dans une classe de tous les degrés (deux décennies), puis dans une classe d'application.
Bilan de ces années passées au service de la petite enfance? Il va de soi que les expériences acquises en compagnie de ces «bouts d'homme» figurent parmi les plus enrichissantes qui soient. Mais si l'on me posait la question: «Quelle est la tâche la plus importante dévolue au degré inférieur?», je serais quelque peu dans l'embarras. Primauté de la lecture, de la mathématique, de l'écriture, de l'éducation physique, musicale, artistique, etc.? Tout est important, n'est-ce pas, au degré inférieur? Par contre, si l'on me demandait: «Quand avez-vous eu le plus de fil à retordre?», alors, cher ami lecteur, je répondrais sans hésiter: «A la recherche du raisonnement!» Celle-ci fut, je n'ai pas honte de le dire, équivalente le plus souvent à celle du temps perdu, chère à Proust. Raisonnement en lecture expliquée, en grammaire, en calcul surtout. Ah! les problèmes en vue de l'admission à l'école secondaire. On connaît le mot de Piaget: «*... c'est une des difficultés des problèmes ordinaires de mathématiques chez les petits que de s'en tenir aux termes du problème au lieu de recourir aux souvenirs concrets de l'expérience individuelle. D'une façon générale, c'est une impossibilité pour l'enfant avant environ 10 ans, que de comprendre la nature hypothético-déductive et non pas empirique de la vérité mathématique...*» [2]. J'avoue avoir connu le découragement. Lorsque l'amiral Philippe de Gaulle déclare dans un Paris-Match de juin: «Le plus grand adversaire de mon père a été la bêtise», eh bien! qu'il se rassure, en la matière, il n'y a pas de monopole [3].
Combien j'ai été reconnaissant au CEPAM [4], puis à Dienes lui-même, de nous avoir fait connaître dès 1966 les fameux «blocs logiques»[1] et toute la gamme des exercices logiques publiés depuis. Du coup, la tâche fut exaltante. Nourriture de choix pour de jeunes pinsons, avides de constater, de discuter, de contester. Véritable «Calculus ratiocinator» que n'aurait pas renié Leibnitz.

[1] La première apparition des blocs logiques en Suisse date de décembre 1963. Dienes, à l'occasion d'un séjour de trois semaines qu'il fit alors à Genève, avait fait construire par un menuisier plusieurs jeux de ses blocs en vue de démonstrations qui eurent lieu à l'Ecole du Mail (N. d. l. r.).

Nos petits... «ratiocineurs» aiment au surplus à utiliser le symbolisme logique préconisé par Dienes, notation «imaginée par Lukasiewicz, grâce à laquelle on peut supprimer totalement les parenthèses» [5] et qui est devenue l'esperanto de nos mathématiciens en herbe. C'est tout simplement merveilleux.

On s'est d'ailleurs vite rendu compte que de tels «matériels à raisonner» irradiaient tout l'enseignement, vivifiaient en particulier la langue française toute de nuances et la mathématique non exempte de subtilités. Comment s'étonner, dès lors, que l'émulation aidant, des pédagogues aient voulu explorer encore d'autres voies de nature à solliciter la réflexion de l'enfant. Ce qui était, il n'y a pas longtemps, manipulations d'adultes, est devenu plaisir d'enfants. C'est ici que se situe l'apport original de l'Ecole de Poueyferré dont les expériences ont été abondamment détaillées dans «Recherche, création et matériel en mathématique» [6]. Nos petits chercheurs français se sont ingéniés à matérialiser un raisonnement logique avec du matériel électrique. La *preuve* par la *lumière!* Qui l'eût cru?

Cette idée m'a paru si séduisante que, devant donner en 1971, à Remiremont (Vosges), un cours axé uniquement sur la logique avec applications à l'école primaire, je décidai:

— de distribuer à chaque participant la brochure en question;
— d'ouvrir un atelier supplémentaire «Logique et circuits logiques».

Restait à dénicher l'oiseau rare qui animerait un tel atelier. En parcourant la liste des fidèles collègues français de mes sessions d'Avignon (1967, 1968, 1969), Bar-le-Duc (1968), Verdun (1969), La Bresse (1969, 1970), je me souvins qu'un collègue, de Remiremont justement, s'était distingué dans la confection de matériels divers. Alors, un mois avant le cours, nous eûmes à mon domicile un sabbat fertile en discussions, mais un accord partiel seulement fut réalisé. Mon ami Georges Charmoille voulut bien se charger de résoudre la question du matériel — ce qui était assurément le plus important — mais laissa à son collègue suisse le soin d'alimenter la machine à raisonnement, à tout le moins les premiers jours. Inutile d'ajouter que nous comptions tous deux sur la réaction des sessionnistes (110 participants).
Ce qui fut dit fut fait, et bien fait. Georges Charmoille construisit dans un minimum de temps un matériel simple, pratique, visible même du fond d'une grande salle. Le faire-part de naissance me donnait la description sommaire que voici:
«Ce nouveau-né peut se recroqueviller sur lui-même ou prendre la position «en extension» comme un chat étendu au soleil. Ses dimensions sont les suivantes:

— premier cas: $100 \times 30 \times 25$;
— deuxième cas: $257 \times 185 \times 10$.

De toute façon, son poids reste le même; inférieur à 10 kg. Sexe de l'enfant: indéterminé, indéterminable. Les Allemands utiliseraient sans doute le neutre!»

Le matériel fit merveille, on le baptisa «MATHLO» (MATHLOgique!), l'inventeur reçut la Grand-Croix de l'Ordre du même nom (gros médaillon en sagex du plus bel effet) et je ne fus pas peu ému, en fin de session, de recevoir «MATHLO II», un deuxième exemplaire fabriqué clandestinement par mon collègue de Remiremont. Qu'il soit ici, encore une fois, remercié et félicité!
Pour se faire la main, les participants mirent en «circuit électrique» le texte libre de l'école de Poueyferré, ce qui les émerveilla. Mais quand il fut question de composer fût-ce sur un thème politique — l'actualité française n'en manquait point! — j'essuyai un refus catégorique. Motif: chaleurs de juillet sont ennemies de toute créativité! Je pris alors le contre-pied de l'expérience relatée par l'ICEM de Cannes et me rabattis sur les Fables de La Fontaine en donnant comme consigne de faire courir «La Cigale et la Fourmi» sur les fils de MATHLO.
On eût pu penser que La Fontaine passerait difficilement le test Ampère, lui qui vivait au siècle de la bougie. Il prouva, une fois de plus, qu'il était plus actuel que jamais!
Dieu quelle ambiance! Une couleur de fil pour Fourmi l'avare, une autre pour Cigale la gitane, des ardoises pour les questions de la machine, une série de plaquettes pour les options oui ou non, le tout manipulé dans d'interminables discussions interrompues seulement par le cliquetis des pinces crocodiles assurant les jonctions nécessaires. Source de courant: une simple pile de lampe de poche. Finalement, la lampe s'allume. Eurêka! D'autres fois, elle brille contre toute attente. Il faut trouver la bulle. Enfin, les schémas de montage sont dessinés et multicopiés à l'intention des participants.

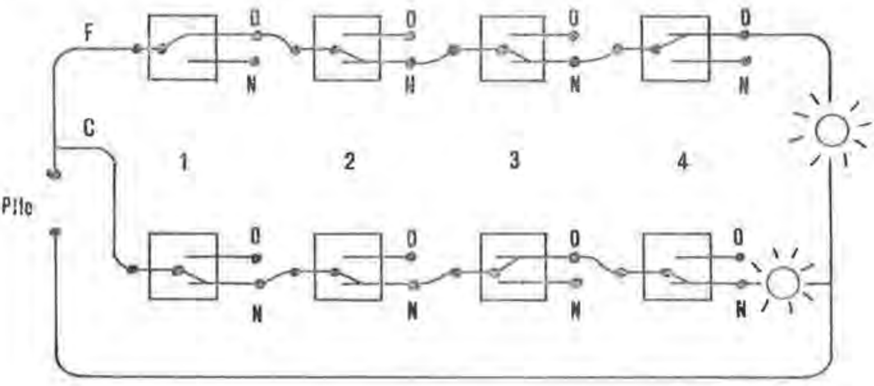
Il s'agit, somme toute, à partir d'un texte — donc, ici, d'une situation verbale — de faire surgir des questions, d'imaginer les réponses possibles — formulées par *oui* ou par *non* — et de voir ce que donne l'enchaînement de ces questions. Ainsi, pour la fable de la *Cigale et de la Fourmi*, on peut voir apparaître les questions suivantes:

1. A-t-elle fait des provisions?
2. Prête-t-elle?
3. Veut-elle emprunter?
4. A-t-elle de quoi manger?

Cela donne, pour la Fourmi et pour la Cigale, l'enchaînement suivant:

| | | F | C |
|---|---|---|---|
| Quest. | 1 | oui | non |
| Quest. | 2 | non | non |
| Quest. | 3 | non | oui |
| Quest. | 4 | oui | non |

Cet enchaînement peut se concrétiser sous forme de circuit électrique:




Il est bien entendu que les questions posées peuvent être plus nombreuses, plus diversifiées, plus subtiles. Il faudra cependant, chaque fois les enchaîner les unes aux autres d'une manière logique et cohérente.
Cela donnera lieu à des discussions véhémentes, à des essais multiples, bref à des expériences logico-verbales enrichissantes.

*Retombées?*

D'abord, j'ai retrouvé cette chaude atmosphère des séances d'activités mathématiques, si propice à la réflexion et admirablement décrite par Dienes: «*Un élément important de l'apprentissage, c'est la discussion entre les enfants... Les règles du jeu sont assez simples pour que finalement la vérité jaillisse toute seule de la discussion. C'est là un excellent entraînement, car il est infiniment préférable d'encourager les enfants à faire appel à la vérité, plutôt qu'à l'autorité de quelque personne chargée de la dispenser, le maître par exemple.*» [7].
D'autre part, il m'a semblé que la lecture expliquée prenait une autre dimension. L'élocution est plus riche, les mots me paraissent mieux compris et la fable mieux intériorisée que les années passées. Sans nul doute, par ces manipulations diverses, la richesse de la fable apparaît au grand jour. Du français actif, quoi! De plus, quand les élèves récitent, ils m'ont tout l'air de se référer à la machine. C'est vraiment amusant.
La physique y trouve aussi son compte. Dame Electricité a fait une entrée remarquée dans la classe, où elle a recueilli tous les suffrages: «Il faut qu'elle reste avec nous, M'sieur!»
Et le raisonnement, me direz-vous? Vous m'avez compris, j'ai été comblé, je n'en dirai pas plus.

Blocs logiques! Exercices logiques! Circuits logiques! Comme l'indique la brochure ICEM précitée, *«combien variées sont les voies d'accès et les cheminements dans l'univers logico-physico-mathématique des enfants»*. Vous qui souffrez, mes chers collègues, de voir le raisonnement de vos élèves atteint d'anémie persistante, «vivez, si m'en croyez», la *Logique tous azimuts*. Ce sera *l'heure enchantée* pour vos petits.

Et quand bien même ils vous payeraient, en retour, d'humour impitoyable... Témoin la petite histoire suivante, authentique, qui remonte à quelques années, et que je dédie à mes amis André Calame et Charles Muller, en souvenir de la troïka du 54e numéro de Math-Ecole.

Je dois donner une leçon de grammaire sur le pluriel des noms en *eu*. Les Normaliens sont au grand complet, réunis autour des élèves et guettant la faille. Moi, je suis sûr de mon affaire! N'ai-je point le livre officiel comme allié? Après avoir fait trouver, écrire et accorder pas mal de noms de l'espèce en question, il me reste à parler de la seule exception prévue par l'appendice grammatical de mon livre de lecture. J'enchaîne alors, péremptoirement: «Eh bien! les enfants, ce que vous avez trouvé est juste. Tous les noms en *eu* prennent *x* au pluriel. Il y en a cependant un qui n'est pas d'accord avec les autres, c'est le mot *pneu*, qui s'habille avec un *s* au pluriel.»

A cet instant, Jean-Pierre Bonvallat, 3e année, lève la main:

— M'sieur, il y a les pneus X!

[1] Berthold Beauverd, *«Avant le calcul»*, Delachaux & Niestlé, Neuchâtel.

[2] Jean Piaget, *«Psychologie et pédagogie»*, Denoël, Paris.

[3] Ibidem, *«on peut d'ailleurs s'étonner de ce que la pédagogie classique impose sur ce point aux écoliers une manière de raisonner que les Grecs ont conquise de haute lutte après des siècles d'arithmétique et de géométrie empiriques.»*

[4] Centre d'études du processus d'apprentissage en mathématique, Paris 5e.

[5] Nicolas Bourbaki, *«Eléments de mathématique-Structure»*, Hermann, Paris.

[6] *«Les dossiers pédagogiques»*, supplément à l'Educateur No 10 du 1er février 1971, ICEM, Cannes.

[7] Dienes, Golding, *«Les premiers pas en mathématiques - Logique et jeux logiques»*, OCDL, Paris.

# Réunion du groupe international d'étude pour l'apprentissage des mathématiques à Budapest, du 1er au 9 avril 1972

par Dr Jürg Schubiger, Winterthour, traduction par Ingrid Combes, Neuchâtel

Ce groupe international se compose essentiellement de mathématiciens et de pédagogues européens qui tentent d'associer au sein de leurs programmes de recherche, à la fois les buts et les exigences des mathématiques, et la psychologie du comportement et du développement. Z. P. Dienes en est le président; son origine hongroise, et le fait qu'il possède encore à Budapest famille et amis, lui permettent d'établir de réels dialogues par dessus les frontières idéologiques. Une réunion, groupant tous les membres, a lieu chaque année dans une ville européenne. Zurich, en 1973, recevra la prochaine rencontre. L'intérêt porté par la Suisse à l'enseignement de la mathématique a sûrement été déterminant dans ce choix, ce pays n'avait-il pas envoyé deux rapporteurs et plusieurs instituteurs et institutrices d'Outre-Sarine?

Il paraît difficile de présenter d'une façon cohérente les impressions personnelles que l'on peut retirer d'une telle réunion. Celle-ci, en effet, voulait, d'une part, permettre aux chercheurs de discuter, et, d'autre part, transmettre aux enseignants primaires qui étaient invités des suggestions pour leur enseignement. Il va de soi que les rapports ne purent que rarement satisfaire en même temps les deux parties. En outre, des tiraillements peu sensibles provenaient de l'opposition entre les formes modernes de la transmission des connaissances et le cadre dans lequel elles s'exerçaient, cadre que caractérisaient l'ambiance de la capitale hongroise et les pièces sombres du gymnase, qui semblait lui-même, tout entier, sorti de l'époque impériale.

Les rapporteurs renoncèrent presque entièrement à la présentation traditionnelle de rapports pour consacrer à la discussion les résultats de leurs propres recherches illustrées dans le travail pratique organisé avec les enfants. Des projections vinrent aussi illustrer le comportement de ceux-ci. Une retransmission télévisée, qui avait lieu dans une pièce en partie obscurcie, ne donna que des vues fragmentaires, quelques images et des lambeaux de discussion, dont le sens ne pouvait être que superficiellement rendu par le traducteur. Celui à qui échappaient les bases mathématiques des différentes leçons et leur déroulement de même que leurs buts partiels, eut cependant le rare privilège de pouvoir, une fois n'est pas coutume, s'arrêter aux apparences. Il pouvait se laisser prendre par la participation très vivante des enfants, par la spontanéité de leur expression, par leur comportement et par les intonations de leur langue. Il pouvait admirer le mélange inhabituel de fermeté et d'intuition dans le comportement de l'institutrice hongroise, sa manière finement autoritaire de guider les enfants, qui ne procédait pas d'une idéologie politique ou de la connaissance des lois de la dynamique de groupe, mais de l'affection portée aux enfants.

Au pédagogue formé mathématiquement, la réunion offrit de nombreuses suggestions; de nouveaux thèmes débouchèrent sur des applications didactiques et d'anciens thèmes apparurent sous forme de jeux employés avec les jeunes élèves. Un survol, bref et incomplet, du programme de la réunion donnera une idée de la multitude des nouveaux efforts.

Le Français J. Colomb montra comment le théorème du polyèdre d'Euler peut être présenté inductivement à des élèves de 3e année. Dans une leçon, les enfants sont amenés à la démonstration, sous forme de tableaux synoptiques, des rapports existant entre le nombre d'angles de base, les surfaces, l'ensemble des angles et les arêtes. Pour la désignation des aspects caractéristiques des corps géométriques, Colomb a introduit des symboles correspondants qui pourront être employés pour l'évaluation algébrique.

La leçon donnée par Dienes, du Canada, fut représentative de ses nouveaux efforts: il essaie de plus en plus d'atteindre mathématiquement des domaines extra-mathématiques (phénomènes linguistiques, musicaux et artistiques lui permettant d'y découvrir des structures simples). Les exercices montrés à Budapest étaient intitulés «Gymnastique mathématique». Au cours de ceux-ci, Dienes montre aux enfants différentes positions du corps et des bras entre lesquelles on constate un rapport logique; la représentation des possibilités d'enchaînement de ces diverses positions fait apparaître le schéma d'un groupe mathématique.

E. Fischbein, de la RDA, fit faire aux enfants des expériences avec des cartes, portant des points en nombre différent; il les évalue dans une perspective propre à la combinatoire et aux probabilités.

Il s'agissait également de probabilité dans les travaux des Suisses W. Walser et H. Tremp, son assistante, qui ont collaboré avec le Hongrois T. Varga. Ils ont particulièrement bien réussi la transposition d'une conception théorique en jeu, pour des enfants du primaire.

Dans un de ces jeux, les enfants devaient choisir une pancarte portant un numéro entre 1 à 15 et la suspendre à leur cou; puis, l'un après l'autre ils jetaient 2 dés normaux. Si la somme des 2 dés correspondait au numéro choisi par un des enfants, celui-ci avançait d'un pas. Le gagnant était celui qui, lorsque les dés avaient fait un certain nombre de tours, avait avancé du maximum de pas.

Dès la première phase du jeu, les enfants se rendent compte que les chiffres 6, 7 et 8 reviennent le plus souvent; les pancartes choisies durant la seconde phase, le sont en tenant compte de cette constatation. Ils acquièrent ainsi une expérience qui, dans une classe supérieure, pourra les conduire à la théorie de la probabilité.

Une tabelle où seraient inscrites les sommes possibles, travail parfaitement réalisable dans une classe du degré moyen, se présenterait de cette façon:

| | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ⚁ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ⚂ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ⚃ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ⚄ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ⚅ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Ce schéma montre que la somme 7 apparaît le plus souvent, puis que viennent les sommes 6 et 8, etc.

Dans le même ordre d'idées, une autre représentation est l'histoire, bien connue des mathématiciens, du voleur de Bagdad. Elle montre que des enfants, même plus âgés, éprouvent des difficultés à donner forme à une situation particulièrement importante, lorsque l'affectivité s'en mêle. Le jeu a pour thème la capture et les chances de survie (en termes mathématiques: les probabilités de survie). Les enfants s'identifient ici au voleur capturé et cherchent des possibilités de fuite qui, tout en étant logiques et dans la ligne des choses, sont contraires à la règle du jeu.

A. Abele, de la RFA, présenta un programme d'enseignement parfaitement élaboré, comprenant également des fiches de travail pour les élèves de deuxième année. Son point de départ est un petit conte qui donne lieu à des exercices à la fois de lecture et d'écriture. Mais le but principal est l'introduction de la notion de quantité sous ses divers aspects.

Des thèmes voisins ont été préparés par P. Sorger, pour l'enseignement préscolaire, à partir de recherches approfondies. Avec son assistante, il montra et testa des projets de jeux originaux qui conjuguaient des aspects de la notion de quantité (appartenance) et des données topologiques (intérieur/extérieur, etc.).

Madame A. S. Krygrowska, de Pologne, a fait travailler un problème de logique avec de jeunes enfants: 3 élèves de 1re année (A, B, C) et 3 de 2e année (a, b, c) peuvent passer leurs vacances dans un camp; un des camps est au bord de la mer, un autre au bord d'un lac et un troisième en montagne; dans chacun de ces camps, il ne reste plus que 2 places; le directeur de l'école, en distribuant les places, voudrait tenir compte des souhaits des enfants: A voudrait la mer, b ne voudrait pas la montagne, B et c voudrait passer leurs vacances ensemble. Nous aidons le directeur à résoudre le problème, de telle sorte que soient satisfaits, aussi bien les chefs des camps que les enfants.

Particulièrement intéressante fut la leçon préparée en commun par M. B. Werner, responsable de recherche et directeur de la formation des maîtres au Danemark et son conseiller en psychologie. Il initie à la théorie des graphes des enfants de 11 ans. Les points communs sont symbolisés par des diagrammes fléchés: les divers diagrammes sont ordonnés et examinés selon leur logique. De cette logique peuvent être tirées des conclusions concernant la structure de diagrammes d'un ordre supérieur.
Cette brève description de la réunion de Budapest rend compte de la spontanéité et de la richesse des idées qui furent échangées; elle ne dit rien de la vie en Hongrie. Ce serait une autre histoire...

N. d. l. r.: Comment la Suisse se prépare-t-elle à la prochaine réunion de Zurich?

Nouveautés

- **Bulletin de l'ACB**
  (Association Cuiseniare Belgique), No 2.

— Initiation mathématique en 7e gardienne.
— Les multiples de 5 et de 10.
— Relation périmètre suface.
— Introduction à la notion de groupe en 7e année primaire par Louis Jeronnez et Isabelle Lejeune.

Adresse: D. de Groef, 40, rue des Chartreux, Bruxelles.

- **L'algèbre par les nombres positifs: 1**
  Cours programmé, par Paul Mayenzet. Editions Delta SA, La Tour-de-Peilz; Plantyn SA, Annecy-Anvers. 1972. Collection GRETI-ICO.

Il s'agit là d'une nouveauté à plus d'un titre. Tout d'abord, cet ouvrage, en 3 volumes, est un cours programmé, et de tels cours sont encore peu nombreux chez nous. Secondement, ce cours a été élaboré pour répondre à un besoin très précis: permettre aux apprentis mécaniciens de transformer des formules pour en extraire l'inconnue. Troisièmement, ce cours est le produit d'une collaboration qui a uni, dans un même et patient effort, des responsables en matière de pédagogie de l'OFIAMT (Office fédéral pour l'industrie, les arts et métiers et le travail), des mathématiciens (Marcel Arnoux et Guy Biberstein), des psychologues eux-mêmes spécialistes de l'enseignement programmé (Jean Cardinet et André Gonthier), un enseignant enfin, pédagogue qualifié et mathématicien (Paul Mayenzet). Il a faalu près de cinq années pour aboutir. Mais, maintenant, le résultat est là, dûment validé: les jeunes apprentis de la mécanique peuvent, avec ce cours et, bien sûr, avec l'aide attentive et individualisée de leurs maîtres, parvenir à maîtriser les notions d'algèbre dont ils ont besoin pour apprendre convenablement leur métier. Ce cours est un prototype. Souhaitons qu'il fasse école. Il faut enfin savoir gré au GRETI d'avoir patronné l'ouvrage et à son actuel président, Jean Cardinet, d'avoir, sans trêve ni repos, coordonné les travaux. S. R.

* Les 2 premiers volumes sont parus.

Pour prendre date:

**7e Congrès international de Zwin**

organisé par le Centre belge de pédagogie de la mathématique; 3-6 mars 1973 à Knokke (Belgique).

*Thèmes:*
1. Enseignement primaire, psychologie, enseignement spécial.
2. Logique et mathématique.
3. Tables rondes en diverses langues.
4. Ateliers de travail programmé (texte de Papy sur la logique).

Prix de faveur pour les premiers inscrits: 600 FB.
Adresse du Centre: 1180 Bruxelles, 224, avenue Albert.

**Le dessin de la couverture**

Il s'agit d'un réseau représentant les ponts de Koenigsberg qui avaient, au XVIIIe siècle, suggéré le problème suivant: peut-on ou ne peut-on pas faire un tour dans la ville de Koenigsberg qui permette de passer une fois exactement sur chaque pont? Le problème, étudié par le mathématicien bâlois Euler, n'a pas de solution. En revanche, il a une quand on se demande si on peut passer deux fois exactement sur chaque pont. Cette situation est illustrée par le diagramme de la couverture. Il s'agit d'un problème de topologie. Le thème a été traité dans Math-Ecole, No 44, septembre 1970, par Charles Burdet.

**Errata**

No 53, page 3, 4e ligne, lire «en 1872» au lieu de «en 1910».

Page 6, 15e ligne, lire «Dans Z, à part les nombres +1 et —1, ...», au lieu de «à part le nombre 1».

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

Mademoiselle
Madeleine DRAUTIGAM
Ecole Normale
1000 Lau[illegible]

**Rappel: Ceux de nos lecteurs qui n'ont pas encore payé leur abonnement Math-Ecole 1972 voudront bien s'acquitter de leur dette en faisant usage du bulletin de versement ci-annexé. Merci.**



**Abonnements:**

Suisse F 7.—, Etranger F 8.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43 fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).