

LA LIGNE DROITE, UN OBJET D'ETUDE AU DEBUT DU SECONDAIRE : UNE ANALYSE INSTITUTIONNELLE DES MANUELS

Judith Njomgang Ngansop et Patrick Tchoung Youkap

Département des didactiques des disciplines, Université de Yaoundé

INTRODUCTION

Les manuels scolaires constituent un artefact important pour l'apprentissage des objets géométriques au secondaire. L'étude des manuels scolaires offre un aperçu sur les choix institutionnels au sujet des objets géométriques et des modèles utilisés pour représenter ces objets. Toutefois, les modèles graphiques qui représentent les figures ne décrivent pas toujours tous les attributs de ces figures.

La recherche en didactique des mathématiques rapporte que les élèves, dans un problème de géométrie auquel le dessin est associé, ont tendance à se focaliser sur ce qu'ils voient et non sur ce qu'ils savent ; il y a là une utilisation superficielle du dessin (Walter, 2001). Les concepts-images des élèves au sujet de certains objets géométriques ne correspondent pas toujours à la définition formelle de ces objets (Tall & Vinner, 1981).

On sait que les définitions doivent faire l'objet d'une construction en salle de classe (de Villiers, 1998). On sait également que les objets géométriques passent au secondaire du statut du dessin (objet physique) au statut de figure (objet géométrique) (Robert, 2003). On ne sait pas suffisamment comment les objets géométriques sont introduits dans les manuels au début du secondaire. Notre objectif ici est de rendre compte de la façon dont les éléments de la théorie (définitions et théorèmes) sur les droites sont introduits dans les manuels. Il vise également à mettre en lumière les types de modèles (représentant un objet physique ou un objet géométrique) utilisés dans les activités qui permettent de construire les objets étudiés dans ces manuels.

QUELQUES ASPECTS ÉPISTÉMOLOGIQUES DE LA LIGNE DROITE

Selon Laborde (1994), un domaine de réalité est un ensemble de choses qui permettent de résoudre un problème que rencontre un individu au quotidien. Un modèle offre une certaine lecture, une certaine interprétation du domaine de réalité. Certains modèles sont explicites et s'expriment dans divers supports d'expressions : dessins, images, schémas, langage naturel ou artificiel. On appelle souvent modèle le résultat-même de cette expression (Laborde, 1994). Dans le cadre de ce travail, le modèle désignera un dessin ou une image. La ligne droite est un élément du domaine de réalité de la géométrie plane qui est étudié au début du secondaire. Il s'agit d'une figure, d'un objet abstrait sur lequel repose le raisonnement au collège. Le dessin est la représentation de la figure sur un support qui symbolise le plan (écran d'ordinateur, feuille de papier) (Laborde, 1994). Le dessin de la droite est partiel, il ne permet pas de visualiser l'attribut illimité de la droite. Ce dessin décrit mieux l'idée qu'avait Legendre (1799) de la droite. En effet, les mathématiciens qui ont précédé Legendre ainsi que ceux de son époque ne faisaient pas de différence entre une droite et un segment. De nos jours, la droite se distingue d'un segment, elle est illimitée de part et d'autre, tandis que le segment a des extrémités et peut entièrement être représenté sur un support.

Le dessin de la ligne droite peut également être utilisé pour représenter un objet physique (par exemple, une trajectoire rectiligne). La trajectoire est supposée connue des élèves au début du secondaire comme étant le chemin parcouru par un objet. Le chemin le plus court entre deux points est celui qui suit une

ligne droite. La trajectoire est un terme défini dans les leçons de physique en classe de sixième. Nous pensons que la physique apporte un regard plus concret sur l'idée que l'on a de la droite.

La définition de la droite qui semble pertinente en géométrie naturelle est celle qui s'inspire à la fois de la géométrie euclidienne et de la physique. Un exemple de définition qui peut être reconstruit en salle de classe est la définition suivante : « *une droite est une ligne illimitée qui contient le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.* » Cette définition satisferait les critères d'une bonne définition à savoir : non contradictoire, non ambiguë, indépendante des représentations, minimale et non circulaire (Shir & Zaslavsky, 2002).

Dans cette étude, une activité de (re)construction de la définition en mathématiques correspond à celle décrite par de Villiers (1998). Il s'agit d'une activité qui engage l'élève dans le processus mathématique par lequel la définition est découverte, inventée et organisée.

Nous faisons l'hypothèse que les manuels proposent comme activités de découverte, des activités de construction des définitions des objets géométriques. Celles-ci s'appuient sur la perception visuelle et l'expérience qui sont des modes de pensée de la géométrie naturelle. De ce fait, ces activités de (re)construction de la définition pourraient être inspirées de la physique.

CADRE THÉORIQUE

Nos analyses des manuels scolaires sur l'introduction du concept de droite suivent une approche institutionnelle. Nous décrivons les choix institutionnels et leurs répercussions sur l'apprentissage des élèves. Le rapport institutionnel à un objet est défini par Chevallard comme l'ensemble des interactions possibles entre l'institution I et l'objet O (Chevallard, 1994). Il devrait y avoir une certaine conformité entre le rapport personnel des élèves à l'objet O et le rapport institutionnel. Dans le cadre de la TAD, Castela (2008) définit la notion de tâche prescrite à l'élève comme un couple constitué de l'énoncé et du contexte institutionnel de prescription : l'énoncé est une mise en texte du problème mathématique qui ajoute éventuellement des indications ou des questions qui prennent en charge partiellement ou complètement les étapes de la technique attendue pour sa résolution. Le contexte institutionnel précise les éléments du contexte dans lequel la tâche est prescrite. De ce fait, le choix d'une technique et sa mise en œuvre par l'élève dépendront des éléments de ce contexte (Castela, 2008 ; Chaachoua, 2010).

MÉTHODOLOGIE

Pour cette étude exploratoire de type qualitatif, les données proviennent de quatre manuels¹ de mathématiques recommandés par le Ministère des Enseignements secondaires au Cameroun. Il s'agit des manuels de la classe de sixième (âge des élèves 10-11 ans) qui sont accessibles sur l'étendue du territoire du Cameroun. Les chapitres des manuels sont organisés en deux rubriques : une première rubrique où l'on retrouve les différentes sections avec des thèmes précis et une seconde rubrique constituée des exercices d'entraînement. Une section du chapitre peut être une leçon ou un ensemble de leçons. Les sections sont, pour la plupart, organisées en blocs : un bloc destiné aux « Activités de découverte » ; un bloc destiné aux « Énoncés institutionnalisés » et aux illustrations (définition, théorème, méthode, règles) et enfin un bloc destiné aux « Exercices d'application ».

¹ Mvomo et al. (2016). *Majors en Mathématiques 6e (B)*. ASVA Education.

Elandi et al. (2016). *Excellence en Mathématiques 6e*. ACIPEC (2016).

Touré et al. (2016). *CLAM Mathématiques 6e (B)*. EDICEF.

Une équipe d'enseignants (2016). *Cargo collection de Mathématiques 6e*. Hachette International.

Les documents qui font partie de notre échantillon ont tous des chapitres qui portent sur les droites du plan. Les apprenants sont susceptibles d'y avoir accès directement en salle de classe ou en dehors de la salle de classe.

La collecte des données a fait intervenir une grille d'analyse des manuels. Nous nous intéressons dans ces manuels aux leçons des chapitres intitulés « Droites du plan ». Nous appuyons cette étude sur une grille comprenant trois sous-parties :

- Les activités proposées dans les blocs « Activités de découverte ». Il s'agit de déterminer les types d'activités proposés dans les manuels pour découvrir les droites ainsi que les éléments d'interdisciplinarité mobilisés ;
- Les modèles associés aux activités dans les blocs « Activités de découverte » : Il sera question ici de déterminer les types de dessins que proposent les auteurs des manuels et les fonctions des dessins et images dans les problèmes (Elia & Philippou, 2004) ;
- Les énoncés institutionnalisés dans les blocs « Institutionnalisation » des différents manuels. Il s'agit de décrire les énoncés, plus précisément les énoncés des définitions et vérifier leur adéquation avec les définitions acceptées en géométrie au collège.

Pour analyser les modèles utilisés dans les activités des leçons, nous nous sommes inspirés de la catégorie de Elia et Philipou (2004) qui distingue quatre fonctions pour des images dans la résolution d'un problème.

Décorative	Représentative	Organisatrice	Informative
Le modèle ne donne aucune information réelle sur la solution de problème	Le modèle représente le tout ou une partie du contenu de l'énoncé du problème	Le modèle offre des indices pour le travail écrit de l'étudiant, favorisant le processus de résolution	Le modèle donne une information essentielle pour la résolution du problème ; la résolution du problème est basée sur le modèle

Fig. 1 : Catégorie des fonctions des modèles qui illustrent un texte dans un problème de géométrie

RÉSULTATS

Dans les lignes qui suivent, nous rapportons les résultats issus de l'analyse des données en relation avec les sous-parties que nous avons définies dans la méthodologie.

Les problèmes présents dans les blocs « Activités de découverte »

L'objectif de cette partie est d'identifier le type de problèmes proposés par les auteurs des manuels pour découvrir les objets géométriques et les relations entre ces objets.

Dans les manuels de notre corpus, nous n'avons identifié aucune activité proposée dans l'intention de reconstruire la définition d'un objet géométrique. Les activités qui y sont proposées ont l'intention de faire découvrir des énoncés sur la droite par exemple l'alignement de trois points. Les tâches de ces activités ne sont pas neutres vis-à-vis des techniques attendues, car l'on y observe des indications qui conduisent aux résultats des tâches mathématiques au sens de Chaachoua (2010). Ces indications sont données sous forme de tâches intermédiaires qui prennent en charge complètement ou partiellement les étapes de la technique attendue. Les indications sont également données sous forme de couleurs ajoutées à des éléments d'un dessin pour mettre en avant certaines configurations plutôt que d'autres. Ces couleurs augmentent ainsi l'appréhension perceptible du dessin (Duval, 1988). Dans certains cas, on retrouve des activités constituées d'une tâche et du dessin qui représente le résultat de la tâche. L'exemple qui suit est proposé dans trois des quatre manuels.

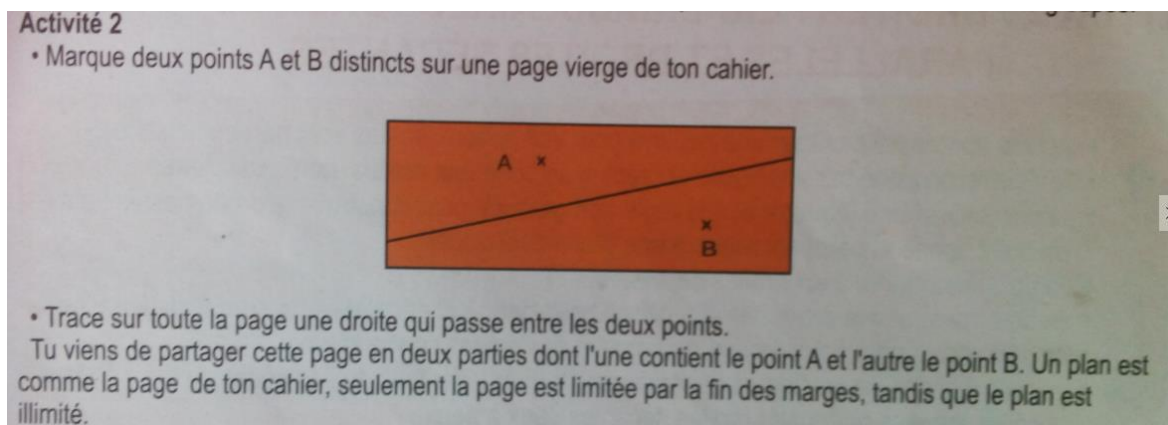


Fig. 2 : Activité du manuel Excellence, page 31

Pour exécuter cette tâche, l'élève pourra tout simplement reproduire le dessin associé à l'énoncé. L'on pourrait penser que les auteurs des manuels veulent assurer la réussite des tâches proposées dans la mesure où une aide est fournie aux élèves, l'aide étant le dessin associé au texte dans cette activité.

Parmi les manuels étudiés, seul un propose des activités s'inspirant des objets physiques pour favoriser la construction par l'élève des éléments de la théorie sur la ligne droite. Il s'agit du manuel Cargo, ce manuel propose trois activités faisant intervenir des objets tels que la corde et la route. Ce sont des objets du domaine de la physique qui apportent un regard concret sur les objets géométriques étudiés.

Le fait de proposer uniquement des activités avec des indications sur la technique attendue pourrait transformer les élèves en des automates, n'ayant à exécuter que des tâches élémentaires dont ils ne saisissent pas le sens. Ce type d'activité ne favorise pas chez l'élève le développement de l'esprit d'initiative, l'inventivité ou la maîtrise de la complexité. Nous pouvons également relever le fait que les activités proposées s'inspirent très peu de la physique. L'absence des activités de construction des définitions dans les manuels au sens de de Villiers (1998) laisse supposer que les auteurs des manuels sont dans une approche axiomatique des définitions. Cela pourrait avoir des conséquences sur les conceptions des élèves au sujet de l'objet défini (Freudenthal, 2012).

Les modèles graphiques présents dans les blocs « activités de découverte »

L'exploration des modèles graphiques associés aux activités dans les blocs « Activités de découverte » a permis d'identifier les différentes fonctions des dessins ainsi que leur type. Parmi les dessins qui illustrent les textes dans les activités, 72,41% ont une fonction organisatrice ; 10,34% des dessins ont une fonction représentative et 13,79% des dessins ont une fonction informative. Les dessins identifiés sont pour la plupart (86%) des dessins qui représentent les objets géométriques. Seul le manuel Cargo propose des modèles représentant des objets physiques.

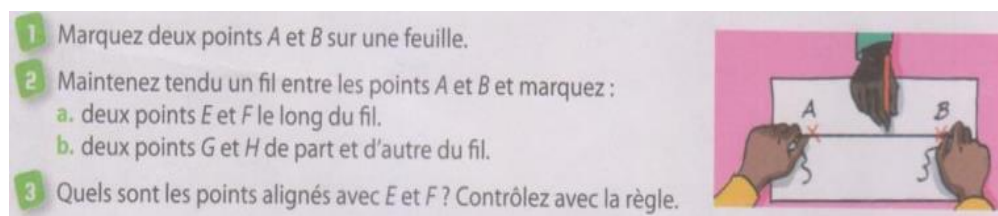


Fig. 3 : Dessin qui représente un objet matériel

La présence des dessins ayant une fonction organisatrice dans les activités apporte une aide dans la résolution des tâches, dans la mesure où ces dessins augmentent l'appréhension perceptible du dessin. Une tentative d'explication à cette approche pourrait provenir du fait que, pour les auteurs des manuels, la tâche doit être correctement exécutée. Cette approche ne permet pas toujours de donner du sens à l'objet étudié par les élèves. La faible utilisation des dessins qui représentent des objets physiques ne permet pas aux élèves de se forger des représentations plus riches de la droite. A notre avis, l'utilisation

de tels dessins permettrait aux élèves qui évoluent dans le paradigme de la géométrie naturelle d'avoir un regard beaucoup plus concret sur l'objet géométrique étudié.

Les énoncés institutionnalisés

Les énoncés institutionnalisés dans les blocs d'institutionnalisation sont des définitions, des propriétés (théorèmes, axiomes), des règles et des méthodes.

Nous constatons que les manuels des collections CIAM, Majors, et Excellence ne donnent pas une définition à la droite. Les énoncés de définitions dans les manuels ne sont pas précédés des activités de reconstruction de la définition. Ils sont présentés de façon axiomatique. Voici quelques définitions, qui ne respectent pas les critères d'une bonne définition, tirées du manuel de la collection Cargo.

D1 : « une droite est une ligne formée de points sans épaisseur et illimitée des deux côtés »

D2 : « deux droites perpendiculaires sont deux droites sécantes qui forment quatre angles droits »

D3 : « deux droites parallèles sont deux droites qui ne sont pas sécantes »

La définition D1 est une définition ambiguë, car l'expression « ligne sans épaisseur » n'a pas été préalablement définie dans le manuel. A supposer que les élèves aient conscience de la notion de ligne sans épaisseur, cela ne suffit pas à distinguer une ligne droite parmi les lignes illimitées du plan (par exemple, une parabole). Nous pensons que pour une définition acceptable il aurait fallu signifier qu'en plus d'être illimitée, elle contient le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.

La définition D2 n'est pas minimale. En effet, il suffit que deux droites se coupent en formant un angle droit pour conclure à leur perpendicularité. La définition D3 bien qu'elle soit une définition formelle peut induire des obstacles épistémologiques en géométrie naturelle. En effet, le dessin de deux droites bien que non sécantes sur un support graphique peuvent ne pas être parallèles. Pour les manuels CIAM et Majors, deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont perpendiculaires à une même droite. Cette définition est opératoire dans les types tâches « construire » et « démontrer ».

Les exemples de définitions que nous venons de présenter, nous amènent à conclure que les définitions proposées de façon axiomatique par les manuels ne respectent pas toujours les critères d'une bonne définition (Shir & Zaslavsky, 2002). La définition de la droite est absente dans trois manuels et celle qui proposée dans un manuel est erronée. Nous pensons que ces phénomènes proviendraient de la non maîtrise de la définition de la droite et des critères d'une bonne définition en mathématiques. Cela pourrait provenir du passé d'élève des auteurs de ces manuels où la droite n'était pas définie et où les définitions n'étaient pas construites.

CONCLUSION

Cette recherche menée sur quatre manuels de mathématiques rapporte que les activités proposées dans les blocs « activités de découverte » des manuels orientent vers une technique d'exécution de la tâche. Les dessins qui illustrent les textes de ces activités ne sont en général pas neutres car ils augmentent l'appréhension perceptible du dessin. Ces activités ne favorisent pas toujours l'esprit d'initiative et l'esprit de recherche chez les élèves. On peut donc craindre que les concepts étudiés dans de telles leçons n'acquiescent pas le sens espéré et par conséquent engendrent des conceptions erronées chez les élèves. Les définitions des objets étudiés sont présentées de façon axiomatique, ce qui ne cadre pas avec les recommandations des chercheurs pour qui les élèves devraient être associés à l'activité de construction d'une définition (de Villiers, 1998; Tall & Vinner, 1981). La définition de la droite est absente dans trois manuels sur quatre. Cela pourrait induire des définitions personnelles qui ne correspondent pas à la définition formelle du concept (Tall & Vinner, 1981).

Les suggestions qui émanent de cette étude consistent à proposer, dans les leçons des manuels, des activités de construction de la définition des objets étudiés. De telles activités gagneraient à s'inspirer de la physique. Les activités de découverte devraient également donner l'opportunité aux élèves de

prendre des initiatives et de développer des aptitudes heuristiques. Pour faire suite à cette étude, il serait intéressant d'étudier la façon dont les définitions du concept de droite et du concept de parallélisme entre deux droites sont construites par les élèves, dans des conditions d'interdisciplinarité.

RÉFÉRENCES

- Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182.
- Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique ELAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves*. Grenoble : Université de Grenoble.
- Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation, In G. Arzac et al. (ed.). *La Transposition Didactique à l'épreuve*. (pp. 135–180). Grenoble : La Pensée sauvage,.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the Twentysecond International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (July), 248–255.
- Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence. *Annale de Didactique et des Sciences Cognitives*, 1, 57–74.
- Elia, I., & Philippou, G. (2004). The Functions of Pictures in Problem Solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. v.2 327–334.
- Freudenthal, H. (2012). *Mathematics as an educational task*. Berlin: Springer Science & Business Media.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175–193.
- Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie : Permanence et révolution. *Bulletin de l'APMEP*, 396, 523–548.
- Robert, A. (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x*, 63, 7–29.
- Shir, K., & Zaslavsky, O. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition. *Proceedings of the 26th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 201-208.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Images and Concept Definitions in Mathematics With Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151–169. <https://doi.org/10.1007/bf00305619>
- Walter, A. (2001). Quelle géométrie pour l'enseignement en collège? *Petit x*, 54, 31–49.

ANNEXES

Répartitions des activités et des modèles dans les blocs « Activités de découverte »

Types d'activités dans le chapitre droites du plan	Activité qui fourni des aides au sujet de la technique attendue		Activité qui laisse à l'élève le choix de la technique		Totale
	Inspiré du domaine de la physique	Inspiré de la géométrie	Inspiré du domaine de la physique	Inspiré de la géométrie	
Majore	-	7	-	-	7
Excellence	-	8	-	-	8
CIAM	-	7	-	-	7
Cargo	3	5	-	-	8

- 90% des activités sont inspirées du domaine de la géométrie ;
- 10% des activités sont inspirées du domaine de la physique ;
- Aucune activité ne laisse à l'élève le choix d'une technique ;

Fonctions et types des modèles dans les activités	Décorative		Représentative		Informatrice		Organisatrice		Totale
	O-G	O-P	O-G	O-P	O-G	O-P	O-G	O-P	
Majore	-	-	1	-	1	-	5	-	7
Excellence	-	-	1	-	-	-	6	-	7
CIAM	-	-	-	-	2	-	6	-	8
Cargo	-	-	1	-	1	-	2	3	7

O-G : objet géométrique ;

O-P : objet physique.

- 72,41% des modèles ont une fonction organisatrice ; 10,34% des modèles ont une fonction ; représentative ; 13,79% des modèles ont une fonction informative ;
- 10,34% de modèle représentent des objets physiques.