RMé 232

232

RMé

REVUE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE

SEPTEMBRE 2019

ISSN : 2571-516X

SOMMAIRE

Chères lectrices, Chers lecteurs,

Nous espérons que vous avez fait une agréable rentrée et que vous trouverez ainsi du temps pour lire ce dernier numéro de la revue RMé. Pour prolonger les vacances et les voyages, nous vous proposons quatre textes d'au-delà de nos frontières suisses.

Nous commençons notre voyage avec l'article V. Batteau qui nous emmène au Japon découvrir une leçon autour des grandeurs et mesures. Cette leçon est en fait un exemple qui illustre des choix didactiques effectués au Japon pour permettre de structurer l'enseignement par la résolution de problème. Cet article peut être mis en regard avec l'article de C. Frappier-Jego qui s'intéresse aussi à l'enseignement des grandeurs et mesures mais en se focalisant sur l'éventuel impact d'une séance de formation sur les connaissances mathématiques et didactiques de deux enseignantes. Pour cela l'auteure s'appuie sur l'analyse des ressources que les enseignantes investissent. Un travail autour des ressources disponibles aux enseignants est aussi proposé par C. Vendeira. Son texte présente une adaptation d'un matériel de classe ordinaire à un contexte spécialisé ainsi que les effets sur les marges de manœuvre disponibles aux enseignants pour s'assurer de l'implication des élèves.

Pour rester dans l'exotisme, les textes de J. Proulx venant du Québec et de S. Abouhanifa venant du Maroc s'interrogent sur des connaissances d'élèves. J. Proulx nous partage une anecdote ou petite perle comme il l'appelle. Sa réflexion part de discussions avec des élèves sur un problème multiplicatif. S. Abouhanifa, quant à lui, étudie les procédures des élèves face à un problème de suite arithmétique qui peut initier une symbolisation algébrique. Bien qu'éloignés géographiquement, ces questionnements sont tout à fait pertinents face à nos défis d'enseignement.

Un pas hors de la classe vous est proposé avec le texte de J.-L. Dorier qui s'intéresse au fonctionnement des vitesses d'un vélo. Peut-être cela suscitera quelques projets d'enseignement autour du vélo en mathématiques ou en physique ? Si c'est le cas pour certains d'entre vous, n'hésitez pas à nous faire partager vos expériences !

Enfin, nous sommes ravis de vous proposer un texte issu d'un travail d'étudiants durant leur formation initiale. En effet l'article de P. Grobet et C. Theytaz partage une réflexion sur de la mise en œuvre d'une évaluation dans une classe de 1P avec toutes les difficultés inhérentes à ce niveau scolaire.

Le prochain numéro de RMé sera consacré à la diffusion de travaux de recherche présentés lors du colloque de la COPIRELEM qui s'est déroulé à Lausanne en juin dernier. Nous vous invitons à penser dès maintenant à vos prochaines propositions pour le numéro 234 qui paraitra en septembre 2020.

Nous attendons vos contributions, enseignants, chercheurs mais aussi étudiants. Nous partageons tous le gout d'apprendre et de découvrir de la part de nos collègues mais aussi de nos élèves.

Merci aux auteurs de ce numéro pour la qualité de leurs articles, bonne lecture.

ACTIVITE DE MESURE DE LA LONGUEUR D'UN COULOIR DANS UNE ECOLE PRIMAIRE JAPONAISE

Valérie Batteau

Université de Waseda, Japon & UER MS, 3LS, HEP Vaud, Suisse[1]

INTRODUCTION

L'approche d'enseignement japonais par résolution de problème est destinée à développer les *mathematical thinking*, mais aussi à créer l'intérêt des élèves en mathématique et à susciter la créativité de l'activité mathématique (Takahashi, 2006). Cet article vise à montrer comment se traduit cette approche d'enseignement dans les pratiques ordinaires d'un enseignant lors de l'activité « mesurer la longueur d'un couloir de l'école » en 3e année (5H, élèves de 8-9 ans).

Dans cette approche, les leçons de mathématiques à l'école primaire sont structurées par résolution de problème (Shimizu, 1999). Les leçons commencent souvent par la présentation d'un problème, suivi éventuellement de l'estimation de la solution ou de la planification de procédure de résolution. Les élèves travaillent individuellement pour le résoudre, puis éventuellement par groupe. L'enseignant organise un moment collectif de discussion et comparaison des différentes procédures et solutions du problème (*neriage*). L'enseignant poursuit avec un résumé portant sur les connaissances/contenus mathématiques ou sur les méthodes étudiées pendant la leçon (*matome*), suivi éventuellement d'un développement. Le *matome* correspond plus ou moins à l'institutionnalisation dans le cadre de la didactique des mathématiques francophone.

L'article commence par une analyse de l'activité, avec une présentation de l'activité dans la séquence, avec le contexte et avec une analyse *a priori*. La deuxième partie propose une analyse des procédures mises en œuvre par les élèves et la troisième partie illustre le *matome* proposé par l'enseignant.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

Présentation de l'activité

L'enseignant, Kazu, propose une activité de mesure dont l'énoncé est : « mesurer la longueur du couloir de l'école ». Le couloir mesure 47 mètres 59 centimètres. Pour effectuer cette activité, les élèves peuvent utiliser tout ce qui les entoure : le matériel de la salle de classe et des étagères du couloir (règles, fils, compas, tableau en liège, réglettes, tabourets...). Ce matériel n'a pas été mis spécialement à disposition par l'enseignant et comme la salle de classe communique avec un hall qui sert d'ateliers de fabrication, l'environnement favorise l'utilisation de divers instruments non spécifiquement dédiés aux activités mathématiques.

L'activité s'inscrit dans une séquence de quinze leçons sur « ressentir la longueur » dans le cas de grandes longueurs. Kazu propose dans la séquence plusieurs activités dans le méso-espace : mesurer la longueur de couloirs de l'école, différentes longueurs dans l'école au choix des élèves (longueur de la salle de sport, hauteur du rez-de-chaussée au 1er étage...) et la longueur du périmètre d'un terrain de sport. Il propose aussi des activités dans le macro-espace : marcher une distance d'un kilomètre et mesurer la

[1] Cette recherche s'inscrit dans une recherche postdoctorale financée par le Fonds National Suisse (http://p3.snf.ch/Project-181510#) et rattachée en Suisse à l'Université de Genève et à la HEP Vaud et au Japon à l'Université Waseda.

distance de l'école à un magasin de bonbons situé à environ 700 mètres. Cette séquence s'inspire d'une séquence proposée dans l'un des manuels scolaires obligatoires de l'école primaire japonaise (Hitotsumatsu, 2015, pp. 4-15). Les objectifs de la séquence sont de faire ressentir différentes longueurs dans le méso-espace et dans le macro-espace à travers des expérimentations, mais aussi de découvrir l'unité du kilomètre et les procédures de mesurages. L'expression japonaise traduite en français par « ressentir la longueur » recouvre donc l'expérimentation par le corps des élèves : parcourir différentes longueurs comme un couloir d'une quarantaine de mètres, le tour d'un terrain de sport ou marcher un kilomètre (ce qui a duré environ deux heures). Les élèves sont amenés à se rendre compte qu'on ne met pas le même temps, à exprimer différentes sensations et aussi à intérioriser les différentes unités de mesure (km, m, cm). Les activités de la séquence reposent sur des mises en œuvre de procédures de mesurage (qui sont nouvelles dans le programme officiel en 3e année), précédées d'estimations des mesures des différentes longueurs. Ces activités peuvent faire appel à des additions et des comparaisons de mesures.

Contexte

L'enseignant enseigne dans l'école primaire rattachée à l'Université d'Éducation de Joetsu dont le thème de recherche annuel porte sur la démarche d'investigation. Il crée donc avec les élèves cette activité de mesure dans le méso-espace en se plaçant dans le contexte de la vie quotidienne.

La mise en œuvre de l'activité de mesure de la longueur du couloir s'est déroulée pendant les cinq premières leçons de la séquence de quinze leçons sur « ressentir les longueurs ».

Leçon	Durée	Tâches proposées par l'enseignant
1	0:30	Créer collaborativement l'activité : « mesurer la longueur du couloir de l'école » Donner une estimation de la mesure de la longueur du couloir Trouver une méthode pour mesurer la longueur du couloir et choisir un instrument de mesure
2	1:00	Mesurer la longueur du couloir avec l'instrument choisi et avec la méthode de mesurage planifiée par les élèves lors de la leçon 1
3	1:05	Donner la mesure de la longueur du couloir trouvée lors de la 2e leçon Valider la mesure effectuée avec une roue numérique, mise en œuvre par un élève et observée par la classe (21:00). Cette mesure de haute précision est considérée par l'enseignant et les élèves comme la réponse exacte *Neriage* : discuter des différents résultats et procédures (44:00)
4	1:40	*Neriage* et *Matome* (43:00) Mesurer la longueur du couloir (57:00)
5	0:35	*Neriage* : discuter des différents résultats et procédures

Fig. 1 : Déroulement du début de la séquence

Les données de recherche sont constituées des vidéos des quinze leçons, dont les vidéos des 1re et 3e leçons intégralement transcrites et traduites, des documents écrits traduits : la séquence correspondante dans le guide de l'enseignant, le plan de la séquence de leçons rédigé par Kazu et le rapport de la 8e leçon rédigé aussi par Kazu.

Analyse *a priori*

Connaissances en jeu

Les connaissances en jeu (et déjà connues des élèves en 2e année) sont le système métrique : les unités mètres, centimètres et millimètres, les conversions entre ces différentes unités et les additions de ces unités de longueur. L'unité de longueur kilomètre n'est pas connue des élèves et est l'un des objectifs de la séquence des quinze leçons. Bien que les élèves aient déjà été amenés à effectuer des procédures de mesurage l'année précédente, le programme scolaire indique que « Measurement using instruments » (Isoda, 2010, p. 27) se fait à partir de la 3e année.

Variables didactiques

Une variable didactique de l'activité est le matériel à disposition : des instruments de mesure conventionnels ou non. Les instruments de mesure conventionnels sont ceux dont on n'a pas besoin de mesurer la longueur : règles graduées, dérouleur de cent mètres, roue de mesure numérique[2]. Les instruments de mesure non conventionnels sont tous les objets utilisables pour mesurer une longueur et dont on a besoin de mesurer la longueur : compas, fil en laine, baguettes, pieds, pas, corps, tabourets... Plus la longueur de l'instrument choisi est petite, plus le nombre de reports sera grand et plus il pourra y avoir des erreurs possibles de mesurage. Plus la longueur de l'instrument est grande (dérouleur de cent mètres par exemple) et moins il y a d'erreurs possibles de mesurage.

Une autre variable didactique est la longueur du couloir. Pour mesurer un couloir de petite longueur, certains instruments sont optimaux comme la règle d'un mètre et pour mesurer un couloir de grande longueur d'autres instruments peuvent l'être, comme le mètre dérouleur de cent mètres ou la roue numérique, ce qui est le cas dans l'activité.

Une autre variable didactique est le rapport entre l'unité de mesure et la longueur du couloir. Plus ce rapport est grand, plus il y aura de reports à effectuer, plus il pourra y avoir des erreurs possibles de mesurage.

Une autre variable didactique est la présence de repères sur le sol : cela peut faciliter le fait de suivre une ligne droite ou cela peut faciliter le comptage des reports, ou cela peut aussi faciliter l'opération de report de l'unité de mesure.

La modalité de travail des élèves constitue une variable, de l'ordre de l'organisation du travail, qui influe sur la mise en œuvre des procédures. En effet, il n'est pas possible, ou difficilement possible de mesurer le couloir en étant seul si on utilise le dérouleur de cent mètres ou la hauteur du corps d'un élève par exemple. Pour les procédures utilisant les autres instruments, il est nécessaire que les élèves se partagent les tâches, par exemple : un ou deux élèves positionnent l'instrument (ou les instruments), un autre élève met un repère et un dernier élève compte les reports. Le travail en groupe facilite ainsi la mise en œuvre des procédures de mesurage.

Stratégies possibles

Il faut choisir un instrument (règle, corps, pieds, tableau en liège, écartement d'un compas pour tableau noir, tabourets, baguettes...), positionner l'instrument le long d'une ligne droite (par exemple le long d'un des deux bords du mur du couloir) en commençant par un bout du couloir, mettre un repère au bout de l'instrument afin de le repositionner à partir de ce repère toujours en suivant la ligne, compter le nombre de reports (avec un compteur électronique ou de tête en le mémorisant ou en l'écrivant au fur et à mesure), ceci d'un bout à l'autre du couloir. Lorsque la longueur du couloir n'est pas un multiple

[2] Une roue de mesure numérique est un dispositif de mesure de distance composé d'une roue, d'un manche et d'un boîtier qui affiche la distance parcourue. On marche en poussant la roue qui permet de mesurer avec précision la distance parcourue jusqu'à 9999,9 m.

de la longueur de l'instrument, il faut mesurer la longueur restante entre le dernier repère et le bout du couloir. Il faut ensuite mesurer la longueur de l'instrument (dans le cas des instruments de mesure non conventionnels), le multiplier par le nombre de reports, éventuellement additionner la longueur restante et on trouve ainsi la longueur totale du couloir.

Une variante de cette stratégie consiste à additionner directement la mesure de la longueur de l'instrument au fur et à mesure au lieu de compter le nombre de reports. Cette variante repose uniquement sur des additions alors que la première stratégie repose sur une multiplication avec éventuellement une addition.

Pour mesurer le couloir avec la roue numérique, il faut suivre une ligne droite d'un bout à l'autre du couloir, puis lire le nombre indiqué sur le boîtier au bout du couloir. Pour le dérouleur de cent mètres, il faut le dérouler en ligne droite, positionner le 0 sur un bout du couloir et lire la mesure à l'aide des graduations à l'autre bout du couloir.

Difficultés prévisibles

Cette activité présente des difficultés techniques : suivre une ligne droite pour mesurer la longueur du couloir, mettre un repère après l'instrument, compter le nombre de reports sans en oublier.

Lorsque la longueur du couloir n'est pas un multiple de la longueur de l'instrument choisi, il faut mesurer la longueur restante avec éventuellement un autre instrument et l'additionner à la longueur déjà mesurée.

Lorsqu'on utilise plusieurs règles, il faut bien positionner le 0 de la règle qui n'est pas nécessairement sur un bout de la règle.

L'utilisation de la roue numérique implique une difficulté particulière : la roue ne peut aller contre le mur du couloir d'un côté, il faut donc ajouter la mesure de la longueur du rayon de la roue à la mesure de la longueur totale lue sur la roue numérique. Une autre difficulté est liée à la conversion du nombre lu sur le boîtier de la roue numérique en mètres et centimètres.

Lorsqu'on utilise un repère physique (crayon, pied, doigt...), il y a deux manières de le positionner. En prenant l'exemple avec des règles d'un mètre, soit on positionne le repère après la règle et on superpose la règle d'un mètre sur ce repère (Fig. 2), dans ce cas, il ne faut pas prendre en compte la longueur du repère.

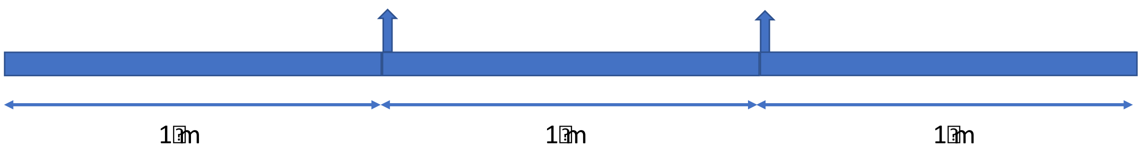


Fig. 2 : Repères positionnés sur des règles d'un mètre

Soit on repositionne l'instrument après le repère et dans ce cas, il faut prendre en compte la longueur du repère et son nombre de reports dans le calcul de la longueur totale (Fig. 3).

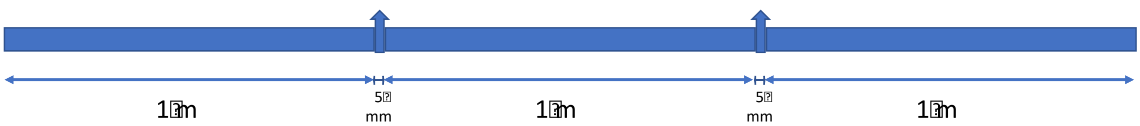


Fig. 3 : Repères entre des règles d'un mètre

D'autres difficultés sont davantage liées aux connaissances du système métrique : additionner des nombres écrits en mètres, centimètres, millimètres, conversions entre ces unités de longueur.

Nous proposons une analyse des procédures mises en œuvre par les élèves lors des 2e et 4e leçons de la séquence.

ANALYSE DES PROCÉDURES DES ÉLÈVES

La classe de Kazu comporte trente-cinq élèves répartis en huit groupes de quatre élèves et un groupe de trois élèves. Lors de la 2e leçon, les neuf groupes d'élèves ont utilisé cinq instruments différents : la taille d'un élève, une règle d'un mètre, deux règles de 15 centimètres et une règle de 17 centimètres mises bout à bout, l'écartement d'un compas pour tableau noir, un tableau en liège de 60 centimètres de longueur avec une règle d'un mètre utilisée comme un deuxième tableau en liège.

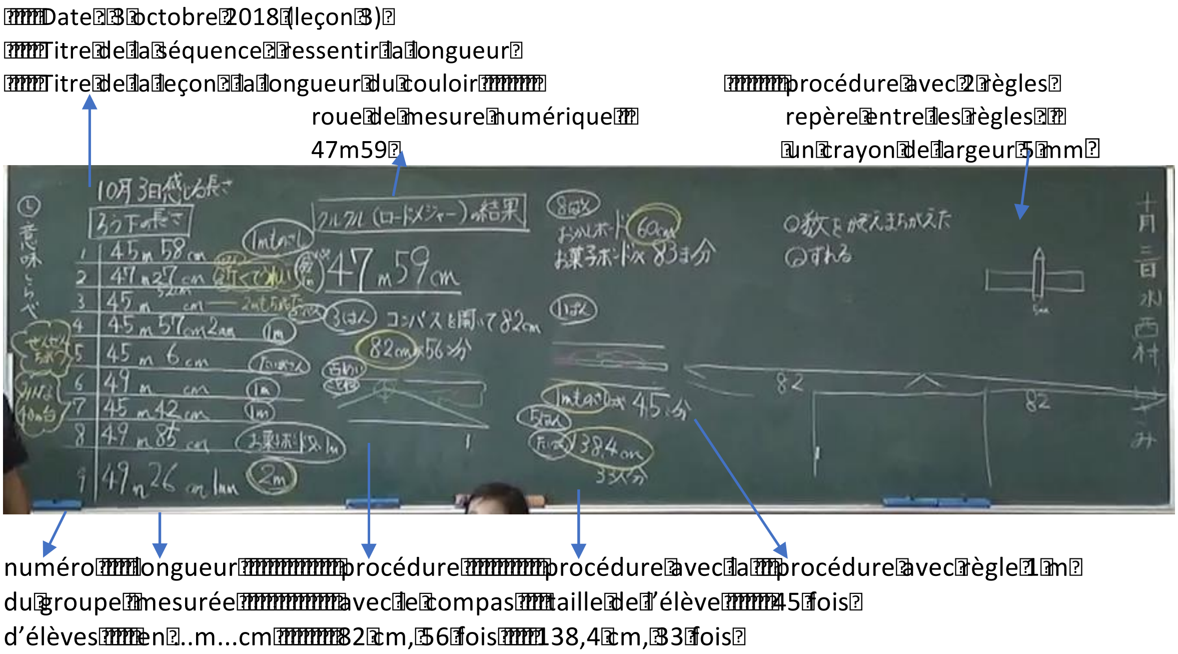


Fig. 4 : Tableau noir à la fin de la 3e leçon

Kazu a estimé qu'il y avait trop de procédures qui utilisaient la règle d'un mètre. Il a donc proposé lors de la 4e leçon de remesurer la longueur du couloir avec d'autres procédures et d'autres instruments faisant appel à la créativité des élèves. Or, avec la roue numérique, les élèves ont déjà trouvé une mesure de haute précision de la longueur du couloir (47 m 59 cm) lors de la 3e leçon.

Lors de la 4e leçon, les élèves utilisent leur corps (les pas, les pieds mis bout à bout), les règles (deux règles d'un mètre attachées, trois règles d'un mètre mises bout à bout, un dérouleur de cent mètres, des baguettes en plastique de 20 cm mises bout à bout), du fil en laine, des tabourets rectangulaires retournés et mis bout à bout entre des règles d'un mètre qui servent de rails. L'utilisation de ces nouveaux instruments développe la créativité des élèves et leur intérêt à réaliser l'activité mathématique. On note toutefois que ces nouveaux instruments, hormis pour le dérouleur de cent mètres, reposent sur les mêmes stratégies.

Les instruments non conventionnels nécessitent de devoir mesurer leur longueur : c'est le cas pour la taille d'un élève, les tabourets, l'écartement du compas, le tableau en liège, le fil en laine ou encore les baguettes.

Procédure avec des règles

Les élèves ont utilisé une, deux ou trois règles d'un mètre séparées ou attachées ensemble, des petites règles de 15 centimètres et 17 centimètres. Ces instruments de mesure conventionnels impliquent la difficulté de lecture du 0 et de bien aligner le 0 sur le repère mis par les élèves. Le fait d'attacher ou non ensemble les règles modifie l'unité de mesure et le nombre de reports. Le groupe d'élèves peut utiliser trois règles à la place d'une seule juste pour des raisons ergonomiques et ainsi considérer que l'unité de mesure reste d'un mètre.

Fig. 5 : Mise en œuvre de procédures utilisant trois petites règles, deux règles d'un mètre, trois règles d'un mètre, trois règles d'un mètre attachées ensemble

Procédure avec le compas

L'utilisation de l'écartement du compas pour tableau noir a pour avantage ergonomique de ne pas devoir nécessairement prendre des repères étant donné que le compas une fois positionné garde au sol l'une de ses deux branches, faisant tourner simplement l'autre branche (Fig. 6).

Fig. 6 : Mise en œuvre d'une procédure avec le compas

Un autre groupe d'élèves a utilisé le compas en mettant en œuvre une procédure différente (Fig. 7).

Fig. 7 : Mise en œuvre d'une procédure avec le compas (82 cm)

Ce groupe d'élèves a utilisé le compas « à plat ». L'élève de gauche positionne son doigt comme repère pour faire coulisser le compas afin de positionner l'autre extrémité du compas sur une ligne droite qu'il s'imagine. Puis, il se déplace, positionne son doigt à l'autre extrémité du compas pour déplacer le compas à partir de ce nouveau repère. Ce groupe d'élèves met en œuvre une procédure avec plusieurs déplacements du compas : un premier déplacement à la perpendiculaire pour bien positionner la 2^{e} extrémité du compas le long de la ligne droite et un deuxième déplacement le long de la ligne droite.

Les deux groupes d'élèves emploient le même instrument avec des écartements différents : le premier groupe prend un « petit » écartement pour faciliter la mise en œuvre de la procédure qui consiste à faire tourner le compas en conservant une branche au sol, tandis que le deuxième groupe prend le plus grand écartement possible (82 centimètres), car ils ne font que déplacer le compas au sol.

La difficulté principale de ces procédures est de suivre une ligne droite qui n'est pas matérialisée.

Procédure avec la roue numérique

La roue numérique a été utilisée pour valider une mesure de haute précision de la longueur du couloir.

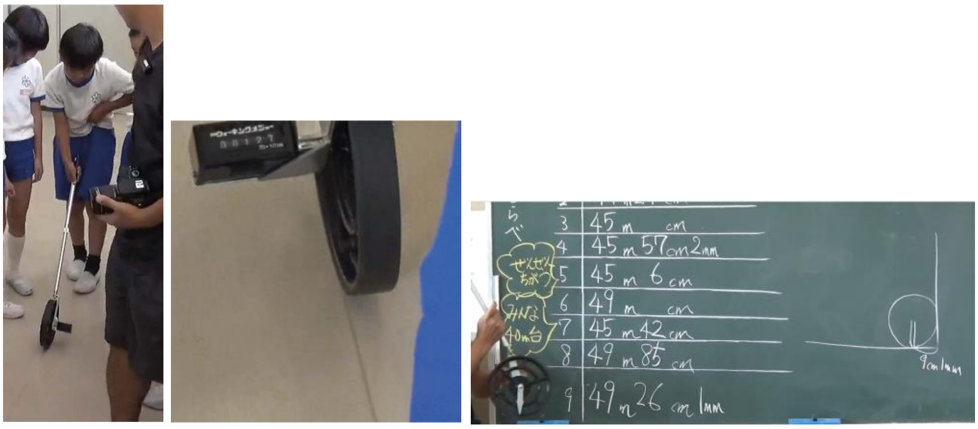


Fig. 8 : Mise en œuvre de la procédure avec la roue numérique et tableau noir au début de la 3e leçon

L'image de gauche montre un élève poussant la roue numérique le long d'une ligne droite, observé par les autres élèves. L'image du centre montre la roue numérique à 0012,7 mètres. L'utilisation de la roue numérique rencontre un problème concret de mesurage que les élèves doivent prendre en compte pour trouver la mesure de la longueur totale du couloir. Le tableau noir illustre ce problème avec un schéma de la roue numérique contre le mur et la mesure de la longueur du rayon (9 cm 1 mm). Devant le tableau noir, l'enseignant montre aux élèves le fonctionnement de la roue numérique en la faisant tourner : quand la roue tourne, le boîtier indique la distance parcourue en mètres.

Procédure avec des tabourets

La procédure avec des tabourets a évolué entre le début et la fin de sa mise en œuvre : le groupe d'élèves a d'abord utilisé trois tabourets qu'ils positionnent entre deux règles d'un mètre qui servent de rails, puis pour des raisons ergonomiques, ils utilisent cinq tabourets qu'ils positionnent le long d'un seul rail (Fig. 9).

Fig. 9 : Mise en œuvre de la procédure avec les tabourets

La difficulté de cette procédure réside dans le comptage des reports des tabourets. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire de prendre de repère, car les élèves déplacent les tabourets un par un (Fig. 10).

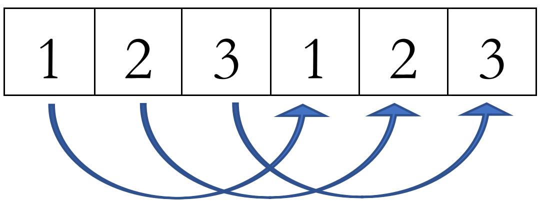


Fig. 10 : déplacement des tabourets

Procédure avec la taille du corps

Cette procédure consiste à s'allonger, prendre un repère au niveau de la tête, se relever, se rallonger à partir de ce repère, en suivant une ligne droite d'un bout à l'autre du couloir. L'élève a dû ainsi s'allonger 33 fois pour mesurer la longueur totale du couloir. Cette procédure a pour principal intérêt de plaire aux élèves, ce qui est essentiel dans le style d'enseignement des mathématiques japonais !

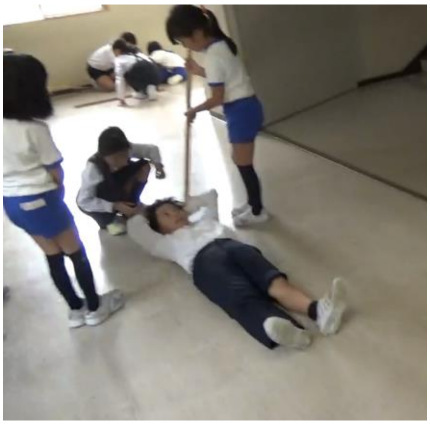


Fig. 11 : Mise en œuvre de la procédure avec la taille du corps

Procédure avec le tableau en liège et la règle d'un mètre

Cette procédure utilise un tableau en liège de 60 centimètres et une règle d'un mètre. Le groupe d'élèves a choisi d'utiliser la règle comme si c'était un deuxième tableau en liège. Cela illustre la volonté de conserver l'unité de mesure (60 cm) quelles que soient les possibilités offertes par le 2e instrument (règle d'un mètre), mais aussi l'importance accordée à l'utilisation d'instruments non conventionnels.

Fig. 12 : Mise en œuvre de la procédure avec un tableau en liège et une règle d'un mètre

Procédure avec des baguettes

Le groupe d'élèves aligne les baguettes, sans prendre de repère au sol entre les baguettes, puis ils comptent le nombre de reports et mesurent la longueur d'une baguette pour trouver la longueur totale du couloir.

Fig. 13 : Mise en œuvre de la procédure avec les baguettes

Difficultés rencontrées

Les élèves ont utilisé différents repères entre les instruments : leur doigt, un crayon ou un morceau de scotch sur lequel certains élèves écrivaient le numéro du report. Certains élèves repositionnaient l'instrument sur le repère, ainsi la mesure de la longueur du repère ne devait pas être prise en compte dans le calcul total de la mesure de la longueur du couloir (Fig. 2). Mais d'autres élèves positionnaient le repère entre les instruments de mesure (Fig. 3), il fallait dans ce cas prendre en compte la mesure de la longueur du repère.

Des élèves n'ont pas suivi de ligne droite pour mesurer la longueur du couloir, ce qui a été une source d'erreur.

Validation des procédures

Lors du *neriage* de la 3e leçon, Kazu demande aux élèves la mesure la plus proche de la mesure de haute précision. Il a inscrit toutes les mesures et celle de haute précision au tableau : 47m 59cm (Fig. 4). Cinq groupes d'élèves ont trouvé une mesure de la longueur dans les 45 mètres, un groupe d'élèves dans les 47 mètres et trois groupes dans les 49 mètres. Le groupe 2 a trouvé le résultat le plus proche : 47m 27cm (Fig. 4). Il demande à ce groupe d'expliquer sa procédure de mesurage et son ressenti. Il demande ensuite à chaque groupe qui a utilisé des procédures différentes de présenter sa procédure. La différence entre la valeur de haute précision et la valeur mesurée par huit groupes d'élèves est relativement importante, ce qui a questionné Kazu. Il valide les procédures, mais pas les résultats et demande aux élèves de réfléchir à quelles ont pu être les erreurs de mesurage. Les principales erreurs mentionnées par les élèves ont été : faire des zigzags, oublier des reports dans le comptage et oublier de prendre en compte la mesure de la longueur du repère, comme schématisé au tableau noir avec un crayon d'une largeur de 5 mm entre deux règles (en haut à droite de la Fig.4).

Matome

Le résumé de ce qui a été appris pendant la leçon, le *matome*, est une phase qui fait partie des pratiques ordinaires des enseignants. Kazu utilise la procédure avec compas d'écartement 82 centimètres pour institutionnaliser l'expression mathématique du *matome*. Les élèves de ce groupe ont additionné 82 centimètres au fur et à mesure de la mise en œuvre de la procédure (Fig. 14).

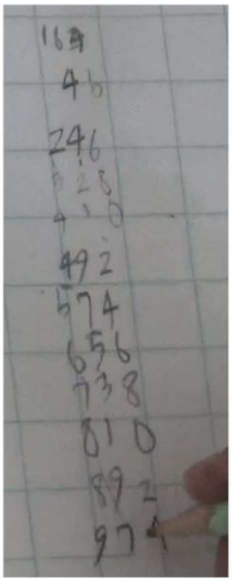


Fig. 14 : Zoom sur le cahier d'un élève – procédure avec le compas d'écartement 82 cm

Lors du moment collectif de la 3e leçon, les élèves expliquent qu'ils ont additionné 82 plus 82, ainsi de suite. Kazu demande alors combien de fois ils ont additionné 82 et ils répondent 56 fois.

Kazu : Je veux dire que c'est 82 centimètres. Alors que diriez-vous pour la deuxième fois ? Oui ?

Élève 1 : Encore comme ça, encore une fois 82 centimètres, 82 centimètres plus 82 centimètres, ça fait combien ? 164. Donc, toujours de la même façon, nous allons mesurer de plus en plus. […]

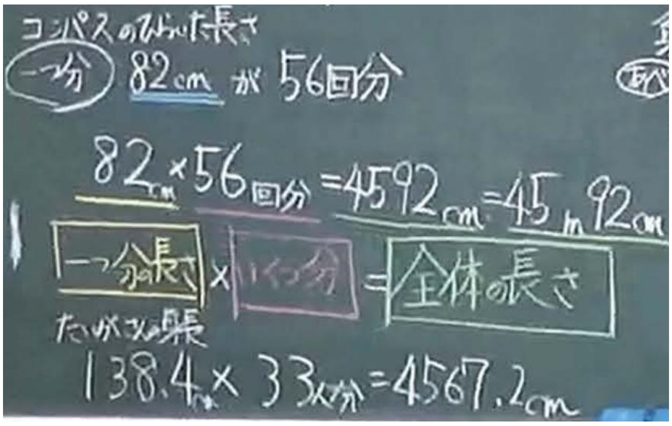
Élève 2 : Qu'as-tu calculé ?

Élève 1 : Comme Miki [un autre élève], tu as calculé comme une calculatrice, par exemple, 82 plus 164 et ainsi de suite.

Kazu : Si oui, combien de 82 centimètres ? […]

Élève 3 : 56 fois.

Ces échanges lors de la 3e leçon permettent à Kazu de préparer l'expression mathématique suivante pour le *matome* (4e leçon) : la longueur de l'unité choisie (ici 82 cm) multipliée par le nombre d'unités choisies (ici 56 fois) est égale à la longueur entière (4592 cm). Cette expression mathématique correspond à la multiplication vue comme une addition itérée, comme présentée dans l'extrait de leçon précédent puis discutée à nouveau pendant la leçon 4.



Longueur de l'écartement du compas
Unité de mesure choisie : 82 cm, 56 fois

$82_{cm} \times 56_{fois} = 4592_{cm} = 45_{m}92_{cm}$

La longueur de l'unité choisie x le nombre d'unités choisies = la longueur entière

La taille de l'élève
$138.4_{cm} \times 33_{fois} = 4567.2_{cm}$

Fig. 15 : Extrait du tableau noir au début de la 4e leçon

L'expression mathématique est vraie lorsque la mesure de la longueur totale est un multiple de l'unité de mesure ou lorsque le nombre d'unités choisies n'est pas nécessairement un nombre entier. Kazu demande à chaque élève d'écrire dans son cahier l'expression mathématique correspondant à sa procédure. Par exemple, le groupe qui a utilisé le tableau en liège de 60 cm (Fig. 4) doit écrire 60 × 83 = 4980cm = 49m 80cm. Cet enseignement illustre ainsi toute la difficulté à proposer une expression mathématique décontextualisée qui résulte des procédures effectivement mises en œuvre par les élèves.

Conclusion

Dans l'approche d'enseignement par résolution de problème, Kazu accorde de l'importance à la diversité des procédures en proposant deux leçons pendant lesquelles les élèves doivent exécuter la même activité de mesurage de la longueur d'un couloir. Les élèves mettent en œuvre des procédures variées qui reposent sur l'utilisation d'une dizaine d'instruments de mesure différents, conventionnels ou non. La recherche de la diversité des procédures participe ainsi à susciter l'intérêt des élèves.

À travers cette recherche de diversités des procédures ou tout du moins des instruments, Kazu participe aussi à la créativité de l'activité mathématique des élèves : en leur laissant la possibilité d'utiliser tout le matériel à disposition dans la classe et à ses abords, en les incitant à utiliser des instruments de mesure non conventionnels ou encore en leur laissant le temps nécessaire pour aller jusqu'au bout de leur procédure.

Kazu développe également l'intérêt de ses élèves en proposant une activité de mesurage dans le méso-espace inscrite dans l'environnement quotidien des élèves et dans laquelle ils sont amenés à résoudre des problèmes concrets de mesurage, tel que la roue numérique qui ne peut aller jusqu'au bout du mur.

Cet article est un exemple d'enseignement japonais par résolution de problème dans lequel la diversité des procédures mises en œuvre par les élèves joue un rôle essentiel.

BIBLIOGRAPHIE

Hitotsumatsu, S. (2015). *Guide de l'enseignant - Manuel de mathématiques de 3e année 1er volume. "Travail avec tout le monde à l'école primaire en mathématiques en troisième année" (Mina to manabu shoogako san nen joo)*. Tokyo: Gako tosho.

Isoda, M. (2010). *Elementary School Teaching Guide for the Japanese. Course of Study Mathematics (Grade 1-6), with the English translation on the opposite page* (CRICED Ed.). University of Tsukuba.

Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematical teacher education in Japan: Focusing on the teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education, 2*, 107-116.

Takahashi, A. (2006). Characteristics of Japanese Mathematics Lessons. *Tsubuka Journal of Educational Study in Mathematics, 25*, 37-44. Repéré à www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2006/Tsukuba_Journal_25.pdf

Grandeurs et mesures a l'ecole elementaire : Impact des ressources proposees en formation sur le developpement professionnel des enseignants

Carine Frappier-Jego

Institut Supérieur de Formation de l'Enseignement Catholique de Bretagne - Formatrice

Introduction

Notre questionnement vient d'un constat que nous avons pu faire en tant que formatrice en centre de formation[1] des futurs enseignants. Chaque année, nous constatons que plus des trois quarts des professeurs stagiaires[2], à mi-temps en formation, se voient confier le domaine des grandeurs et mesures par des titulaires qui évitent ainsi cet enseignement. Ceci peut s'expliquer par la place particulière que ce domaine a eu dans les programmes officiels du ministère de l'éducation nationale au cours des dernières décennies. En effet, le domaine des grandeurs et mesures apparait en tant que tel seulement dans les programmes de 2002. Avant, ces deux concepts étaient des outils au service du développement du calcul et de la géométrie. Après 2002, ils deviennent objets d'étude. Les enseignants actuels ont été scolarisés avant 2002, ils se trouvent en difficulté pour enseigner des notions qu'ils ne maitrisent pas eux-mêmes car ils ne les ont pas travaillées comme on nous demande de l'enseigner aujourd'hui[3].

Ce constat nous a amenée à nous questionner, dans la continuité de travaux de Chambris (2008), sur le rôle que la formation pourrait jouer pour dépasser cette difficulté rencontrée par les enseignants. Nous avons donc décidé d'analyser une proposition faite en formation initiale et en formation continue, pour un travail sur les contenances destiné à des élèves de cycle 2 (élèves entre 6 et 8 ans dans la nouvelle organisation des cycles proposée dans les derniers programmes officiels (Ministère de l'Education Nationale, 2015)). Lors de ces temps de formation, les stagiaires sont amenés à résoudre, dans un premier temps, des défis, comme le feraient des élèves, puis à analyser cette activité. Pour effectuer ces tâches (annexe), les enseignants utilisent différentes techniques induites par les situations. Cette proposition qui correspond aux instructions officielles récentes du cycle 2 (Ministère de l'Education Nationale, 2015) est susceptible d'être transposée en classe par les enseignants qui l'auront vécue. Nous souhaitons donc déterminer **dans quelle mesure cette ressource permet le développement professionnel de l'enseignant, en lui permettant de se questionner sur la mise en œuvre d'une organisation mathématique pour les « grandeurs et mesures » proche de celle proposée dans les programmes de 2015** (Ministère de l'Education Nationale, 2015) **?** Pour y répondre, nous allons

---

[1] Les candidats reçus au concours de recrutement de professeur des écoles doivent suivre une année de formation où ils sont à mi-temps en classe devant des élèves et en formation théorique sur l'autre mi-temps en centre de formation (ESPE : Ecoles Supérieures du Professorat et de l'Education ou ISFEC : Institut Supérieur de Formation de l'Enseignement Catholique).

[2] Professeurs stagiaires : Candidats reçus au concours de professeur des écoles pour enseigner à des enfants de 2 à 10 ans et qui sont en formation pendant un an avant d'être titularisés.

[3] Dans notre recherche Frappier-Jego (2015), nous avons pu mettre en place un questionnaire, auprès de professeurs des écoles, qui pointe la difficulté que les enseignants rencontrent face à l'enseignement de ce domaine.

tester le réemploi, par les enseignants, de cette situation. Cela suppose une clarification théorique des concepts en jeu, une présentation de la méthodologie utilisée, puis des résultats obtenus.

Cadre théorique

Le développement professionnel

Le développement professionnel des enseignants est un sujet qui questionne par sa complexité et qui, à ce titre, se retrouve au cœur de nombreuses recherches scientifiques (Day, 1999 ; Kagan, 1992 ; Moreira, 1996). Dans la pratique, les enseignants s'engagent dans différentes démarches de « développement » que les chercheurs essaient d'analyser grâce à différents cadres théoriques. Au moins deux perspectives peuvent être dégagées des recherches. L'une, développementale (Fessler & Christensen, 1992), associe le développement professionnel au cheminement de la carrière enseignante. L'autre, professionnalisante, définit le développement professionnel sous l'angle de l'apprentissage, provoqué par les conditions d'activité mises en œuvre. Le développement professionnel est alors considéré comme un long processus d'apprentissage où l'enseignant analyse et évalue ses propositions pour être en mesure de les faire évoluer. Dans ce cas, les dispositifs de formation initiale et continue sont selon Lefeuvre, Garcia et Namolovan (2009), sont des moments privilégiés pour permettre aux enseignants de conscientiser et faire évoluer leurs savoirs.

Au regard de notre questionnement, nous retenons pour notre travail la perspective professionnalisante du développement professionnel des enseignants. Nous plaçons notre recherche dans la lignée de celle de Besnier (2016) qui considère que « le développement professionnel des professeurs s'envisage à travers une part essentielle de leur activité : le jeu sur et avec les ressources » (Besnier, 2016, p.90). Nous nous intéressons à la construction des connaissances professionnelles qui s'opère au cours de l'activité du professeur et plus précisément à l'impact que peut avoir une ressource proposée en formation sur les connaissances professionnelles de l'enseignant. Pour étudier ce processus, nous utilisons le cadre théorique de « l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2008) » que nous présentons maintenant.

L'approche documentaire

L'approche documentaire trouve sa source dans l'approche instrumentale développée par Rabardel (1995) en ergonomie cognitive, puis intégrée en didactique des mathématiques par Guin et Trouche (2002). Rabardel (1995) distingue l'artefact de l'instrument : l'artefact est disponible pour une personne alors que l'instrument est construit par celle-ci à partir de cet artefact associé à des schèmes d'utilisation. Un schème (Vergnaud, 1996) étant une organisation invariante de l'activité, on peut donc proposer une définition synthétique de l'instrument : *instrument* = *artefact* + *schème*. C'est une approche qui distingue, au cœur des genèses instrumentales, deux processus interdépendants : la dialectique d'instrumentation/instrumentalisation. L'instrumentation consiste en l'élaboration de schèmes d'utilisation des artefacts alors que l'instrumentalisation est le processus par lequel le sujet met les artefacts à sa main.

Nous allons maintenant expliquer pourquoi l'évolution des ressources disponibles pour les enseignants nécessite une approche prolongeant l'approche instrumentale.

Alors que le sens communément attribué au mot ressource est celui de ressources matérielles, Adler (2000) pense les ressources plus largement. Selon elle, une ressource est tout ce qui peut « re-sourcer » la pratique du professeur. Ainsi une discussion avec un collègue, un cahier d'élève peuvent avoir des conséquences professionnelles au même titre que l'utilisation d'un manuel scolaire. Le professeur recherche des ressources, les modifie pour les adapter à sa classe et à ses élèves, il se les approprie. Il mobilise au cours de ce travail documentaire, un ensemble de ressources de diverses natures dans le but de concevoir et mettre en œuvre une séquence permettant aux élèves de construire les caractéristiques d'une grandeur donnée dans notre exemple. Nous considérons, comme Gueudet et Trouche (2008), que cet ensemble de ressources donne naissance, au cours d'une genèse documentaire, à un document (Fig. 1).

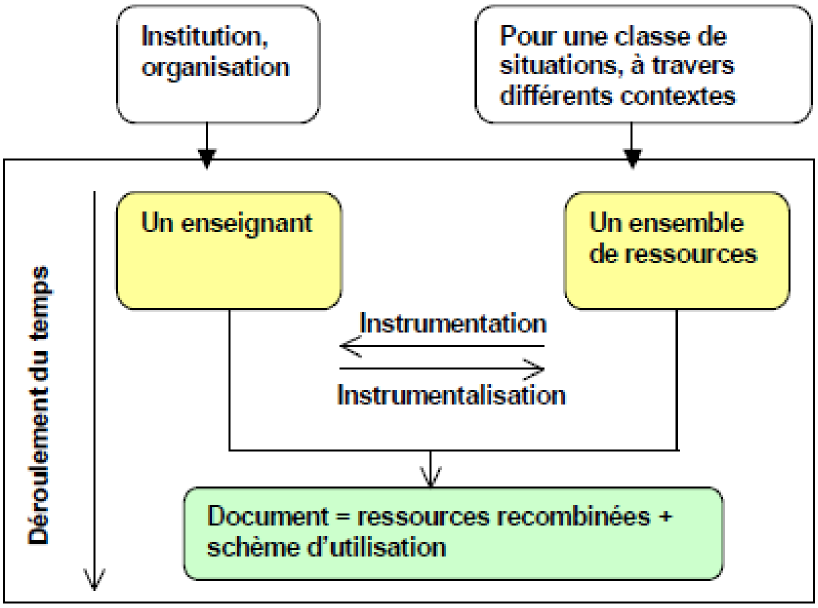


Fig. 1 : Représentation schématique de la genèse documentaire. Gueudet et Trouche (2008)

Cette dialectique nous permettra « de désigner et d'analyser, dans les genèses documentaires, les processus de transformation des ressources au cours de leur appropriation par les enseignants (instrumentalisation) et les évolutions professionnelles induites par le travail sur ces ressources (instrumentation) » (Gueudet & Trouche, 2009).

C'est ce cadre que nous utiliserons dans notre étude pour analyser l'influence de la ressource sur le développement de connaissances professionnelles chez les enseignants.

Les praxéologies et l'approche anthropologique du didactique

La notion de praxéologie (Chevallard, 2001) se définit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Selon Chevallard (2001), les humains vivent dans des institutions, c'est-à-dire des groupements sociaux légitimés, qui façonnent les savoirs produits et utilisés par ces mêmes personnes. Les savoirs façonnés par une institution prennent la forme d'une praxéologie ou encore d'une organisation mathématique (OM) dans le cas de l'activité mathématique. Les praxéologies sont différentes en fonction des institutions. Les organisations mathématiques sont constituées de « Praxis », la pratique et de « Logos » le discours qui explique la raison de cette pratique. Une praxéologie est définie par une tâche, une technique, une technologie et une théorie. Une fois une tâche choisie, il faut y associer une ou plusieurs techniques, c'est-à-dire une façon de réaliser cette tâche. On explicite ensuite une technologie, c'est-à-dire un discours expliquant la technique retenue, puis une théorie qui fonde la technologie.

La ressource proposée en formation vise à mettre en exergue une organisation mathématique du même type que celle proposée dans les programmes de cycle 2 de 2015, l'institution en question est alors celle des programmes français de 2015. La figure suivante (Fig. 2) synthétise l'organisation mathématique travaillée en formation au regard des concepts définis par Chevallard (2001).

Organisation mathématique à la base de la proposition de formation (Cf. annexe)		
Type de tâche 1 (T1) : Comparer des grandeurs : les contenances	Techniques τ1 : τ11 Estimation visuelle τ12 Comparaison directe τ13 Comparaison indirecte	Technologie θ1: Pour une collection d'objets donnée, une grandeur est un caractère qui permet de comparer ces objets c'est-à-dire d'établir des relations du type : a même grandeur que, est supérieure à, … Cette comparaison peut être rendue difficile voir fausse si nous nous basons sur des représentations erronées (ex : volume plus important implique masse plus importante).
Type de tâche 2 (T2): Mesurer des grandeurs : les contenances	Techniques τ2 : τ21 Mesurage avec des unités non conventionnelles τ22 Mesurage avec des unités conventionnelles	Technologie θ2 : Une mesure est une manière de désigner des grandeurs à l'aide d'un nombre et d'une unité. Elle résulte de la comparaison d'une grandeur avec une autre choisie comme unité. Pour une même grandeur plusieurs mesures sont possibles en fonction de l'unité.

Fig. 2 : Organisation mathématique proposée en formation

Dans ces défis, par le choix du matériel et des contextes, les tâches de comparaison de contenances proposées sont résolues en utilisant différentes techniques. C'est ce qui permettra de construire les différentes caractéristiques de la grandeur contenance. La majorité des ateliers sont constitués de tâches de comparaison de grandeur car c'est qui pose le plus de difficultés aux enseignants (Frappier-Jego, 2015). Seuls les deux derniers ateliers sont des tâches où l'on doit mesurer des contenances, c'est-à-dire des grandeurs.

Pour mettre en œuvre cette organisation mathématique, le professeur est confronté à un certain nombre de questions, de problèmes professionnels. Quelles techniques utiliser en fonction de la tâche à accomplir ? A-t-il une maitrise suffisante de ces techniques pour les utiliser avec ses élèves ? Quelles technologies justifient et expliquent ses choix ? Sont-elles mathématiquement vraies ? Nous pouvons dire qu'un certain nombre de possibles se présente aux enseignants lorsqu'ils veulent proposer un apprentissage mathématique à leurs élèves. C'est ce que Chevallard (2001) appelle le problème praxéologique du professeur. L'enseignant est amené à proposer une organisation didactique liée à l'organisation mathématique à travailler. Nous allons donc chercher à savoir dans quelle mesure une ressource peut être intégrée par l'enseignant, de manière à produire un développement professionnel qui se traduise notamment par la mise en œuvre d'une organisation mathématique.

CADRE MÉTHODOLOGIQUE

Afin de répondre à notre problématique, nous nous appuyons sur la méthodologie utilisée par Gueudet et Trouche (2010) pour mener à bien leurs travaux sur le travail documentaire des professeurs. Cette méthodologie relève de « l'investigation réflexive ». Elle se caractérise par l'étude de l'activité et du développement professionnel des professeurs en les suivant dans leur travail en classe et hors de la classe. Dans notre étude, nous axons nos observations sur le travail hors classe des enseignants. Pour cela, nous leur demandons de garder trace de toutes les ressources utilisées et produites dans le cadre de la séquence réalisée à partir de celle proposée en formation. Nous les analyserons ensuite avec eux lors d'entretiens.

Pour mettre en œuvre cette méthodologie, nous travaillons avec deux professeurs des écoles de cycle 2 qui ont suivi la formation l'année précédente. L'une est enseignante en CE1-CE2 (auprès d'enfants de 7 et 8 ans). C'est sa première année d'enseignement. Elle a fait une licence de mathématiques avant sa formation initiale de professeur des écoles[4]. L'autre est une enseignante expérimentée qui se dit en difficulté face aux mathématiques. Nous leur proposons de vivre différents temps qui correspondent à certaines étapes du principe de l'investigation réflexive. Notre dispositif de recueil de données est le suivant :

- pour commencer, nous avons proposé un rendez-vous téléphonique aux deux enseignantes. Lors de ces appels, nous leur avons présenté l'ensemble du dispositif ainsi que les objectifs de la recherche. Suite à l'appel, chaque enseignante a reçu par mail un questionnaire de présentation personnelle qu'elle a rempli et qu'elle nous a renvoyé.
- nous avons ensuite rencontré chaque enseignante dans sa classe. En effet, le principe du suivi en tout lieu du travail documentaire nous invite à rencontrer l'enseignant dans l'endroit où se déroule l'essentiel de son travail (Margolinas et al., 2007). Dans le cas des enseignants du premier degré[5], c'est la classe. Cet entretien prend la forme de l' « instruction au sosie ». Cette modalité est introduite dans les années 1970 pour des séminaires de formation ouvrière à Turin (Clot, 1999). Appliquée à notre étude, la question posée est : « Vous partez à l'étranger pendant plusieurs semaines, vacances ou échange scolaire ; un sosie vous remplace, vous devez lui expliquer le pourquoi, la logique de votre séquence, ce à quoi vous tenez, la raison des documents utilisés ». Un certain nombre de questions sont anticipées en amont pour relancer l'entretien si nécessaire, et amener l'enseignant à expliciter les raisons et les conditions de l'introduction des ressources proposées en formation.
- pendant l'entretien, nous demandons aux enseignantes de produire une représentation schématique de leur système de ressources (RSSR) utilisé pour réaliser la séquence proposée aux élèves.

Résultats

L'analyse de nos deux études de cas permettent de dire qu'à l'occasion de l'intégration d'une ressource proposée en formation dans son système documentaire, un enseignant développe des connaissances professionnelles nouvelles au cours de genèses documentaires. Ces connaissances sont source de développement professionnel à deux niveaux : didactique et mathématique.

Concernant l'exploitation de la ressource des défis (annexe), nous avons remarqué qu'elle a permis aux enseignantes de développer des connaissances didactiques et mathématiques. Certaines connaissances sont liées à la mise en œuvre de la séquence, en lien avec l'organisation didactique que doit construire l'enseignant et d'autres connaissances sont liées au contenu mathématique, c'est-à-dire à l'organisation mathématique du savoir.

Pour proposer une organisation mathématique à ses élèves, l'enseignant développe une organisation didactique (Chevallard, 2004 permettant aux élèves d'apprendre. C'est cette organisation didactique qui semble la plus enrichie par la proposition de formation. Les deux enseignantes se questionnent sur la place du temps de synthèse dans l'apprentissage. L'une d'entre elles, l'enseignante débutante, pointe l'importance d'une synthèse construite à partir des découvertes des élèves. Avant la formation, elle proposait aux élèves des traces écrites qu'elle avait construites en amont du temps d'apprentissage (Fig. 3). Après, elle va évoluer vers des traces écrites co-construites avec les élèves (Fig. 4).

[4] Professeur des écoles : enseignants pour les enfants de 2 à 10 ans.

[5] Enseignants du premier degré : c'est un enseignant qui travaille avec des enfants de 2 à 10 ans, c'est-à-dire à l'école maternelle (2 à 5 ans) ou élémentaire (6 à 10 ans).

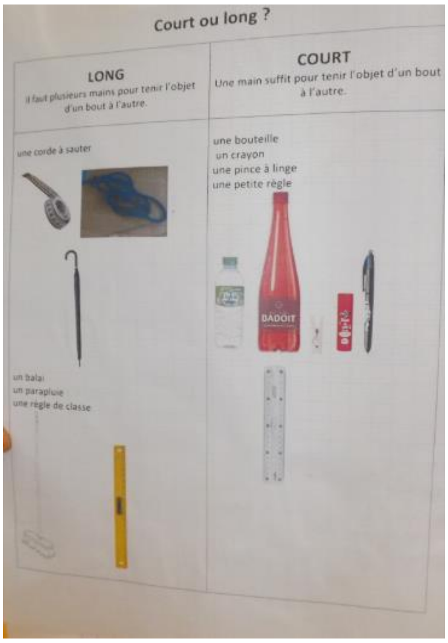


Fig. 3 : Trace écrite préconstruite par le PE

Fig. 4 : Trace écrite construite par l'élève

Toutes les deux également parlent de l'importance de laisser du temps aux élèves pour construire les concepts et principalement celui de grandeurs avant d'aller vers la mesure.

Concernant les connaissances mathématiques, celle qui est avancée par les deux enseignantes concerne la possibilité de travailler la construction du concept de grandeur à partir de plusieurs types de tâches. Ces différentes tâches peuvent être résolues par différentes techniques et justifiées par différentes technologies. Ce point est une connaissance acquise par les deux enseignantes, cela même si les technologies proposées par l'enseignante en difficulté en mathématiques ne sont pas toujours mathématiquement vraies. Elle demande, par exemple, aux élèves de réaliser une tâche de comparaison de longueurs (comparer trois crayons de longueur assez proche ne pouvant être déplacés). Elle souhaite qu'ils utilisent la technique de comparaison indirecte mais va valider une technique de mesurage avec unités non conventionnelles comme répondant à ses contraintes (Fig. 5).

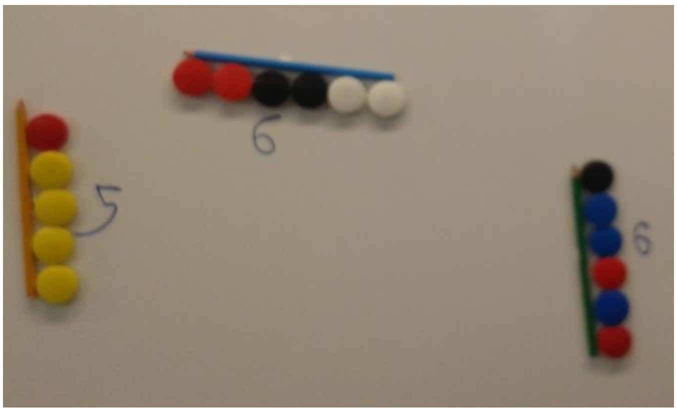


Fig. 5 : Les aimants du tableau utilisés comme étalon

Nous pouvons dire que notre proposition faite en formation ne permet pas à l'enseignante, en difficulté face aux mathématiques, d'effectuer le transfert nécessaire pour appliquer des techniques ou des technologies valides quand il s'agit de grandeurs autres que celle proposée en formation, dans notre cas pour les grandeurs autres que la contenance. Il faudrait étendre notre étude à d'autres études de cas pour savoir si nous pouvons affirmer un lien entre cette difficulté de transfert et les capacités mathématiques des enseignants et chercher des pistes d'action face à cet éventuel constat.

CONCLUSION

Nous avons montré que les enseignants, par un phénomène d'instrumentation et d'instrumentalisation, ont développé un certain nombre de connaissances professionnelles. Celles qui ont émergé de notre analyse sont les suivantes :

- l'importance de prendre le temps de construire la grandeur indépendamment de la mesure ;
- la possibilité de proposer différentes sortes de tâches (comparaison directe ou indirecte de différentes grandeurs) pour construire la grandeur ;
- la nécessité de proposer une synthèse des découvertes des élèves. Cette synthèse est pour l'instant le reflet des apprentissages visés par l'enseignant et non réellement celui des découvertes faites par les élèves. L'enseignante précise la nécessité d'aller vers une synthèse construite avec les élèves.

Concernant la construction de nouvelles connaissances mathématiques, nous avons remarqué que cette formation n'a pas permis, à l'enseignante qui se dit en difficulté face aux mathématiques, l'acquisition de nouvelles connaissances mathématiques en lien avec la construction des caractéristiques des grandeurs autres que celle étudiée. La jeune enseignante, elle, en croisant son guide du maître du manuel Cap Maths, éditions Hatier, avec la ressource proposée en formation a construit d'autres défis permettant aux élèves de déconstruire de fausses représentations de la grandeur masse. Elle a donc opéré un transfert de ce type de tâches dans d'autres grandeurs. Nous pouvons nous questionner pour savoir si cette ressource, proposée en formation, croisée avec un guide du maître amènerait également l'enseignante qui se dit en difficulté en mathématiques, à développer de nouvelles connaissances mathématiques. Nous notons que la ressource proposée en formation, utilisée seule, ne suffit pas forcément à construire de nouvelles connaissances mathématiques. En proposant cette formation, nous avions pourtant l'objectif d'enrichir les connaissances mathématiques des enseignants. Alors que l'enseignante qui a des compétences mathématiques tire profit du dispositif de formation, celle qui est en difficulté dans ce domaine ne parvient pas à transférer la proposition à d'autres grandeurs. Pour remédier à ce constat et poursuivre nos travaux, nous pouvons nous questionner sur la pertinence de la proposition d'une ingénierie didactique coopérative (Clivaz, 2015) où ensemble, chercheurs et enseignants, pourraient construire et questionner une ressource permettant à des élèves de construire le concept de grandeur.

BIBLIOGRAPHIE

Adler, J. (2000). Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(3), 205-224.

Besnier, S. (2016). *Le travail documentaire des professeurs à l'épreuve des ressources technologiques : le cas de l'enseignement du nombre à l'école maternelle*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de doctorat, Université de Paris 7.

Chevallard, Y. (2001). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (eds.), *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématiques* (pp.3-32). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In J.-L. Hennequin (Ed.), *Actes de la 3e Université d'été* Animath.

Clot, Y. (1999). *La fonction psychologique du travail.* Paris : Presse universitaire.

Clivaz, S. (2015). Les Lesson Study : Des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Revue des HEP et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin, 19*, 99-105.

Day, C. (1999). *Developing teachers. The challenges of lifelong learning.* Londres: Falmer Press.

Fessler, R., & Christensen, J. (dir.) (1992). *Teacher career cycle: Understanding and guiding the professional development of teachers.* Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

Frappier-Jego, C. (2015). *La transposition didactique interne : Des programmes à la classe dans le domaine « grandeurs et mesure ».* Mémoire de Master 1, Université de Bretagne Occidentale.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. *Éducation et didactique*, *2*(3), 7-33.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques. In I. Bloch, F. Conne, F. Chellougui, G. Gueudet, M. Hersant, & E. Roditi (dir.), *Cours de la XIVème École d'été de didactique des mathématiques, Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques*. (pp. 109-133). Grenoble : La pensée sauvage.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. Dans G. Gueudet & L. Trouche (dir.), *Ressources vives, Le travail documentaire des professeurs de mathématiques*. (pp.57-74). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.

Guin, D., & Trouche, L., (dir.) (2002). *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument de travail mathématiques, un problème didactique.* Grenoble : La pensée sauvage.

Kagan, D.-M. (1992). Professional growth among preservice and beginning teacher. *Review of Educational Research, 62*, 129-169.

Lefeuvre, G., Garcia, A., & Namolovan, L. (2009). Les indicateurs de développement professionnel. *Questions vives. Recherches en éducation*, 5(11), 277-314.

Margolinas, C., Canivenc, B., de Redon, M.-C., Rivière, O., & Wozniak, F. (2007). Que nous apprend le travail mathématique hors classe des professeurs pour la formation des maitres ? In COPIRELEM (dir.), *Actes du 31ème colloque sur la formation des maitres, Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maitres ?* (pp. 1-19). Toulouse : IREM de Toulouse.

Ministère de l'Éducation Nationale. (2002). *Documents d'application des programmes. Mathématiques cycle 2.* Ecole primaire. Paris : SCEREN.

Ministère de l'Éducation Nationale. (2015). Programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège. In *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*. Paris.

Moreira, M.J. (1996). Approaches to teacher professional development: A critical appraisal. *European Journal of Teacher Education, 19*(1), 47-63.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains. Paris* : Armand Colin.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. In R. Noirfalise & M.-J. Perrin (dir.), *École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 174-185). Clermont-Ferrand : IREM (Université Clermont-Ferrand 2).

Annexe

Les défis proposés en formation

Atelier 1 : Entourez le récipient qui peut contenir le plus d'eau.

Notre réponse : Comment avez-vous fait ?

Atelier 2 : Entourez le verre qui contient le plus d'eau.

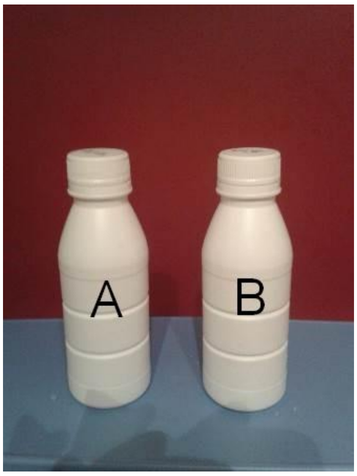
Notre réponse : Comment avez-vous fait ?

Atelier 3 : Entourez le récipient qui peut contenir le plus d'eau.

Notre réponse : Comment avez-vous fait ?

Atelier 4 : Entourez ci-dessous la bouteille qui contient le plus d'eau bleutée

Notre réponse : Comment avez-vous fait ?



Atelier 5 : Entourez la bouteille qui contient le plus d'eau.

Contraintes : Les bouteilles sont pleines d'eau.

Les élèves n'ont qu'une bouteille d'eau de 1,5 l à disposition.

Notre réponse : Comment avez-vous fait ?

Atelier 6 : Entourez ci-dessous le récipient qui peut contenir le plus d'eau.

Contraintes : les deux objets à comparer ne peuvent être rapprochés.

Les élèves n'ont que le petit flacon blanc à disposition.

Notre réponse : Comment avez-vous fait ?

Atelier 7 : Combien faut-il d'étalons pour remplir la bouteille ?

Contraintes : Certains groupes d'élèves ont le flacon blanc, d'autres le bouchon

Notre réponse : Comment avez-vous fait ?

MON VELO A-T-IL 27 VITESSES ?

Jean-Luc Dorier[1]

Université de Genève

INTRODUCTION

On trouve facilement de nos jours à un prix abordable un vélo de route vendu comme ayant 27 vitesses, ce qui correspond à 3 plateaux et 9 pignons. Les plateaux sont les roues crantées solidaires du pédalier et les pignons (dont l'ensemble constitue la *cassette*) sont les roues crantées solidaires de la roue arrière.

Fig.1 : Système de transmission d'un vélo

Mais que signifie réellement avoir 27 vitesses ? Les écarts de l'une à l'autre sont-ils toujours identiques ? Peut-on les passer une à une de la plus petite à la plus grande sans difficulté ?

Quiconque a fait du vélo a pu se rendre compte que plus on est sur un grand plateau et un petit pignon, plus il faut forcer pour avancer, mais aussi qu'on avance plus avec un seul coup de pédale. A l'inverse quand ça monte, on passe sur des pignons plus grands pour moins forcer, mais on doit plus pédaler pour avancer. Quand on est arrivé sur le plus grand pignon, on peut passer sur un plateau plus petit, mais alors l'écart est plus important que lors d'un changement de pignon. Et si l'on revient sur le pignon le plus petit, on va plus forcer…

L'objet de cet article est de mieux comprendre comment fonctionnent les vitesses sur un vélo à l'aide de quelques outils mathématiques accessibles surtout au niveau du cycle mais que l'on peut envisager dès la fin du primaire : essentiellement les fractions, les proportions et le périmètre du cercle.

BRAQUETS ET DÉVELOPPEMENT

Le principe de base du vélo est que le mouvement produit par le cycliste en appuyant sur les pédales fait tourner le pédalier qui entraine grâce à la chaine la rotation de la roue arrière, qui fait avancer le vélo.

[1] Cette recherche s'est effectuée dans le cadre du projet fiancé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique–FNS (Subside no 100019_173105 / 1) : « La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes. »

Fig.2 : Le grand bi, ancêtre du vélo

L'ancêtre du vélo, que l'on appelle le *grand bi,* a un fonctionnement plus rudimentaire puisque la rotation de la roue avant se fait directement par l'intermédiaire du pédalier. Ainsi un tour de pédale correspond à un tour de roue. Et donc la distance parcourue en un tour de pédale est égale au périmètre de la roue. C'est pour cette raison que le grand bi a une très grande roue avant !

Avec un vélo moderne, le système de plateaux et de pignons reliés par une chaine permet de moduler le nombre de tours que fait la roue arrière pour un tour de pédale. La question essentielle est donc de déterminer ce nombre (non forcément entier) en fonction de la taille du plateau et du pignon utilisés.

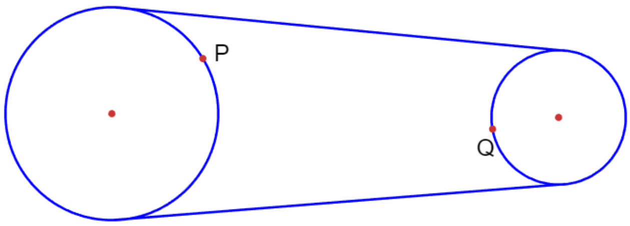


Fig.3 : Schéma de transmission par la chaine

Sur le schéma ci-dessus le grand cercle correspond à un plateau de diamètre D et le petit à un pignon de diamètre d. Grâce à la chaine, la rotation du plateau entraine la rotation du pignon et donc de la roue arrière, de telle sorte que tout point P d'un plateau parcourt la même distance que tout point Q d'un pignon. En un tour de pédale ces deux points parcourent donc une distance égale au périmètre du plateau soit πD. Or un tour de pignon vaut πd donc le point Q fait $\frac{\pi D}{\pi d} = \frac{D}{d}$ tours. Autrement dit pour un tour de pédale (donc de plateau), le pignon, et donc la roue arrière, fait (D/d) tours.

Par exemple si le plateau a un diamètre double de celui du pignon (comme sur le dessin), le pignon fait deux tours pendant que le plateau en fait un. Autrement dit dans ce cas, en un tour de pédale le vélo avance de deux fois la longueur de la circonférence de la roue arrière.

Ici il est important de noter que le rapport des diamètres est égal au rapport des périmètres. C'est une conséquence de la proportionnalité du périmètre et du diamètre du cercle. Si on appelle ∂_r le diamètre de la roue arrière, en un tour de roue le vélo avance du périmètre de la roue soit $\pi\partial_r$ et donc en un tour de pédale, le vélo parcourt $(D/d)\pi\partial_r$. On retrouve ici le résultat que tous ceux qui ont utilisé un vélo à vitesses ont ressenti et que nous rappelions plus haut : plus le plateau (D) est grand ou plus le pignon (d) est petit, plus on avance en un tour de pédale – ce qui coûte cependant plus d'effort.

En pratique, les constructeurs ne donnent pas les diamètres des pignons ou des plateaux mais le nombre de dents. En effet, pour que la chaine fonctionne toutes les dents de tous les pignons et de tous les plateaux d'un même vélo doivent avoir la même largeur et le même espacement. Ainsi le nombre de dents est proportionnel au périmètre et donc aussi au diamètre d'un pignon ou d'un plateau. Donc le rapport (D/d) est aussi égal au rapport des nombres de dents du plateau et du pignon, c'est ce qu'on appelle le *braquet*.

La longueur de la circonférence de la roue arrière est donnée dans les références des pneus.

Le produit du braquet par la longueur de cette circonférence correspond à la distance parcourue par le vélo en un tour de pédale et s'appelle *développement*.

$$\textbf{\textit{Braquet}} = \frac{\text{Nombre de dents du plateau}}{\text{Nombre de dents du pignon}} = \frac{\text{Diamètre du plateau}}{\text{Diamètre du pignon}}$$

$$\textbf{\textit{Développement}} = \text{Braquet} \times (\text{Circonférence de la roue arrière})$$

La vérité sur le vélo à 27 vitesses

Nous allons maintenant pouvoir répondre aux questions posées en début d'article concernant notre vélo à 27 vitesses. En épluchant la notice du magasin, on peut voir que les 3 plateaux de ce vélo ont respectivement 50, 39 et 30 dents et une cassette 12/25 avec 9 pignons de respectivement 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23 et 25 dents. Cela nous permet de faire un tableau donnant les différents braquets arrondis au centième.

	12	**13**	**14**	**15**	**17**	**19**	**21**	**23**	**25**
50	4.17	3.85	3.57	3.33	2.94	2.63	2.38	2.17	2.00
39	3.25	3.00	2.79	2.60	2.29	2.05	1.86	1.70	1.56
30	2.50	2.31	2.14	2.00	1.76	1.58	1.43	1.30	1.20

Fig. 4 : Tableau des braquets en fonction du nombre de dents des plateaux et des pignons

Si maintenant on ordonne tous ces braquets et qu'on les multiplie par la circonférence de 2.146 m qui correspond à la longueur de la circonférence de la roue d'un vélo adulte de taille L, on obtient le tableau suivant :

Braquet	1.2	1.3	1.43	1.56	1.58	1.7	1.76	1.86	2	2	2.05	2.14	2.17	2.29
Développement	2.58	2.79	3.07	3.35	3.39	3.65	3.78	3.99	4.29	4.29	4.4	4.59	4.66	4.91

Braquet	2.31	2.38	2.5	2.6	2.63	2.79	2.94	3	3.25	3.33	3.57	3.85	4.17
Développement	4.96	5.11	5.37	5.58	5.64	5.99	6.31	6.44	6.97	7.15	7.66	8.26	8.95

Fig. 5 : Braquets et développements (en mètres) arrondis au centième
ordonnés par ordre croissant

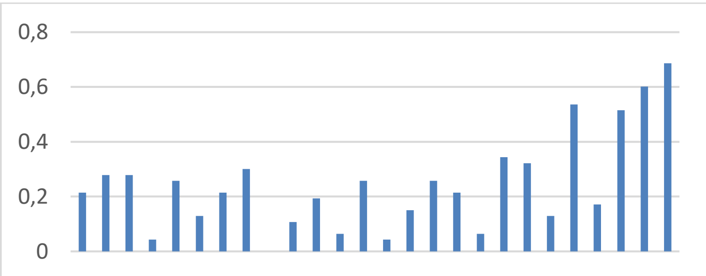


Fig. 6 : Graphique des écarts entre deux développements successifs en mètres

On voit donc que les écarts entre les braquets ou les développements ne sont pas réguliers et varient de 0 à 69 cm pour les développements. Seuls deux développements (ou braquets) sont identiques, mais si on considère qu'un écart de moins de 20 cm entre deux développements n'est pas significatif, on voit qu'il ne reste plus que 15 des 27 vitesses qui soient significativement différentes. Finalement ce qui importe le plus c'est le plus petit et le plus grand des développements, ici 2.58m et 8.95m.

Examinons maintenant la possibilité d'effectivement utiliser toutes les vitesses. Dans le tableau de la Fig. 4, si vous suivez le chemin qui vous mène du plus grand au plus petit braquet vous verrez que pour pouvoir passer une à une toutes les vitesses par ordre croissant de braquet il faudrait commencer par le plus grand plateau en augmentant du plus petit jusqu'au 4^e pignon, puis passer au 2^e plateau du premier et deuxième pignons, puis revenir au premier plateau 5^e pignon, etc.. Le tableau ci-dessous donne cet ordre (attention il y a deux fois le numéro 18 car deux braquets sont identiques).

	12	***13***	***14***	***15***	***17***	***19***	***21***	***23***	***25***
50	1	2	3	4	7	9	12	15	18
39	5	6	8	10	14	17	19	21	23
30	11	13	16	18	20	22	24	25	26

Fig. 7 : Ordre croissant des braquets

On voit bien que ce cheminement n'est techniquement pas possible. De fait, plus on a de plateaux, plus le passage progressif des vitesses est problématique. Avec un seul plateau, le passage progressif est possible, il suffit de passer d'un pignon à l'autre. Mais pouvoir jouer sur la taille des plateaux et sur la taille des pignons est le meilleur moyen d'avoir une bonne amplitude de développements possibles. Avec un seul plateau il faut une cassette comprenant de nombreux pignons avec des écarts importants.

RETOMBÉES DIDACTIQUES

Dans la formule donnant le périmètre du cercle on s'appesantit souvent sur l'introduction du nombre π. Mais la formule $P = \pi D$ est avant tout importante parce qu'elle marque la proportionnalité de deux grandeurs liées au cercle : son périmètre et son diamètre.

De fait, on peut introduire cette question de la proportionnalité en amenant en classe par exemple deux cerceaux de diamètres doubles l'un de l'autre. Avec un peu d'adhésif de couleur, on peut alors facilement montrer qu'un point sur le plus grand parcourt une distance double d'un point sur le plus petit quand chacun des cerceaux fait un tour complet. C'est une vérification expérimentale de la proportionnalité du périmètre et du diamètre et π n'est rien d'autre que le nom qu'on donne à ce rapport de proportionnalité. Avec les cerceaux, on peut en calculer ainsi une valeur approchée et c'est aussi un bon problème d'introduction pour déboucher sur le vélo et les vitesses.

L'intérêt est ici de mettre en œuvre des outils mathématiques pour traiter d'un problème pratique qui devrait être familier à beaucoup d'élèves. On peut aisément construire une séquence didactique sur la base de cet article.

POST-SCRIPTUM

Pour celles et ceux qui voudraient aller plus loin sur le cercle, une question que peu de gens se posent mais qui mérite qu'on s'y arrête est de savoir pourquoi on retrouve le π introduit plus haut comme rapport de proportionnalité entre le diamètre et le périmètre du cercle également dans la formule de l'aire, comme rapport de proportionnalité entre le carré du rayon et l'aire du disque. En effet cela n'a rien d'évident *a priori*.

Une jolie « démonstration visuelle » de ce résultat consiste à découper un disque en tranches comme on le montre dans la figure ci-dessous.

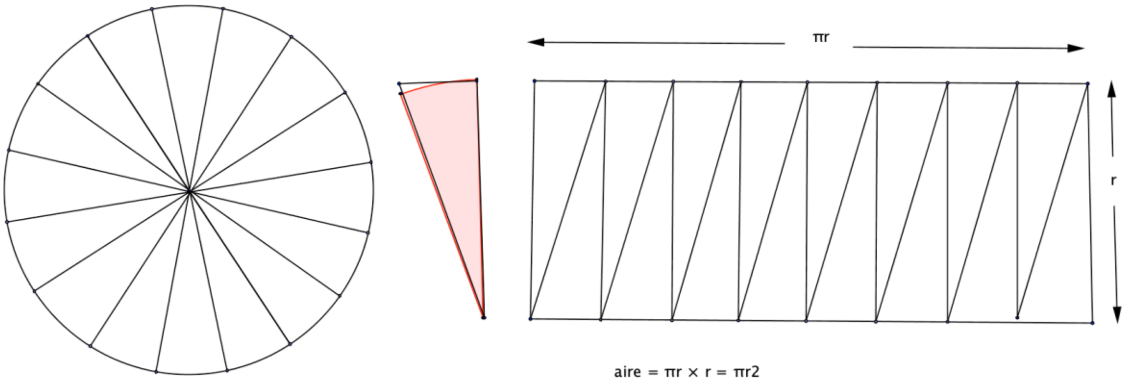


Fig. 8 : L'aire d'un disque est presque celle d'un rectangle

Ensuite on remplace chaque tranche par un triangle rectangle d'aire très proche (voir ci-dessus). On met alors ces triangles deux par deux tête-bêche les uns à la suite des autres, de sorte à constituer un rectangle dont la largeur est le rayon du disque et la longueur tend vers le demi-périmètre quand le découpage tend vers une infinité de parts. Comme dans ce cas l'aire du rectangle tend vers celle du disque on montre que à la limite :

$$(\text{aire du disque}) = (\text{demi-périmètre}) \times (\text{rayon}) = \pi r \times r = \pi r^2.$$

On voit ainsi que le facteur π apparaît bien aussi dans la formule de l'aire.

LEÇONS DE LA CLASSE DE MATHEMATIQUES

Jérôme Proulx

Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique, Université du Québec à Montréal

En tant que didacticien des mathématiques, je suis amené par mes travaux de recherche à être en classe et à travailler avec des élèves du primaire, du secondaire ainsi que de l'université. Dans ces visites et travaux, les élèves m'offrent souvent ce que j'appelle des « perles mathématiques », à travers divers raisonnements, erreurs, questions, stratégies et solutions. C'est à partir de ces productions mathématiques que je propose de tirer des réflexions, voire quelques leçons, autant mathématiques que didactiques, dans le but de comprendre ce que les élèves parfois nous enseignent par leurs activités mathématiques…

LES TABLES DE MULTIPLICATION

Les tables de multiplication ont toujours joué un rôle important dans l'enseignement des mathématiques, et ce, à tous les niveaux scolaires. Dans cette leçon, j'offre une réflexion sur celles-ci à partir d'événements de classe, voire d'anecdotes, dans l'intention de soulever des questionnements et de sensibiliser à certains enjeux concernant leur utilisation par les élèves.

Ma première anecdote s'est produite dans une classe de 5^{e} année du primaire (10-11 ans), alors que le problème suivant (issu d'un examen ministériel de 2012 pour le 3^{e} cycle du primaire) était à résoudre :

> Si l'aire d'un rectangle est de 32 cm^2, quel est son périmètre si un côté mesure le double de l'autre côté ?

Lors de la résolution de ce problème, une majorité d'élèves ont rapidement dessiné dans leur cahier un rectangle de 8x4. Surpris, curieux, j'étais toutefois très impressionné par cette rapidité d'exécution des élèves. Autant des essais infructueux avec d'autres nombres étaient peu présents (3x6, 8x10, etc.), autant d'autres rectangles de même famille d'aire de 32cm^2 n'étaient pas proposés (rectangles de 32x1, 16x2, ou encore des nombres décimaux : 5x6,4 par exemple).

Alors que les élèves partageaient leurs solutions pour résoudre le problème en entier, je les questionnais afin de savoir comment ils avaient trouvé 8 et 4 comme mesures de côtés du rectangle. Je recevais majoritairement un « silence radio », où aucun élève n'était capable de me donner la provenance de ce résultat, sinon une expression de surprise suivie par une explication d'évidence telle que « c'est parce que ça marche ! ». Bien que ceci leur semblait évident, pour ma part je ne comprenais pas plus d'où cette réponse leur était venue. Tout ça jusqu'à ce qu'une élève, Marie, vienne au tableau pour offrir sa solution et réponde très clairement à ma question :

Jérôme : Et comment tu es arrivée à penser à 8 et 4 ?

Marie : Au début, je me suis dit, j'ai compté sur mes doigts, je savais qu'il y avait un chiffre dans ma table de 4 qui va me donner 32. Donc, j'ai fait [comptant sur ses doigts, chacun des doigts représentant un bond de 4] 1,2,3,4 et 5,6,7,8 et 9,10,11,12 et 13,14,15,16 et jusqu'à temps que ça finalement tombe sur mon doigt 8 et que ça fasse 32. Donc ça faisait 8 fois 4.

Alors que Marie continuait sur sa résolution du problème – en établissant la relation 1 pour 2 entre 4 et 8 – j'étais intrigué par son commentaire sur sa table de multiplication. Il est évident que Marie connait bien ses tables de multiplication. Cela dit, il semble y avoir quelque chose de différent dans la stratégie de Marie, soit quelque chose que je n'avais personnellement jamais encore rencontré. Marie semblait connaître les résultats des tables de multiplication par cœur, mais surtout savoir dans « quelle » table, ici celle des 4, le nombre recherché pouvait se retrouver.

Essayons sa stratégie avec un autre exemple : Je cherche ce qui me donne 49. Je sais que la table des 7 possède un 49 alors je cherche, comme Marie l'a fait, combien de fois le 7 me donnera 49, et ce processus me donnera l'autre facteur de la multiplication. Bien contrôlé, le tout donne le bon résultat. Mais, si Marie était tombée, par inadvertance, sur son septième doigt, alors elle aurait obtenu 7 fois 4 vaut 32 et sa résolution du problème aurait été tout autre…

D'un certain point de vue, la façon de faire de Marie représente un autre niveau d'apprentissage par cœur des tables qui n'est pas nécessairement relié à une idée d'efficacité : Marie a pris beaucoup de temps à se rendre à son 8e doigt par bonds de quatre. Et, plusieurs autres élèves avaient aussi la même stratégie que Marie pour établir que le 8 et le 4 se multiplient ensemble pour trouver 32 : pour eux, tout simplement, le nombre 32 « appartient » à la table de 4…

Ce type de par cœur ne me semblait pas aligné avec les raisons alléguées habituellement pour faire apprendre les tables de multiplication : aisance de calcul, rapidité d'exécution, alléger la lourdeur des autres calculs nécessaires, être flexible pour passer d'une multiplication à une autre, avoir des repères numériques pour permettre de faire d'autres calculs plus aisément, etc. Rien de tout cela n'était apparemment présent dans la façon de faire de Marie. J'étais autant surpris que perplexe, me demandant : « Et si l'aire du rectangle avait été de 30 cm^2, qu'auraient-ils fait ? La table des 3 ? Et pour 38 cm^2 ? Auraient-ils été bloqués ? Auraient-ils pu faire autre chose ? »

Mes questionnements ont reçu une réponse des plus claires la semaine suivante, avec les mêmes élèves de 5e, alors que nous nous sommes retrouvés à diviser 30 sandwichs en 4 paquets. J'avais alors complètement oublié cette première anecdote avec Marie et la table des 4. Pour diviser les 30 sandwichs en 4, quatre cercles avaient été dessinés au tableau par une élève (voir Fig. 1) et dans un premier temps 15 avait été proposé pour chacun des cercles.

Fig. 1 : Proposition initiale dessinée au tableau pour partager 30 sandwichs en 4 paquets

D'autres élèves ont par la suite affirmé que c'était trop, que tout ceci donnait au total 60 sandwichs. Par contre, lorsque je leur demandais quel nombre devait alors se retrouver dans chacun des cercles-paquets, ils n'avaient pas de réponse. Plusieurs demeuraient bloqués, voire hésitants. Marie a alors proposé de donner plutôt 15 à deux paquets et 15 aux deux autres paquets. Ceci l'a menée par la suite à dire que 7,5 se retrouverait dans chacun des paquets. Voici ce qui était dessiné au tableau (Fig. 2) :

Fig. 2 : Deuxième proposition dessinée au tableau pour partager 30 sandwichs en 4 paquets

Avec ce dessin en gros plan au tableau, certains élèves semblaient assez en accord avec le résultat proposé par Marie et hochaient la tête, alors que d'autres semblaient se questionner profondément. Soudainement, Marco a levé la main en me disant que tout ça n'était pas bon.

Jérôme : Donc, les quatre, tout ça vaut 30 sandwichs.

Marco : Non.

Jérôme : Ce n'est pas ça ? Ok, alors vas-y, pourquoi tu dis non ?

Marco : Bien parce que, il n'y a rien dans les tables qui égale 30 avec 4.

La réponse de Marco en dit beaucoup. Les inquiétudes que j'avais se sont avérées fondées : Marco a eu un blocage face à un nombre absent de ses tables de multiplication. Le 30 étant dans la table de 3, il ne pouvait fonctionner.

Ces deux anecdotes offrent matière à réflexion sur l'apprentissage des tables de multiplication. Autant elles permettent de réfléchir au niveau de par cœur exprimé par Marie, qui apprend les résultats des multiplications et les associe à une partie de la table, autant le blocage de Marco fait réfléchir aux limites de cette demande de par cœur. Marco souligne que ce n'est pas uniquement la recherche du nombre (de la réponse) dans les tables qui oriente son travail de multiplication. C'est aussi ce qui le bloque, car si le nombre ne se retrouve pas dans les tables de multiplication, alors il n'y a pas de multiplication possible. Cette approche des tables fait en sorte que la multiplication *devient* les tables de multiplication : savoir multiplier revient à connaître ses tables.

Mais il y a plus, car les élèves en viennent à concevoir que les seules multiplications qui existent sont celles présentes dans les tables de multiplication. Ceci mène à se questionner sur l'utilité, l'importance et l'impact du travail des tables à l'école, sur *la perception mathématique* des élèves, sur leur rapport au savoir. Tout comme la division ne se réduit pas à son algorithme de division, la multiplication ne se réduit pas aux tables ! Savoir multiplier fait aussi intervenir des notions telles que : les relations entre les nombres (8x2=16 montre que 16 est 2 fois plus grand que 8), le travail d'ordre de grandeur et d'estimation (1462x4 donne autour de 6000, car 1462 est proche de 1500 et 6000 est quatre fois plus grand), les propriétés de commutativité (3x6=6x3), les conservations de transformations (7x6=42, et si je double mon 7 ma réponse sera doublée, ou conservée si mon 6 est aussi divisé par 2), l'établissement d'équivalences (9x12=3x36), et la liste continue.

Personne n'est surpris qu'une demande soit faite aux élèves d'apprendre leurs tables de multiplication par cœur. L'effet que ceci peut avoir sur certains élèves est peut-être moins connu. Ces deux anecdotes mènent à des réflexions importantes. Comme Marie et Marco, certains élèves ne se contentent pas de mémoriser les multiplications pour arriver à « maîtriser », « contrôler » ou « savoir » leurs tables : ils apprennent autre chose… et cette chose n'est pas nécessairement porteuse de compréhension. Ce que Marco et Marie nous enseignent est que cette demande d'apprendre les tables de multiplication peut avoir des conséquences importantes sur les compréhensions mathématiques des élèves, des conséquences parfois éloignées des intentions initiales que nous avons lorsque nous leur présentons les tables de multiplication.

Quelle belle leçon ! Merci Marie. Merci Marco.

Note

Je ne peux m'empêcher, dans toutes ces réflexions sur l'apprentissage des tables de multiplication, d'offrir ici le dialogue fictif extrait d'un article de Chevallard (2012, p. 10) touchant cette dimension. En particulier, ce dialogue semble soulever la différence entre savoir ses tables de multiplication et savoir multiplier, tel que discuté dans cette leçon. Ce dialogue se fait entre β un interviewer et ξ un interviewé :

β : 7 fois 9 ?

ξ : 7 fois 9 ? Mince, ça je ne sais plus ! Eh bien 7 fois 10, c'est 70…

β : Non, non ! Répondez tout de suite !

ξ : Permettez… Donc 7 fois 9, cela fait 70 moins 7, soit 63.

β : C'est ça ?

ξ : Ou encore c'est 7 fois 3 fois 3 (parce que 3 fois 3, 9), c'est-à-dire 21 fois 3, ce qui fait 63. Ou bien, puisque je crois me rappeler que 7 fois 8, c'est 56, 7 fois 9 c'est 56 plus 7, c'est-à-dire 56 plus 6, 62, plus un, 63. Ou aussi, c'est égal encore à $(8 - 1)(8 + 1)$, soit $8^2 - 1$ (vous vous souvenez, , « l'identité remarquable »…), ou 64 moins 1, donc 63. Ou… Bon. C'est aussi 9 fois 9, soit 81, moins deux fois 9, soit 18, c'est donc 81 moins 20 plus 2, soit 61 plus 2, donc 63. Oui, voilà ma réponse : 63. Enfin je crois !

β : C'est bien ça !

ξ : Mais vous, comment le savez-vous ?

β : Je le sais ; 7 fois 9, 63.

ξ : En êtes-vous sûr ? Est-ce que vous ne confondez pas, comme l'ont fait certains de vos interlocuteurs ? Est-ce que nous ne sommes pas en train de nous tromper tous les deux ? Quand j'étais enfant, j'aimais bien compter en base 3.

β : ?

ξ : Voyons, recomptons en base 3, mon cher ! En base 3, le nombre 7 s'écrit… 21 et 9 s'écrit… 100. Leur produit vaut donc 2100, c'est-à-dire $0 + 0 + 3^2 + 2x3^3$, soit 9 plus deux fois 27, ou 9 plus 54, soit donc… 63. On n'en sort pas !

β : Dites donc, vous en mettez du temps !

ξ : C'est mieux que de se tromper, non ?

β : Ce n'est pas faux…

ξ : Les mathématiques, mon cher, cela mérite un peu de respect ; et les gens, pareil.

β : Que voulez-vous dire ?

ξ : Eh bien, les gens, cela mérite un peu de respect. En particulier dans leurs rapports avec les mathématiques. Vous ne croyez pas ?

β : Peut-être…

BIBLIOGRAPHIE

Chevallard, Y. (2012). Des programmes, oui. Mais pour quoi faire? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. In *Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège* (Vol. 1). Repéré à : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_CNEM_-_13-03-2012.pdf

DEVELOPPER LA SYMBOLISATION ALGEBRIQUE A TRAVERS LE PROCESSUS DE GENERALISATION

Said Abouhanifa

Equipe de recherche du développement de la pensée mathématique (ERDPM)

Centre régional des métiers de l'éducation et de la formation

Casablanca-Settat, Maroc

INTRODUCTION

L'enseignement de l'introduction à l'algèbre est considéré comme un problème de la profession, au sens de Chevallard (2006). Une des raisons pour l'étudier est de mettre l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans l'usage du langage littéral (Squalli, Mary & Marchand, 2011). Une possibilité retenue par Larguier (2015) consiste à proposer aux élèves des activités de généralisation comme porte d'entrée vers l'algèbre. En effet, d'un point de vue historique, la généralisation constitue une des pierres angulaires de l'algèbre et elle joue un rôle important aussi en arithmétique (Mason, 1996) : les activités de généralisation constituent un potentiel pour développer la pensée algébrique dans la mesure où la généralité nécessite l'usage d'une indéterminée.

Les différents résultats de nos travaux (Abouhanifa et al., 2018) montrent qu'au collège les élèves ont des difficultés à mobiliser les outils algébriques dans les problèmes. En particulier, ils ont du mal à introduire une lettre ou un symbole dans la résolution d'un problème si on ne les leur désigne pas. Cependant les conceptions des enseignants sur l'algèbre et le raisonnement algébrique restent souvent attachées au symbolisme algébrique formel s'appuyant sur les symboles alphanumériques (Abouhanifa et al, 2019).

L'objectif de cet article consiste à analyser une activité de généralisation afin d'identifier et classifier les raisonnements et les symbolisations produites par des élèves. Ainsi cette activité pourrait être exploitée pour favoriser des progressions dans les processus de raisonnement et de symbolisation.

LES CATÉGORIES DE GÉNÉRALISATION

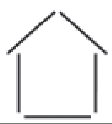
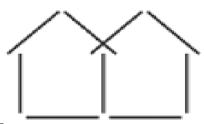
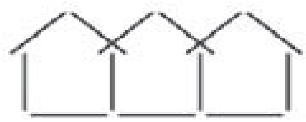
L'activité de généralisation est considérée par Mason (1996) et Radford (2008) comme une occasion propice d'identifier et d'exprimer des régularités dans un raisonnement. Pour amener l'élève à construire une pensée algébrique, ce dernier doit observer des régularités issues de situations diverses et représentées de différentes façons. Notons que Dörfler (1991) distingue deux catégories de généralisation : empirique et théorique. La généralisation empirique s'apparente à la généralisation inductive de Piaget et Henriques (1978). Les élèves expriment le plus souvent leur raisonnement à l'aide de calculs, de phrases, d'annotations sur le dessin ou à l'aide d'un substitut symbolique pour identifier le nombre inconnu. L'indéterminée peut être symbolisée par un substitut symbolique, mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître. La généralisation théorique, quant à elle, se réfère à un système d'actions dans lequel des invariants essentiels sont identifiés et remplacés par des prototypes. La généralité est construite à travers l'abstraction des invariants essentiels. Les qualités abstraites sont des relations entre les objets, plutôt que d'être elles-mêmes des objets et elles sont adaptées aux situations de généralisations algébriques. Cette généralité consiste à se détacher de la situation de départ, pour proposer une écriture correcte sur le plan mathématique. Dans ce cas, la formulation symbolique de la généralisation ne comporte plus aucune trace permettant de relier les symboles à leurs signifiants.

Dans cet article, nous nous intéressons aux types de généralisation auxquels recourent les élèves confrontés à une suite arithmétique illustrée par des suites de maisons, et ceci en fonction de leur niveau scolaire et de leur introduction au symbolisme algébrique.

Pratique de développement d'une généralisation basée sur les patterns figuratifs

L'activité se déroule de la façon suivante : les élèves disposent d'un dessin pour visualiser et dénombrer quelques premiers termes de la suite. Mais pour un cas lointain, le terme de la suite ne peut plus être dessiné et les élèves doivent identifier des régularités pour l'exprimer. Il leur est ensuite demandé de proposer une expression de n'importe quel terme de la suite de maisons.

Ahmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtonnets, comme montré par le schéma suivant :

			…
Figure 1	Figure 2	Figure 3	…

Dans la figure 1 on compte 5 bâtonnets, la figure 2 comporte 9 bâtonnets, la figure 3, 13 bâtonnets…

Combien de bâtonnets y a-t-il dans la figure 10 ?

Combien de bâtonnets y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.

Expliquez à l'un de vos collègues, avec vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtonnets d'une figure d'un numéro quelconque de cette suite de maisons.

Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtonnets d'une figure de n'importe quel numéro.

Fig. 1 : Version 1 de l'activité proposée

Dans cette version 1 de l'activité (proposée à 7 classes), l'élève dispose au départ d'une représentation visuelle des 3 premiers termes de la suite (dans chaque figure, la variable indépendante est le nombre de maisons ou le numéro de la figure et la variable dépendante est le nombre de bâtonnets). Aux élèves de 6 autres classes, nous avons fait le choix de ne pas présenter les premiers termes successifs de la suite, car nous supposions que cela poussait les élèves à ne s'intéresser qu'aux écarts entre deux termes successifs, mais celui de présenter les figures non successives numéro 1, 3 et 6.

Au terme de l'année scolaire, l'activité[1] a donc été soumise à un total de 390 élèves de 13 classes de différents établissements, issus de deux années d'études : de la 6^{e} année primaire (âge 11-12 ans) et de la 1^{e} année du collégial (âge 12-13 ans) pour comparer les résultats de deux différents degrés d'élèves, les premiers n'ayant pas reçu d'introduction au symbolisme algébrique alors que les seconds ont eu un enseignement sur ce sujet. La Fig. 2 ci-après, illustre l'échantillon par grade et version de l'activité.

[1] L'activité est présentée dans les deux langues d'enseignement : l'arabe et le français.

	Nombre de classes	Activité version 1	Activité version 2	Effectifs des élèves
6e primaire	6	90	90	**180**
1e collège	7	120	90	**210**
Total	**13**	**210**	**180**	**390**

Fig. 2 : Répartition de l'activité selon la version et le degré scolaire

Aux enseignants des 13 classes, nous avons présenté les objectifs de notre travail en précisant que les élèves devaient travailler l'activité individuellement pendant une durée de 50 minutes et que les enseignants ne devaient pas intervenir pendant la phase de travail des élèves.

Analyse préalable de l'activité

L'activité proposée consiste à dénombrer les bâtonnets des figures dessinées, puis d'exprimer le nombre de bâtonnets de chaque figure en fonction du nombre de maisons.

Sur la base des réflexions de Radford, Miranda, et Demers (2009), nous avons présenté cette activité en quatre questions : la question 1 conduit les élèves vers le dénombrement concret des bâtonnets de la Figure 1. Cette question n'invite pas à un dénombrement raisonné bien que certains élèves puissent le faire. Il est ensuite demandé de trouver le nombre de bâtonnets de la maison de la Figure 101 : cette question invite l'élève à répéter le système d'actions initiales sur un exemple spécifique et guide l'élève à porter attention au schéma du calcul plus qu'au calcul lui-même. L'élève ne peut plus réaliser un dénombrement concret, mais il peut le réaliser mentalement. Il est ainsi mis dans la situation où il doit dégager des invariants à partir des cas antérieurement considérés et étendre ces invariants au nouveau cas.

Afin d'amener les élèves à donner du sens à la notion de nombre indéterminé dans ce contexte, nous avons formulé la question 3 par : « expliquez à l'un de vos collègues avec vos propres mots… ». Cette question conduit l'élève à anticiper les cas potentiels non spécifiés. Elle amène l'élève à convertir les invariants en prototypes, les cas spécifiques antérieurs se transforment alors chez l'élève en exemples génériques. La généralité peut être formulée de manière libre, soit en utilisant le langage ordinaire, soit un langage mixte constitué de symboles mathématiques et non mathématiques, soit encore le langage formel.

Dans la question 4 l'élève est invité à réfléchir sur la formulation symbolique de la généralité et à représenter de manière explicite et mathématique la variable. Cette formulation est ainsi détachée du système d'actions initiales et peut alors se prêter à des manipulations syntaxiques en cohérence avec les règles du calcul et sans lien avec les signifiants (Squalli, 2015 ; Dörfler, 1991).

Réussite de la tâche

Nous présentons dans la Fig. 3, la répartition des productions analysées au regard de la réussite et de la non-réussite.

Niveau scolaire	Action réussie	Action non réussie	Total
6e primaire	17% (31)	85% (149)	100 % (180)
1e collégial	28% (58)	72% (152)	100% (210)
Total	23% (89)	77% (301)	100 % (390)

Fig. 3 : Répartition de la réussite de l'activité selon le grade scolaire

Globalement, au vu de ces résultats, on peut considérer que la tâche était difficile pour les élèves puisque moins d'un quart des productions sont réussies (23 %). Si on se limite aux productions de 6e primaire (180), seulement 17% sont réussies, tandis qu'en 1ère du collège (210) la réussite passe à 27 % (Fig. 3). Notons que les élèves de la 6e primaire n'ont pas encore reçu un enseignement de l'algèbre alors que ceux de 1ère collège l'ont reçu.

Dans la Fig. 4 ci-après, nous exposons la répartition des productions des élèves de 1e collège au regard de la réussite et de la non-réussite, selon chaque version de l'activité :

	Activité réussie		Activité non réussie		Total
Activité	version 1	version 2	version 1	version 2	
1e collège	38% (46)	13% (12)	62% (74)	87% (78)	210
Total	28% (58)		72% (152)		100 % (210)

Fig. 4 : Répartition de la réussite selon la version au collégial

Sur la base des 210 copies analysées du collégial, on constate une meilleure réussite de la version 1 (38% versus 13%). Il semble que ces élèves n'aient pas nécessairement établi de lien entre l'algèbre qu'ils travaillaient habituellement en classe et l'activité proposée.

La Fig. 5 ci-dessous présente la répartition des productions des élèves de 6e primaire au regard de la réussite et de la non-réussite, selon chaque version de l'activité :

	Activité réussie		Activité non réussie		Total
Activité	version 1	version 2	version 1	version2	
6e primaire	27% (24)	8% (7)	73% (66)	92% (83)	180
Total	17% (31)		85% (149)		100% (180)

Fig. 5 : Répartition de la réussite selon la version au primaire

Comme au collégial, la version 1 est mieux réussie au primaire que la version 2 (27% versus 8%).

Les catégories de généralisation selon le niveau scolaire et la réussite de l'activité sont exposées dans la Fig. 6 ci-dessous :

Catégorie de généralisation	Activité réussie	Activité non réussie	Total
Empirique	15% (44)	85% (252)	76% (296)
Théorique	11% (45)	13% (49)	24 % (94)
Total	23% (89)	77% (301)	100 % (390)

Fig. 6 : Répartition de la réussite selon les catégories de généralisation

Des 390 copies analysées, 76% (296) sont de la catégorie de généralisation empirique, et 24% (94) de la catégorie de généralisation théorique. Ces données montrent que les résolutions des élèves sont majoritairement de la catégorie empirique.

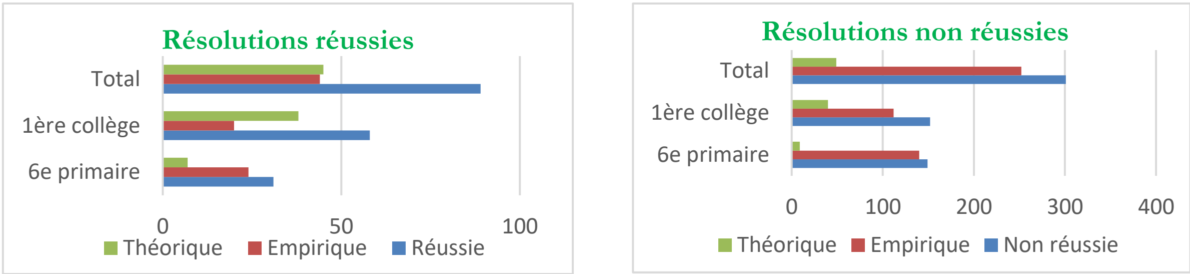


Fig. 7 : Répartition des catégories de généralisation selon le degré scolaire

Toutefois, pour les 89 productions réussies, on constate une répartition égale des généralisations empiriques (44) et théoriques (45), ces dernières étant surtout le fait des élèves du collégial (38 versus 7). Les élèves du primaire sont principalement dans l'empirie, que ce soit pour les résolutions réussies ou non.

PRODUCTIONS DES ÉLÈVES ET ANALYSE DES SYMBOLISATIONS POUR LA GÉNÉRALISATION

Nous avons catégorisé les productions des élèves en six classes de systèmes d'actions dans lesquelles l'attention de l'élève est orientée vers certaines relations entre les objets sur lesquels portent ses actions. Une classe est donc constituée de systèmes d'actions qui portent sur les mêmes objets et qui conduisent ainsi aux mêmes invariants.

Les classes de systèmes d'actions, qui témoignent de la variété des démarches développées par les élèves, sont résumées dans la Fig. 8 suivante :

Classe	Description	Formule
C1	Prendre 4 fois le nombre de maisons auquel on ajoute un bâtonnet.	$4n + 1$
C2	Prendre le nombre de bâtonnets de la première maison et ajouter quatre fois le nombre de maisons moins une.	$5 + (n - 1) \times 4$
C3	Exprimer le nombre de bâtonnets de chaque maison auquel on retranche le nombre de bâtonnets communs, soit 1 pour chaque maison sauf la première.	$5n - (n - 1)$
C4	Ajouter 5 pour la première maison à 4 bâtonnets pour chaque maison suivante (ce qui correspond à n+1 maisons en tout).	$4n + 5$
C5	Pour chaque maison, faire l'addition du nombre de bâtonnets de la base (1) avec le nombre de bâtonnets verticaux (bâtonnet de la base plus un) et le nombre de bâtonnets du toit (deux fois le nombre de bâtonnets de la base).	$n + (n + 1) + (n \times 2)$
C6	Faire l'addition du double de nombre de maisons avec le triple du nombre de maisons et retrancher du total obtenu le nombre de maisons moins une.	$n \times (3 - 1) + n \times (4 - 1) - (n - 1)$

Fig. 8 : Les classes de systèmes d'actions

La Fig. 9 suivante synthétise la symbolisation dans la généralisation théorique et permet de mettre en place la classe de symbolisation dans les résolutions des élèves, où AR indique que l'action est réussie et ANR l'action est non réussie.

Classe de Symbolisation	C1		C2		C3		C4		C5		C6		Total	
	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR
Effectifs (%)	12	13	8	9	9	11	10	9	4	5	2	2	11% (45)	13% (49)
	27% (25)		18% (17)		21% (20)		20% (19)		10% (9)		4% (4)		24% (94)	

Fig. 9 : La symbolisation dans la généralisation théorique

Ce sont les élèves de la 1e du collège qui ont produit des généralisations symboliques dans le langage algébrique. Ils expriment les généralités par des formules, tout en passant par le processus de détacher les invariants de leur contexte initial de l'activité de façon appropriée. Ce qui est conforme aux directives des programmes raccordant l'amorce de l'algèbre avec le travail relatif aux formules et aux expressions algébriques.

Dans la Fig. 10, nous présentons les classes de symbolisation dans la généralisation empirique :

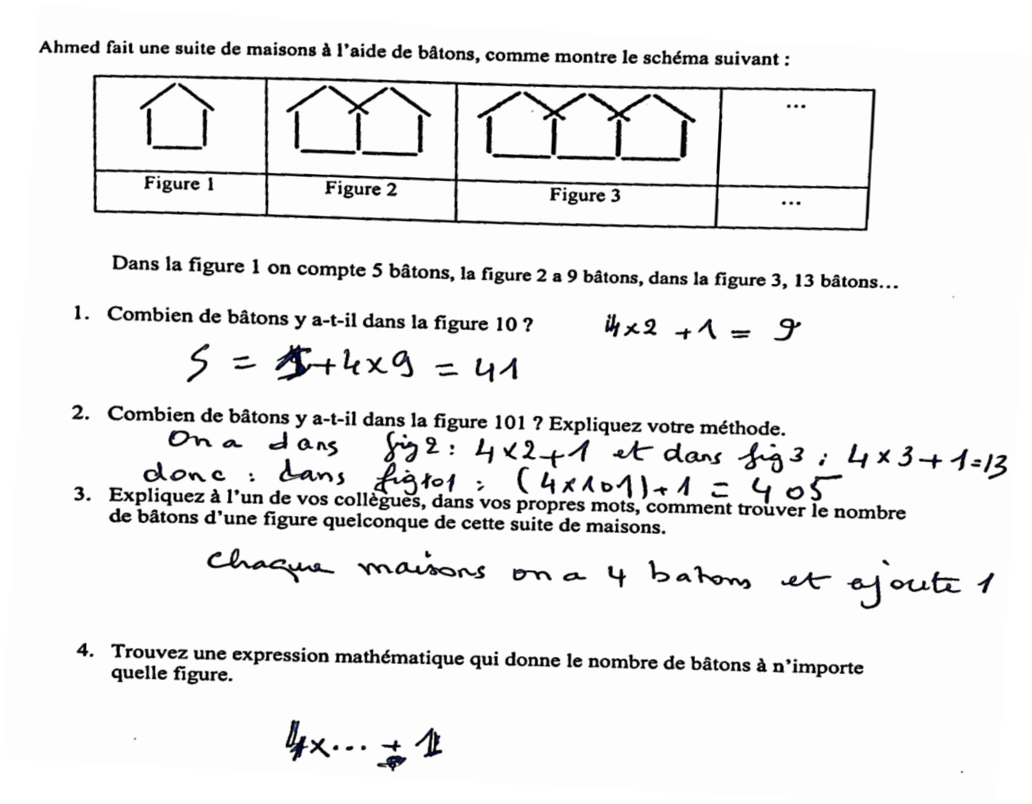
Classe de Symbolisation	C1		C2		C3		C4		C5		C6		Total	
	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR	AR	ANR
Effectifs (%)	10	56	8	39	10	55	11	74	3	13	2	15	15% (44)	85% (252)
	22% (66)		16% (47)		22% (65)		29 (85)		5% (16)		6% (17)		76% (296)	

Fig. 10 : La symbolisation dans la généralisation empirique

Dans cette catégorie de réponses, ce sont les élèves 6e primaire qui ont produit un nombre important de modes de signification des objets des généralisations empiriques. Ces élèves n'ont pas reçu un enseignement de l'algèbre, ils ont établi en revanche des raisonnements qui s'inscrivent dans le registre algébrique personnalisé comme étant une juxtaposition d'éléments du registre algébrique conventionnel et du registre du langage naturel. Cette catégorie d'élèves donne la preuve qu'ils sont capables de se passer d'exemples numériques pour exprimer directement la généralisation dans un registre très proche du registre algébrique.

Quant à la classe de symbolisation algébrique qu'avaient produite les élèves des deux niveaux scolaires, il ressort que les classes C4, C1 et C3 sont les plus manifestées par ces élèves dans les deux catégories de généralisation.

À titre illustratif, nous présentons dans ce qui suit, des exemples prototypiques de symbolisation.



Ahmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtons, comme montre le schéma suivant :

Figure 1	Figure 2	Figure 3	…

Dans la figure 1 on compte 5 bâtons, la figure 2 a 9 bâtons, dans la figure 3, 13 bâtons…

1. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 10 ? $4\times2+1=9$

$5 = \cancel{1}+4\times9 = 41$

2. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.

On a dans fig 2 : $4\times2+1$ et dans fig 3 : $4\times3+1=13$
donc : dans fig 101 : $(4\times101)+1 = 405$

3. Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque de cette suite de maisons.

Chaque maisons on a 4 batons et ajoute 1

4. Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtons à n'importe quelle figure.

$4\times\ldots+1$

Fig. 11 : Élève de 6e primaire de la classe 1

La production de l'élève (Fig. 11) dévoile la formule 4x … + 1 qui appartient à la classe de systèmes d'actions C1. Il semblerait qu'il ait compris que cette relation est générale, ce qui va être effectivement exprimé à la suite de sa synthèse parce qu'il écrit que le nombre de bâtonnets de n'importe quelle figure est égal au nombre de maisons multiplié par 4 auquel on ajoute 1 bâtonnet. L'élève a représenté le statut de la lettre par des pointillés, comme substitut de l'indéterminée. L'indéterminée est symbolisée par ce substitut, mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître. La généralisation symbolique de cet élève appartient à la classe C1.

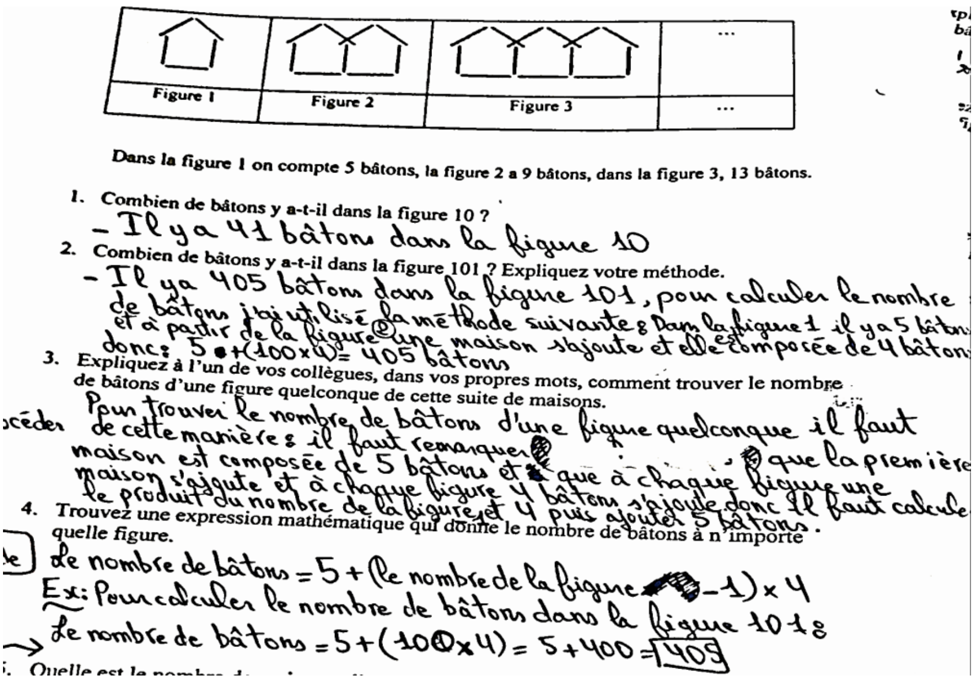


Figure 1	Figure 2	Figure 3	…

Dans la figure 1 on compte 5 bâtons, la figure 2 a 9 bâtons, dans la figure 3, 13 bâtons.

1. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 10 ?

– Il y a 41 bâton dans la figure 10

2. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.

– Il ya 405 bâtons dans la figure 101, pour calculer le nombre de bâtons j'ai utilisé la méthode suivante : Dans la figure 1 il ya 5 bâtons et à partir de la figure 2 une maison s'ajoute et elle est composée de 4 bâtons
donc : $5+(100\times4)=405$ bâtons

3. Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque de cette suite de maisons.

Pour trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque il faut procéder de cette manière : il faut remarquer que la première maison est composée de 5 bâtons et que à chaque figure une maison s'ajoute et à chaque figure 4 bâtons s'ajoute donc il faut calculer le produit du nombre de la figure et 4 puis ajouter 5 bâtons.

4. Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtons à n'importe quelle figure.

le nombre de bâtons = 5 + (le nombre de la figure – 1) × 4

Ex : Pour calculer le nombre de bâtons dans la figure 101 :

→ le nombre de bâtons = $5+(100\times4) = 5+400 = \boxed{405}$

Fig.12 : Élève de 6e primaire de la classe 2

Dans cette production (Fig. 12), l'élève n'a pas attribué une lettre à l'indéterminée qu'il nomme le numéro de la figure. La généralité exprimée par cet élève montre la relation entre le nombre de bâtonnets pour un certain nombre de maisons et le nombre bâtonnets pour une maison supplémentaire. Autrement dit, l'élève a saisi que pour une maison de plus, il faut ajouter 4 bâtonnets. L'élève a modélisé l'activité dans un langage proche de celui du langage algébrique dans le savoir de référence. Il a produit un calcul qui fait intervenir des nombres connus et des mots du langage naturel désignent les variables. Ces symboles sont alors de nouveaux objets de la pensée, des objets mathématiques dont la signification réside dans les invariants. Le détachement total des actions originales consiste à produire une formule correcte du point de vue mathématique qui ne conserve plus la trace des éléments de contexte. Dans le raisonnement de cet élève, il semble y avoir une anticipation pour détacher l'invariant du contexte de l'activité puis il a procédé à une simplification de la formule comme dans toute autre expression algébrique (Fig. 13).

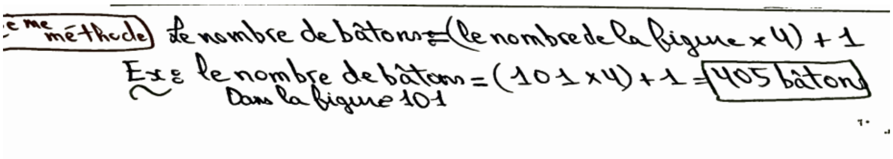


Fig.13 : Suite du raisonnement de cet élève de 6e primaire

Le raisonnement de cet élève montre que ce n'est pas nécessairement l'usage de la lettre qui est le signe du développement d'une pensée algébrique. La généralisation symbolique de cet élève appartient à la classe C2 et il a montré qu'elle est équivalente à celle de C1.

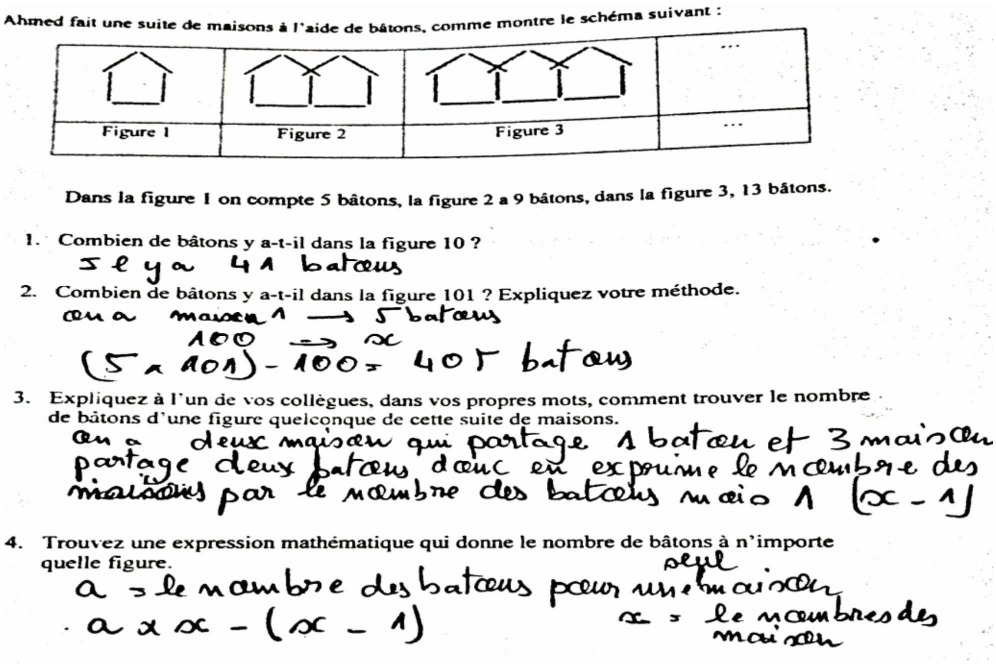
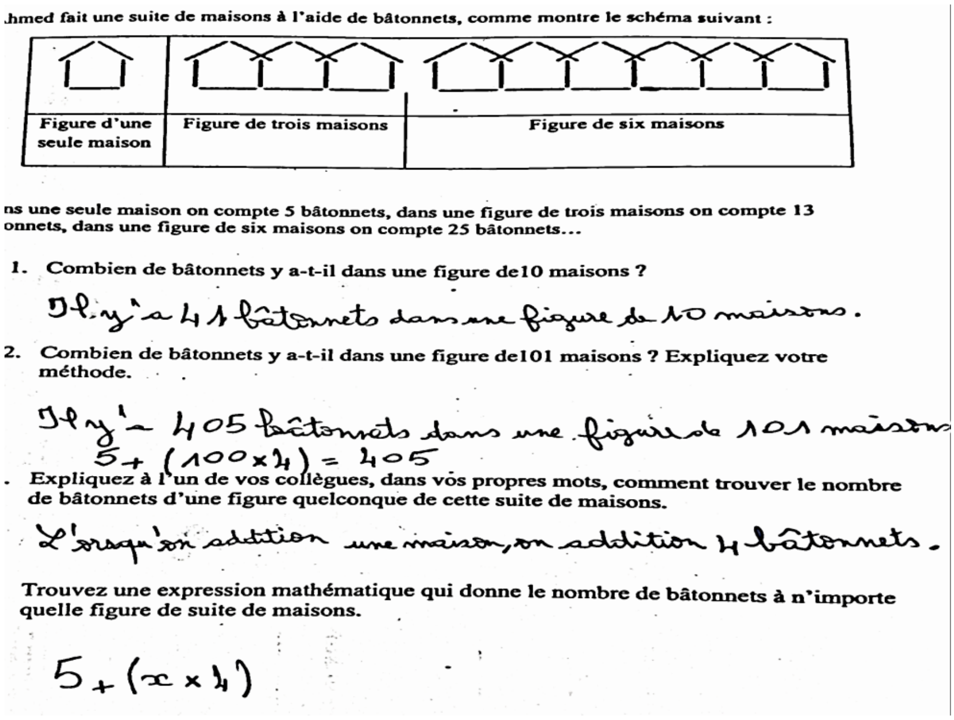


Fig. 14 : Élève de 1er du collège de la classe 3

Cet élève (Fig. 14) exprime le nombre de bâtonnets de chaque maison auquel il retranche le nombre de bâtonnets communs ; il découvre la formule $5n - (n - 1)$ où n noté x désigne la variable indépendante. Son processus de généralisation passe par une série d'abstractions d'invariants. En effet, en supposant que chaque maison de n'importe quelle figure comporte 5 bâtonnets, l'élève a considéré qu'une maison comporte 5 bâtonnets, deux maisons comportent 5 bâtonnets multipliés par 2 auquel il retranche un bâtonnet, étant le bâtonnet en commun pour les deux maisons. De proche en proche, il déduit la formule générale décrivant le nombre de bâtonnets de n'importe quelle figure en tant que soustraction de deux expressions $5n$ et $(n - 1)$. Il a traduit sa symbolisation par la formule $5n - (n - 1)$ qui appartient à la classe de systèmes d'actions C3.



hmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtonnets, comme montre le schéma suivant :

Figure d'une seule maison	Figure de trois maisons	Figure de six maisons

ns une seule maison on compte 5 bâtonnets, dans une figure de trois maisons on compte 13 onnets, dans une figure de six maisons on compte 25 bâtonnets…

1. Combien de bâtonnets y a-t-il dans une figure de10 maisons ?

Il y'a 41 bâtonnets dans une figure de 10 maisons.

2. Combien de bâtonnets y a-t-il dans une figure de101 maisons ? Expliquez votre méthode.

Il y'a 405 bâtonnets dans une figure de 101 maisons
5 + (100 × 4) = 405

. Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtonnets d'une figure quelconque de cette suite de maisons.

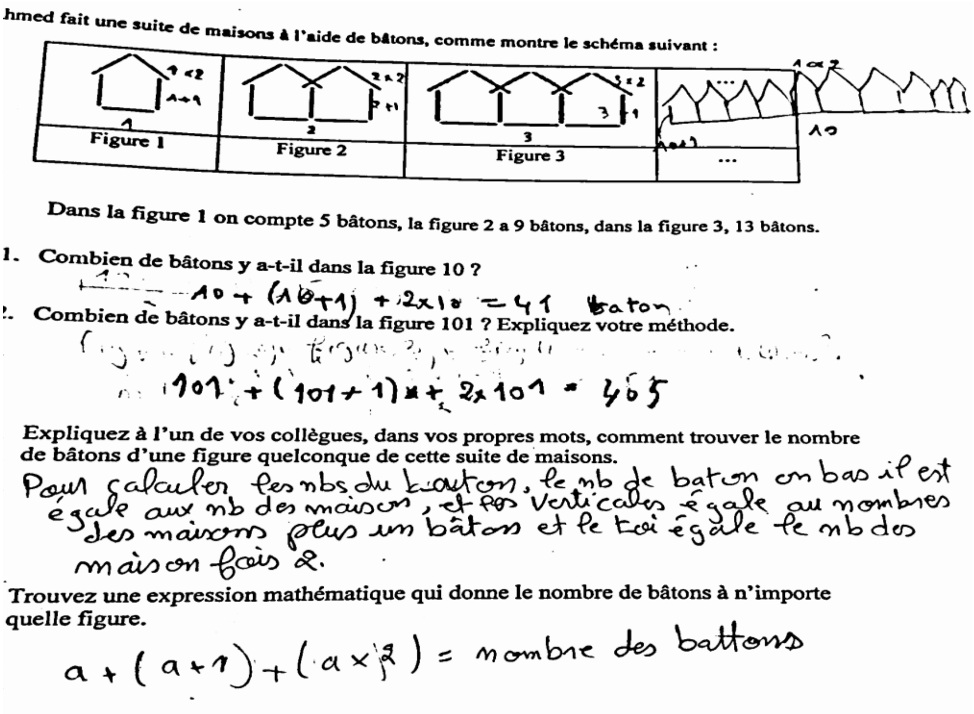
L'orsqu'on addition une maison, on addition 4 bâtonnets.

Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtonnets à n'importe quelle figure de suite de maisons.

5 + (x × 4)

Fig. 15 : Élève de 1er du collège de la classe 4

Dans sa production (Fig.15), cet élève donne la preuve qu'il est capable de passer par des exemples numériques pour exprimer directement la généralisation dans un registre algébrique. Il a produit l'expression $4n + 5$ qui appartient à la classe 4. Cette formule permet d'exprimer le nombre de bâtonnets de n'importe quelle figure en multipliant quatre fois le nombre de maisons auquel il faut ajouter le nombre de bâtonnets d'une seule maison, ce qui correspond à prendre quatre fois le nombre de maisons et lui ajouter le nombre de bâtonnets d'une seule maison.



hmed fait une suite de maisons à l'aide de bâtons, comme montre le schéma suivant :

Figure 1	Figure 2	Figure 3	…

Dans la figure 1 on compte 5 bâtons, la figure 2 a 9 bâtons, dans la figure 3, 13 bâtons.

1. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 10 ?

10 + (10 + 1) + 2 × 10 = 41 baton

2. Combien de bâtons y a-t-il dans la figure 101 ? Expliquez votre méthode.

101 + (101 + 1) + 2 × 101 = 405

Expliquez à l'un de vos collègues, dans vos propres mots, comment trouver le nombre de bâtons d'une figure quelconque de cette suite de maisons.

Pour calculer les nbs du baton, le nb de baton en bas il est égale aux nb des maison, et les verticales égale au nombres des maisons plus un bâton et le toi égale le nb des maison fois 2.

Trouvez une expression mathématique qui donne le nombre de bâtons à n'importe quelle figure.

a + (a + 1) + (a × 2) = nombre des battons

Fig. 16 : Élève de 1e du collège de la classe 5

Cet élève (Fig. 16) a exprimé une formule basée sur l'ajout de trois généralités. En effet, dans la généralité globale exprimée $a + (a + 1) + (a \times 2)$, l'élève a effectué une généralisation sur le nombre de bâtonnets de la base de chaque figure et une autre sur le nombre de bâtonnets verticaux (le nombre de bâtonnets de la base plus un) et ensuite sur le nombre de bâtonnets du toit (deux fois le nombre de bâtonnets de la base) avec comme variable indépendante le nombre de bâtonnets de la base de chaque figure, tandis que la variable dépendante est le nombre de bâtonnets total de chaque figure.
La généralisation symbolique de cet élève se prête à l'analyse de la classe C5 : faire la somme du nombre de bâtonnets de la base avec le nombre de bâtonnets verticaux (bâtonnets de la base plus un) et le nombre de bâtonnets du toit (deux fois le nombre de bâtonnets de la base).

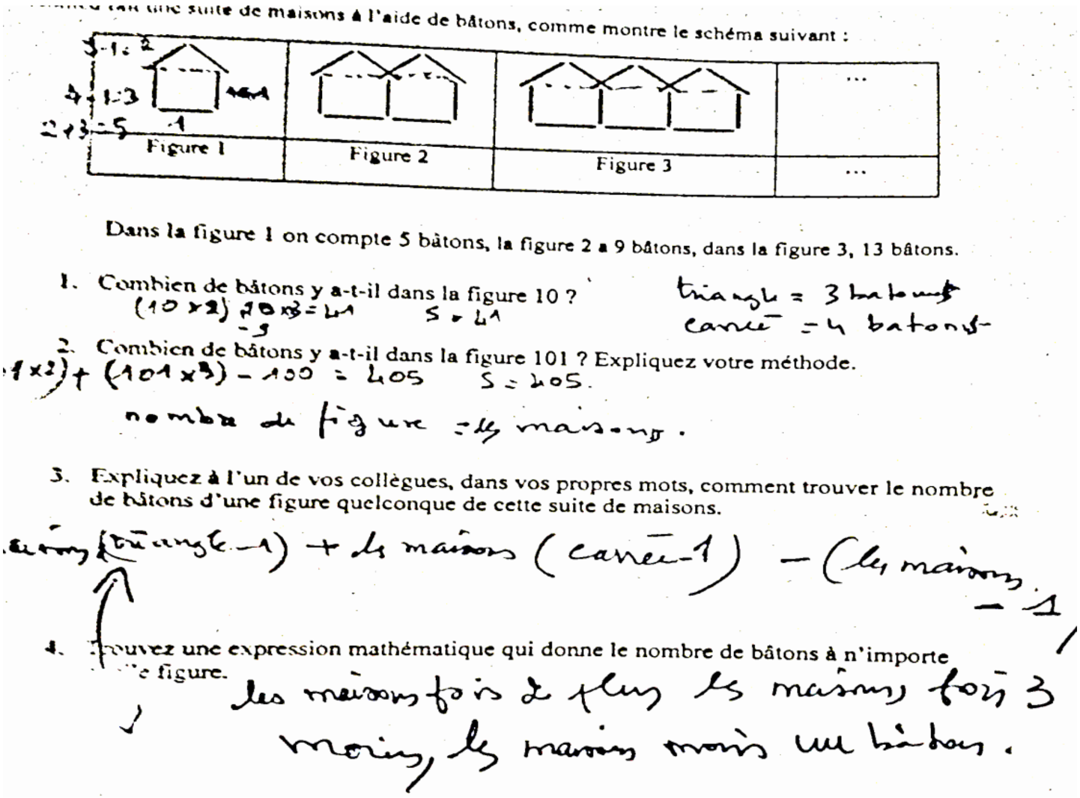


Fig. 17 : Élève de 6e primaire de la classe 6

Dans cette production (Fig. 17), l'élève a exprimé une généralisation basée sur l'addition de trois différentes généralités ; il a considéré que chaque maison est composée de la somme de bâtonnets d'un triangle incomplet de trois bâtonnets moins un bâtonnet, avec un carré incomplet de quatre bâtonnets moins un bâtonnet. Il a déduit la formule globale $n \times (3 - 1) + n \times (4 - 1) - (n - 1)$ où n désigne le nombre de maisons qui exprime que le nombre de bâtonnets de n'importe quelle figure est donné par l'addition du double de nombre de maisons avec le triple du nombre de maisons dont on retranche le nombre de maisons moins une. La généralisation non symbolique de cet élève se prête à la même analyse de la classe C6.

SYNTHÈSE POUR LES CLASSES

Les élèves ont utilisé les systèmes d'action des classes C4, C1 et C3 pour la version 1 et C5 et C6 pour la version 2. Compte tenu de l'agencement des figures dans l'activité, les formes se prêtaient naturellement à être le véhicule des actions des élèves. Les invariants construits sont justifiés par la structure de la représentation visuelle des maisons.

Le schéma classique d'une généralisation empirique est de dégager des régularités à partir de la constance des résultats de quelques cas. Les productions choisies pour exemplifier les classes C1, C2 et C6 sont des généralisations empiriques, les formules produites par ces élèves sont contextuelles dans la mesure où elles portent toutes la marque des actions posées par les élèves pour généraliser. Ces formules prennent tout leur sens pour les élèves en relation avec le calcul posé dans l'activité (par exemple, 4x … +1). Même s'il s'agit d'une étape plus avancée dans la symbolisation algébrique, celle-ci reste encore ancrée dans le contexte de l'activité. Les élèves ont produit une expression, mathématiquement correcte, mais encore calquée sur les actions posées. Ils semblent ensuite s'être détachés du contexte et l'ont simplifiée comme toute autre expression algébrique (Fig.13).

Les productions choisies pour exemplifier les classes C3, C4 et C5 sont des généralisations de nature théorique. Cette généralisation se détache, quant à elle, de l'activité, qui n'est plus enracinée dans le contexte de la suite. On peut cependant considérer que le fait de réduire l'expression implique un changement de perspective où l'élève passe d'une description des actions posées à la réflexion sur l'objet même de cette expression pour la réduire. Malgré une expression réduite et correcte, il n'est pas certain que les élèves aient effectivement produit une généralisation théorique (algébrique symbolique) ou soient parvenus au détachement total. Pour en être sûr, il nécessiterait que les élèves puissent considérer d'autres formules de généralisation comme équivalentes à la leur.

L'enjeu du développement de la généralisation algébrique chez les élèves consiste à les amener à se détacher d'une généralisation empirique et de tendre vers l'utilisation de celle théorique.

Le processus de généralisation peut être résumé dans le schéma suivant :

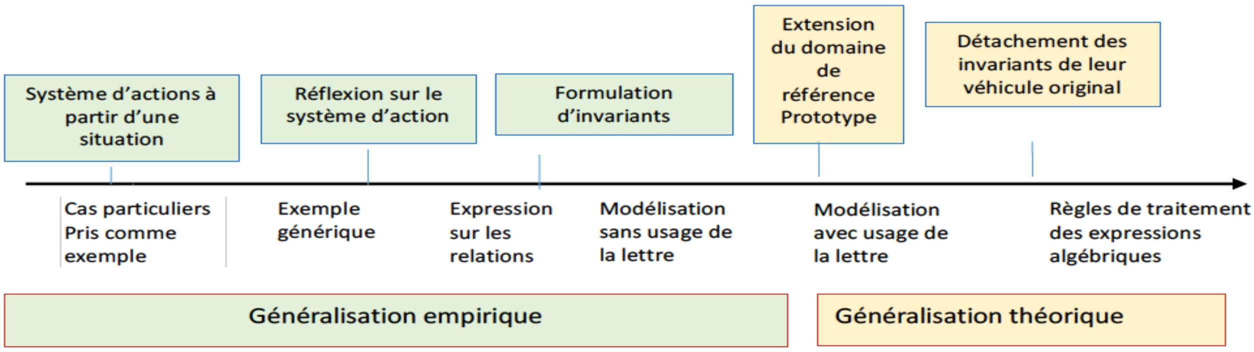


Fig. 18 : Le processus de généralisation, adapté de Squalli (2015)

Conclusion

Les élèves des deux degrés perçoivent les enjeux de l'activité et de sa structuration. Ils identifient les invariants et déterminent un prototype sur la base des schémas proposés dans l'activité. Leur principale préoccupation réside donc dans la symbolisation de cette généralisation.

Même si les aspects outil de la généralisation, de preuve et de modélisation ne sont pas mis en avant dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire, il convient de souligner que les élèves n'avaient jamais eu l'occasion de résoudre ce type d'activité ; l'analyse de leurs productions montre que sans aucune intervention de l'enseignant, ces élèves produisent des généralités variées. Dans les productions analysées apparaissent des difficultés importantes des élèves débutant en algèbre pour exprimer, à l'aide du formalisme algébrique, leur raisonnement : un quart des productions est réussi et les résolutions des élèves sont majoritairement de la catégorie empirique. Cependant, pour les élèves de la 1e année du collège, il s'agit d'un pas important étant donné qu'il s'agissait de leur première rencontre avec l'algèbre. Dans le processus d'actions développées par les élèves, la formule contextuelle émerge et est calquée sur les opérations. Nous notons qu'un huitième d'entre eux parvient à symboliser correctement le raisonnement en utilisant spontanément la lettre.

L'activité de généralisation dans laquelle les élèves étaient engagés requiert de la part de ceux-ci une utilisation de l'algèbre très différente de celle qu'ils ont l'habitude de développer. Il ne s'agit pas d'appliquer une technique étudiée dans les classes, mais de deviner une nouvelle expression algébrique, ce qui sollicite un point de vue très différent de l'utilisation du langage algébrique, en lien notamment avec le sens de l'égalité, de la lettre et des relations entre les différents symboles.

L'activité des patterns figuratifs apporte des éclairages sur les conditions favorisant le développement de la généralisation algébrique chez les élèves avant ou au début de l'enseignement de l'algèbre. L'entrée par ce type d'activité pourrait paraître inadéquate puisque certains élèves éprouvent d'importantes difficultés à la réussir, mais par ailleurs cette entrée permettra aux élèves de donner sens à l'expression des opérations et de la généralité.

La comparaison des différentes données met ainsi en évidence le fait que les manifestations des généralisations théoriques apparaissent aussi en 6e primaire, ce constat mériterait d'être approfondi en mettant l'élève du primaire au contact avec ce type d'activité très tôt et ne pas attendre l'entrée au collège. Ce type d'activité offre en effet aux élèves la capacité à utiliser différents niveaux de langage, de passer d'un niveau de langage à un autre et aussi un espace qui leur permet de mettre en évidence des contenus leur permettant de développer la pensée algébrique.

BIBLIOPRAPHIE

Abouhanifa, S., & Squalli, H. (2019). *Les stratégies exprimées par les élèves dans la résolution d'un problème de généralisation.* Communication présentée au Colloque OIPA-2019, (Université de Liège – Belgique, 6-7 mars 2019).

Abouhanifa,S., El ibbaoui, M., Seddoug, B. & Squalli, H.(2018). *Enquête sur les procédures de résolution de problèmes algébriques chez des élèves marocains de 12 à 15 ans.* Communication présentée au Colloque OIPA-2018, Université de Sherbrooke à Longueuil, Faculté d'éducation, 7-8-9 Mai 2018.

Chevallard, Y. (2006). *Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire.* Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation–Section des sciences de l'éducation 17 mai 2006. Repéré à : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen and J. Van Dormolen (Eds.). *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Larguier, M. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. In L. Theis (Ed.). *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.* Actes du colloque EMF 2015 _ GT3 (pp. 313-333).

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In *Approaches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht : Springer.

Piaget P., & Henriques, G. (1978). *Recherches sur la généralisation.* Paris : Presses Universitaires de France.

Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education 40*(1), 83-96.

Radford, L., Miranda, I., & Demers, S. (2009). *Processus de généralisation en mathématiques.* Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Rojano, T. (1991). Developing Algebraic Aspects of Problem Solving within a Spreadsheet Environment. In. N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 137- 146). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme généralisation d'invariants essentiels. In L. Theis (Ed.). *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.* Actes du colloque EMF 2015 _ GT3 (pp. 346-356).

Squalli, H., Mary, C., & Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In J. Lebeaume, A. Hasni, & I. Harlé (Eds). *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie.* (pp 65-78) Bruxelles : DeBoeke.

QUELLE TRANSFERABILITE D'UN MATERIEL DE GEOMETRIE D'UN CONTEXTE D'ENSEIGNEMENT A UN AUTRE ?

Céline Vendeira

Université de Genève et groupe Ddmes[1]

INTRODUCTION

Ce projet a débuté en 2015 avec pour objectif le développement de situations d'enseignement-apprentissage en géométrie qui permettraient de réduire la rupture pointée dans cet apprentissage entre l'école primaire et le secondaire. Cette rupture est notamment liée à un changement de paradigme avec un passage brusque à la géométrie déductive et à la preuve. Les travaux du groupe de Lille (dont Duval & Godin, 2005) ont mis en évidence la nécessité de changer de regard sur les figures géométriques, notamment en jouant sur la vision non iconique / iconique[2]. Dans le cadre de ce travail, l'idée initiale était de développer des situations qui « permettent un changement de regard progressif des formes vers les figures géométriques au cycle 1 », soit de la perception globale des formes vers la prise en compte de leurs propriétés, que l'on nomme « caractéristiques » au cycle 1 (Coutat & Vendeira, 2015, p.19). Toutefois, au fil des expérimentations menées sur le terrain, il a été mis en évidence que ce n'est pas un changement de regard qui est attendu, mais un enrichissement de ce dernier.

Le pari a été fait que cet enrichissement pouvait être initié dès le cycle 1, soit dès 4 ans. Un matériel pédagogique innovant a été développé à cet effet. Ce matériel a subi de nombreuses évolutions jusqu'en 2018 grâce aux apports et réactions des enseignants et élèves côtoyés sur le terrain de l'enseignement régulier genevois. Ce matériel est désormais disponible sous sa forme définitive et associé à un document d'accompagnement regroupant un ensemble de tâches (Coutat & Vendeira, 2018). Toutefois, en jouant sur les différentes variables didactiques, il est possible d'engendrer un éventail d'activités bien plus vaste que celui proposé dans ce document. Les professionnels peuvent par conséquent jouer sur ces différentes variables afin de proposer des tâches adaptées aux particularités et besoins de leurs élèves.

L'usage de ce matériel pédagogique dans différentes classes régulières a été concluant. En effet, selon les situations proposées, les élèves du cycle 1 parviennent à jongler entre une vision globale des formes et l'usage de leurs caractéristiques mettant en lumière l'enrichissement du regard souhaité ainsi que sa flexibilité pour passer d'une vision à l'autre (Vendeira & Coutat, 2017).

Dans cet article la transférabilité et l'adéquation de ce matériel pédagogique dans le contexte de l'enseignement spécialisé sont interrogées. En effet « comme plusieurs études le montrent, il n'est pas suffisant de mettre en place un dispositif didactique, si raffiné soit-il, pour que la dévolution fasse son œuvre » (Giroux, 2013, p.72). L'expérimentation proposée cherche à mettre en évidence si le processus de dévolution opère sur la base du matériel proposé et dans quelle mesure le jeu sur les nombreuses variables didactiques possibles influence ce processus. L'hypothèse étant que certaines valeurs de

[1] Didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé.

[2] La vision iconique est celle où la forme est perçue de manière globale, à travers sa surface, alors que la vision non-iconique permet de se détacher de cette perception globale de la forme pour se situer au niveau des propriétés qui la caractérisent.

variables seraient moins opérationnalisables que d'autres dans le contexte de l'enseignement spécialisé (en termes d'exécutabilité et/ou de productivité).

La notion de variable didactique d'une situation adidactique désigne une variable :

> « à la disposition de l'enseignant » : l'enseignant peut faire un choix en rapport avec son projet d'enseignement, choix objectivé comme une valeur de cette variable. Les autres valeurs représentent d'autres choix possibles non retenus qu'il est important de décrire pour comprendre la signification du savoir dans une situation particulière. (Bessot, 2003-2004, p.13)

> La dévolution consiste pour l'enseignant, non seulement, à proposer à l'élève une situation qui doit susciter chez lui une activité non convenue, mais aussi à faire en sorte qu'il se sente responsable de l'obtention du résultat proposé, et qu'il accepte l'idée que la solution ne dépend que de l'exercice des connaissances qu'il possède déjà. (Brousseau, 2010, p.5)

> Un résultat, souvent rapporté par les chercheurs qui ont expérimenté dans situations d'enseignement en adaptation scolaire[3], est la difficulté d'obtenir et de maintenir tout au long de la situation un investissement cognitif et mathématique de la part des élèves. (Giroux, 2015, p.6)

Dans ce qui suit, est d'abord présenté le matériel de géométrie utilisé puis les variables didactiques sur lesquelles il est possible de jouer à partir de ce matériel spécifique.

Un partage de quelques observations est ensuite proposé suite à l'utilisation de ce matériel dans deux établissements spécialisés, le premier avec des élèves présentant des troubles du comportement et des apprentissages, le second avec des élèves considérés comme ayant des troubles du spectre autistique.

Puis, quelques surprises sont relatées ainsi que les différences et similitudes observées quant au choix des valeurs des variables didactiques et leurs impacts sur le processus de dévolution par rapport au contexte de l'enseignement régulier. A ce stade de la recherche, quelques premières conclusions en lien avec la transférabilité du matériel en contexte spécialisé et des processus de dévolution observés seront mis en évidence.

Matériel pédagogique développé pour la géométrie au cycle 1

Le matériel conçu a pour objectif de développer un ensemble de situations qui permettent d'entrer petit à petit dans les caractéristiques des formes au cycle 1. Une caractéristique très prégnante à cet âge est le nombre de côtés dont la forme est constituée. Or il se trouve que les élèves du cycle 1 sont encore dans l'apprentissage du concept de nombre qui reste par conséquent fragile lorsqu'il s'agit de dénombrer des côtés. De plus, d'autres compétences peuvent interférer, telle que l'énumération (Briand, Loubet & Salin, 2004) complexifiant encore davantage la tâche. Pour ces différentes raisons, il importe de ne pas mettre l'accent uniquement ou préférentiellement sur cette caractéristique particulière, mais de la traiter au même titre que d'autres, telles que la présence de bords droits ou courbes, de symétries, de côtés opposés parallèles ou encore du caractère convexe ou non de la forme. Les termes mathématiques corrects ne sont pas attendus, mais l'identification de ces caractéristiques peut se faire via un vocabulaire personnel, à condition qu'il soit compréhensible.

Le matériel n'intègre volontairement pas les formes usuelles, carrés, rectangles, triangles et cercles introduits communément au cycle 1. Ce choix s'explique suite aux obstacles observés chez les élèves de cet âge ayant été confrontés quasi exclusivement à ces formes. En effet, en présence de ces formes, les élèves peinent à mobiliser les caractéristiques en préférant l'usage du nom de la forme associé à la perception globale qu'ils en ont (Coutat & Vendeira, 2015). Quant aux formes usuelles non prototypiques (tels le triangle rectangle ou le rectangle n'ayant pas des longueurs une fois et demie à

[3] Terme utilisé au Canada francophone.

deux fois plus longues que les largeurs), celles-ci ne semblent pas être reconnues comme appartenant à leur classe (triangle/rectangle), car différentes perceptivement de leur modèle. En psychologie, Gentaz (2013) questionne également « comment les enfants au cours de leur développement ontogénétique arrivent à traiter de la même manière des exemplaires d'une catégorie et donc à dépasser les spécificités de ces exemplaires au profit de leur généralité » (p.3).

Ces premiers choix ont permis de développer une collection de 47 formes non usuelles et donc non prototypiques présentées ci-dessous.

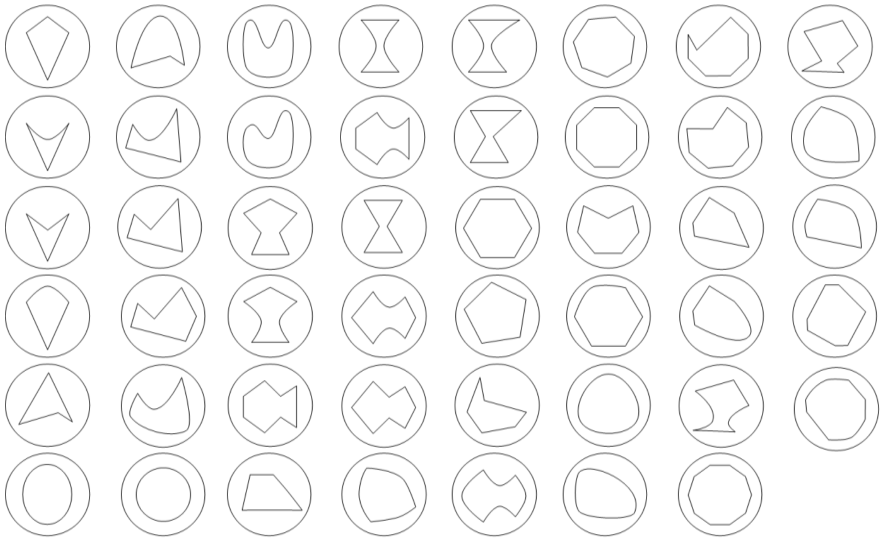


Fig. 1 : Dessins du matériel constitué de 47 formes

Le choix de cette collection n'empêche pas les élèves de se focaliser sur l'aspect global des formes en y repérant par exemple une ressemblance à un objet connu de leur quotidien, comme un poisson, un sablier ou une montagne… Toutefois, selon les pièces sélectionnées et leur proximité iconique, seule l'entrée par les caractéristiques peut se révéler efficace (cas de la sélection faite dans la Fig. 2). Le choix des formes sélectionnées par les enseignants est donc primordial selon les objectifs poursuivis.

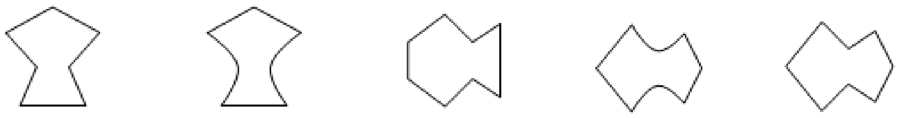


Fig. 2 : Exemple de formes perceptivement proches

En se basant sur les travaux en sciences cognitives de Pinet et Gentaz (2008), le matériel intègre la modalité haptique (tactilo-kinesthésique) en proposant des pièces encastrables (gabarits et pochoirs) permettant deux types distincts de manipulation (l'intérieur du pochoir et le pourtour du gabarit). Ainsi, là où des pointes sont détectables sur un gabarit, des trous y sont associés, au toucher, sur le pochoir correspondant.

Fig. 3 : Matériel encastrable comprenant une partie évidée (pochoir) et pleine (gabarit) et le puzzle de deux parties

Ces différentes configurations engendrent la perception de quatre « formes » distinctes : celles portées par le pochoir (la partie vide et la partie pleine), celle portée par le gabarit et le puzzle[4] du gabarit et du pochoir. Le puzzle ne doit pas être négligé, car il sert de « modèle » ou de moyen de validation dans de nombreuses tâches proposées.

Le matériel, tel qu'il est conçu, détient, grâce à l'encastrement des gabarits dans les pochoirs correspondants, un bon potentiel de rétroaction pour les élèves. A priori, si l'élève ne parvient pas à encastrer son gabarit dans le pochoir choisi, c'est qu'il ne s'agit pas du bon (ou éventuellement qu'il faudrait lui faire subir une rotation (tourner la pièce dans le plan) ou un retournement (dans le cas d'une forme non symétrique). Toutefois, dans certains cas d'encastrements, des gabarits peuvent s'introduire dans des pochoirs de manière incorrecte mettant en défaut la rétroaction du milieu (Brousseau 1998). Ceci est d'autant plus difficile à repérer lorsque l'espace laissé inoccupé est réduit comme dans les deux exemples ci-dessous.

Fig. 4 : Deux exemples de cas d'encastrement erroné

Dans ces cas précis, les élèves peuvent ne pas se rendre compte de leur erreur et valider leur choix à tort. Ces exceptions ne se produisent que lorsqu'un gabarit à bords courbes est inséré dans le pochoir équivalent aux bords droits (alors que l'inverse ne fonctionne pas comme le montre la Fig. 5 ci-dessous).

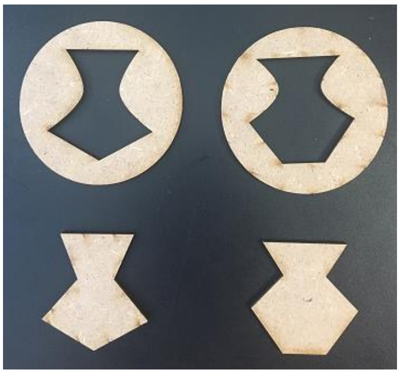


Fig. 5 : Les gabarits à bords droits ne s'encastrent pas dans les pochoirs équivalents aux bords courbes

Ces cas de figures pourraient se révéler problématiques. Toutefois, lorsqu'une pièce est mal encastrée, un gabarit et un pochoir restent inévitablement en plan, signifiant qu'une erreur s'est produite en amont. Dès lors, des discussions/régulations entre élèves se produiront rendant petit à petit les élèves sensibles à la caractéristique bords courbes et/ou droits.

L'utilisation de disques comme supports des formes est choisie afin de ne favoriser aucune orientation des pièces.

Pour terminer, la coloration uniforme des pièces se justifie par rapport à la possibilité de travailler autour de l'aspect symétrique ou non des formes, ce qui ne serait plus possible si le recto était dissocié du verso.

[4] Voir utilisation faite de ce terme par Perrin-Glorian & Godin dans RMé 222 (2014) en page 31.

VARIABLES DIDACTIQUES

En jouant sur différentes variables didactiques, un ensemble de types de tâches est développé qui permet de travailler la reconnaissance de formes au cycle 1 (identification de formes géométriques simples ; appariement de deux formes simples ; tri (classement, rangement) de formes géométriques simples (Coutat & Vendeira, 2015).

Presque l'ensemble des tâches développées ont été conçues en partant d'une situation générale d'encastrement libre dont la description figure ci-dessous[5].

> Les pochoirs et les gabarits sont séparés, mélangés et dispersés sur une table. L'élève doit procéder à des encastrements jusqu'à ce que chaque gabarit soit encastré dans son pochoir. Il dispose de tout le temps nécessaire et peut manipuler toutes les pièces à sa disposition.

Fig. 6 : Description de la tâche « encastrement libre »

Afin de créer une grande variété de tâches ayant pour objectif de permettre aux élèves d'adopter une flexibilité dans leur regard sur les formes (global ou par les caractéristiques, voire un mélange des deux) en fonction des situations proposées, un jeu sur quelques variables didactiques est ensuite possible.

Par exemple, il est possible d'agir sur les stratégies des élèves en :

- réduisant le nombre de pièces proposées. Cela influe notamment sur les stratégies d'énumération et les stratégies organisationnelles. Plus il y a de pièces sur la table, plus l'élève devra organiser sa recherche ;
- sélectionnant un certain assortiment de pièces parmi l'ensemble. Cela impacte le type de regard à mobiliser. Des pièces perceptivement très proches nécessiteront un regard plus fin avec une nécessité de sortir d'une vision globale exclusive pour aborder les caractéristiques des formes ;
- réduisant le nombre d'essais autorisés à un seul. Cela empêche les élèves de procéder par essais-erreurs. Pour des pièces perceptivement proches, l'élève devra identifier certaines caractéristiques pour faire ses choix. Les élèves peuvent également être amenés à effectuer des rotations mentales ou effectives des pièces, voire également des retournements pour des pièces non symétriques ;
- éloignant spatialement les gabarits et les pochoirs, de sorte qu'on ne puisse pas les visionner sans devoir se déplacer de quelques mètres. Le recours à la perception globale diminue (car nécessite une mise en mémoire pas accessible à tous) incitant les élèves à se focaliser sur des caractéristiques ;
- éloignant temporellement les gabarits et les pochoirs, de sorte que les élèves doivent en garder une trace (description de la forme avec des mots, des dessins, des codages …). Ces différentes possibilités engendrent à leur tour des stratégies distinctes (utilisation d'un lexique spontané ou géométrique / chablonnage / dessin à main levée / encodage …) ;
- limitant le temps à disposition (par exemple par le biais d'un jeu de rapidité). Cela défavorise la stratégie par essais-erreurs coûteuse en temps ;
- Ci-dessous est formulée la consigne correspondant à un jeu de rapidité :

[5] Un document regroupant l'ensemble des tâches développées est disponible à l'adresse suivante : https://www.unige.ch/fapse/dimage/fr/recherche/reconnaissance-de-forme-geometrique/projet-cv/

Les élèves sont installés autour d'une table. Les gabarits sont dispersés sur la table. Chaque élève reçoit le même nombre de pochoirs qu'il dispose en pile devant lui. Au top départ, chaque élève prend le pochoir situé sur le dessus de sa pile. Il doit trouver le gabarit correspondant sur la table. Une fois trouvé, il le prend et l'encastre. Si les deux pièces s'encastrent, l'élève passe au pochoir suivant et le jeu se poursuit. Sinon, il remet le gabarit incorrect sur la table et poursuit sa recherche. Le premier qui a terminé sa pile a gagné. Les élèves ont le droit de passer autant de fois qu'ils l'estiment nécessaire, en mettant le pochoir non souhaité sous leur pile pour y revenir plus tard.

Fig. 7 : Description de la tâche « Retrouve la bonne forme – le jeu de rapidité »

- réduisant partiellement la vision. Cela rend la vision iconique inopérante, toutefois c'est toujours la vue qui pilote l'action. Dans ce cas, on reproduit artificiellement une situation correspondant au macro-espace, dans le sens où il devient nécessaire d'effectuer des recollements des différentes parties pour que la forme soit entièrement vue/reconstruite ;

Fig. 8 : Exemples de tâches où la vision est partielle, car se fait à travers une « fenêtre » à déplacer sur la forme à identifier

- réduisant complètement la vision, par exemple en insérant des gabarits dans un sac où la/les main(s) peuvent être plongée(s). Dans ce cas, c'est le toucher qui pilote l'action ;
- modifiant la taille des pièces. Dans le cas où les pièces sont suffisamment grandes par rapport à la taille des élèves, cela reproduit une situation dans le méso-espace. Les élèves ne peuvent visualiser qu'une seule forme, voire une deuxième à proximité, à la fois. Le recours à la perception globale diminue comme dans le cas où il y a un éloignement spatial des formes.
  De plus, le fait de pouvoir se mettre sur/dans le pochoir ou gabarit géant peut modifier le rapport de l'élève à la forme.

Fig. 9 : Exemple de l'usage de pièces en grand format

Il importe également de préciser que les tâches varient selon les registres ostensifs en jeu. En effet, selon que les systèmes des signifiants accessibles et utilisables par les élèves sont des supports oraux/écrits, des représentations visuelles (dessins) ou un matériel manipulable, l'activité cognitive engagée peut varier.

La figure ci-dessous recense des tâches proposées pour des élèves de 1H-2H à partir du jeu sur les variables didactiques décrites ci-dessus, en spécifiant s'il s'agit d'activités *en groupes, collectives* ou *individuelles*. Cela laisse entrevoir un fragment de l'ensemble des possibles encourageant ainsi les professionnels de l'enseignement à la création d'autres tâches en fonction de leurs élèves et degrés d'enseignement.

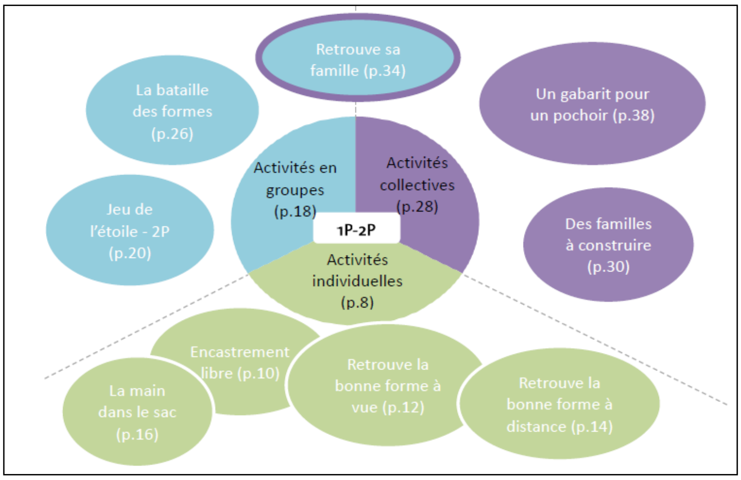


Fig. 10 : Recension des tâches pour les élèves de 1H-2H avec le matériel pédagogique développé pour la géométrie au cycle 1

Observations dans différents contextes

Précisons tout d'abord qu'il s'agit ici d'une recherche initiée il y a peu et dont les premiers résultats discutés dans cet article ne concernent que deux établissements d'enseignement spécialisé. Le premier accueille des élèves présentant des troubles du comportement et de l'apprentissage et le second des élèves considérés comme ayant des troubles du spectre autistique (TSA). Dans le premier lieu, 4 élèves sont concernés et 7 dans l'autre. En moyenne 45 minutes ont été consacrées par élève en les accueillant par groupes de 2-3.

Élèves présentant des troubles du comportement et des apprentissages

Dans l'établissement spécialisé avec les élèves présentant des troubles du comportement et des apprentissages, les 4 élèves sont entrés dans les tâches proposées facilement, ce qui peut être le signe d'une dévolution réussie. Certaines tâches sont toutefois abandonnées rapidement forçant l'expérimentateur à passer à autre chose.

Les objectifs visés ont bien été atteints, à savoir le constat d'une certaine flexibilité du regard sur les formes en fonction des situations proposées. Aucune distinction particulière n'est observée entre ces élèves et ceux des classes régulières du point de vue des procédures mises en œuvre ou du lexique employé. Quelques événements particuliers peuvent toutefois être relevés par rapport au cas des élèves de l'enseignement régulier. Par exemple un des 4 élèves se met à bouger très rapidement la fenêtre (dans l'activité en Fig. 8) par laquelle on découvre normalement des visions partielles de la forme. Ce jeu de mouvement rapide lui permet d'obtenir une vision globale du dessin de la forme dissimulée. De cette manière il se détourne de la tâche initialement prévue.

Avec les élèves de l'enseignement régulier, deux à trois tâches sont proposées en 45 minutes d'expérimentation. Dans ce contexte de l'enseignement spécialisé, plus du double sont données et pour chaque élève dans un ordre différent, mais directement en lien avec ses propres expérimentations. Le suivi des tâches s'inscrit ainsi dans une logique plus individuelle qui s'adapte à l'évolution des élèves en fonction de l'objectif poursuivi au fil de la séance, à savoir de tendre vers une flexibilité du regard sur les formes. Le travail est ainsi davantage individualisé. Cet agissement est tout autant attribué (voire plus) à l'expérimentateur qu'aux élèves eux-mêmes et leurs difficultés. En effet, l'expérimentateur n'hésite pas à sauter d'une tâche à l'autre dès qu'il observe des signes de lassitude, angoisse ou autres de la part des élèves. De plus, s'inspirant du principe des jeux de tâches (Favre, 2008), l'expérimentateur n'est pas guidé par la performance (bien que conservant son objectif en arrière-fond). Il pilote dès lors ses actions en fonction des interactions avec le milieu dont l'élève fait partie. La liste conséquente des tâches disponibles permet à l'expérimentateur de rebondir facilement en sortant une nouvelle carte de son jeu chaque fois que souhaité (Favre, 2008).

Des tâches impliquant la rapidité (où la variable temps est prise en compte) ont été proposées à trois des 4 élèves. Ce type de tâches a un bon potentiel ludique, mais oriente également vers une logique de performance plutôt que vers le développement de connaissances. Ne connaissant pas les élèves en amont des expérimentations, une certaine prudence a été de mise quant à la proposition de ces tâches. Une certaine excitation a également été observée chez les élèves de l'enseignement régulier face à ce type de tâches.

Concernant les manipulations, les 4 élèves observés font constamment le tour des pochoirs et gabarits avec leurs doigts. Le registre manipulatoire semble donc important. Les consignes courtes et simples favorisent l'entrée dans les tâches des élèves, comme ce fut le cas dans les classes régulières. De manière générale, il semble que, dans ce contexte et avec les 4 élèves concernés, le matériel soit utilisable à condition de possibles adaptations mineures. Le jeu sur les variables didactiques ainsi que la quantité et variété de tâches à disposition permettant à l'expérimentateur de rebondir de tâche en tâche sont probablement à l'origine du bon processus de dévolution observé avec les 4 élèves de cet établissement. Il importe toutefois de retourner dans ce type d'établissement afin d'expérimenter davantage et affiner ces premiers constats.

Élèves considérés comme ayant des troubles du spectre autistique

Avec les 7 élèves considérés comme ayant des troubles du spectre autistique, des différences significatives apparaissent, que ce soit dans la réalisation des tâches par les élèves ou dans les interactions avec l'expérimentateur.

Il y a par exemple quasi absence de manipulation des pièces contrairement aux élèves des deux autres contextes.

De plus, il semble que la majorité des élèves, confrontés à deux pièces qui ne divergent que par une seule caractéristique, ne semblent pas identifier qu'il s'agit de pièces différentes. Dans ce cas, l'expérimentateur peut soit expérimenter de nouvelles pistes pour en savoir davantage sur la perception des caractéristiques, soit creuser du côté des représentations globales. Dans le premier cas, pas exploré, il pourrait par exemple demander « laquelle ressemble le plus ? » (au regard de l'assortiment sélectionné dans la Fig. 11 ci-dessous). La réponse pourrait orienter l'expérimentateur sur une éventuelle caractéristique qui serait plus prégnante chez l'un ou l'autre des élèves.

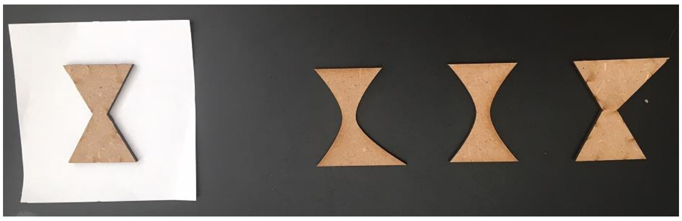


Fig. 11 : Proposition de tâche potentielle pour détecter si certaines caractéristiques sont identifiées par les élèves

Durant l'expérimentation, un travail sur les ressemblances entre pièces de la collection et objets du quotidien a été proposé (favorisant ici davantage la vision globale plutôt que celle par les caractéristiques) par un jeu de mimes permettant de reconvoquer ces ressemblances tout au long de la séance avec les élèves. Les propositions effectuées par ces 7 élèves ont mis en évidence des associations peu utilisées - voire pas du tout - par les 4 élèves de l'autre institution et les élèves des classes régulières, comme la référence aux « épines », « mâchoires », « croissants », « pingouins », « pieds », « chaussures » et « boucliers ».

Un autre aspect surprenant concerne le fait que les 7 élèves n'entraient pas dans les tâches prévues initialement. Le processus de dévolution n'est donc pas le même que dans les deux autres établissements. Les contraintes des consignes « le plus vite », « sans regarder », « en un seul essai » etc. n'étaient pas prises en compte sauf lorsque le milieu matériel le contraignait. Dès lors que ces contraintes n'étaient pas prises en considération, les élèves se retrouvaient à chaque fois dans la même tâche, à savoir celle d'encastrement libre. Il n'est donc pas étonnant de constater une certaine lassitude et l'envie de passer à autre chose. Cet « autre chose » a pris des tournures intéressantes même si inattendues par l'expérimentateur. Les élèves exploraient le milieu, comme les images de la figure ci-dessous le montrent :

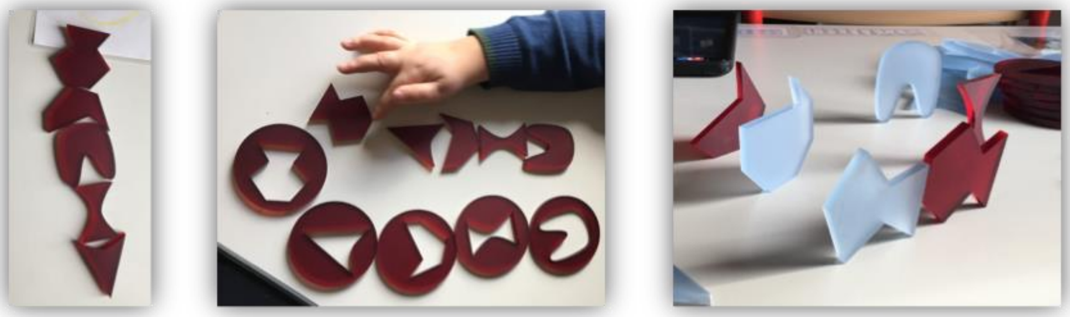


Fig. 12 : Exemple d'activités inattendues avec des élèves considérés comme ayant des troubles du spectre autistique

Afin de tenter de comprendre ce que fait l'élève dans les trois images ci-dessus, des relances sont envisageables. Par exemple, en lien avec la première image, il est possible de donner 4-5 autres gabarits à l'élève et lui demander de les mettre à la suite. Puis de recommencer avec d'autres gabarits encore une fois, puis une autre encore, avec l'idée de pouvoir faire émerger des régularités dans la logique adoptée. D'autres relances peuvent être imaginées : le type de bords qui se touchent, les trous laissés dans la chaîne, la forme générale que cela engendre … L'objectif principal étant avant tout que l'élève explore le milieu et par conséquent que le processus de dévolution opère même si l'expérimentateur n'a pas toutes les clés de lecture en main. Sur la seconde image, l'élève apparie pochoirs et gabarits sans encastrement. Pour quelle raison mettre les gabarits et pochoirs côte à côte ? En quoi cette valeur de variable est pertinente pour cet élève ? Est-ce aussi une variable intéressante pour les autres contextes d'enseignement ? Pour finir, dans la dernière image les formes sont disposées sur leurs tranches passant ainsi de la 2D à la 3D. Ce positionnement permet de visualiser des vides/trous/tunnels au niveau de la table. La notion de convexité est ici sous-jacente. Différentes relances sont donc également possibles avec par exemple la demande de recherche de tous les gabarits qui ne provoqueront jamais de vide quel que soit le côté sur lequel on le pose sur la table … Ce genre de tâches avait été expérimenté par les élèves des classes régulières concernant les pièces symétriques et non symétriques. Il leur avait effectivement été demandé de mettre d'un côté toutes les pièces qui entrent dans le pochoir correspondant sans jamais nécessiter de retournement et les autres de l'autre côté. La tâche équivalente avec l'aspect convexe/non convexe n'avait pas été pensée a priori, probablement car elle nécessite un changement de dimension. Il est dès lors possible d'ajouter la variable didactique « type de dimension » en introduisant la valeur « 3D » pour travailler spécifiquement sur la caractéristique convexe / non convexe avec les élèves.

Ainsi, même si parmi l'ensemble des tâches disponibles a priori seules deux, voire trois, semblent véritablement engager de la même manière les 7 élèves de cet établissement, le matériel leur a permis de faire des expérimentations qu'il importe de ne pas considérer comme des « bizarreries ». Ce n'est que lorsqu'un élève se lève de table et s'en va qu'il faut véritablement considérer l'échec du processus de dévolution.

Il ressort également que les tâches impliquant un changement de registre, du manipulatoire au graphique (à partir de dessins de formes) ont fonctionné dans certains cas. Par exemple l'activité de la

Fig. 8 a permis à beaucoup d'élèves de s'investir. Concernant le registre discursif, il était peu pertinent avec ces 7 élèves ayant peu de langage. Les activités de communication entre pairs n'ont donc pas été proposées.

Premières conclusions

Les quelques observations faites au sein de deux établissements d'enseignement spécialisé distincts permettent de mettre en évidence qu'un travail transpositif est nécessaire pour passer d'un contexte à l'autre. En effet, bien que le processus de dévolution semble opérer dans les trois contextes, il diffère d'un lieu à l'autre. Pour cette raison, il est nécessaire de « penser » des dispositifs adaptés pour favoriser la dynamique des interactions dans le contexte spécialisé. Selon la théorie des situations didactiques, la dévolution ne serait possible que :

> si l'élève investit sa rationalité, met en œuvre et finalise une stratégie et si le milieu didactique lui fournit une rétroaction sur la justesse des connaissances qu'il a engagées. L'information que l'élève tire de la rétroaction permet alors de relancer l'interaction, s'il y a échec de la stratégie. (Giroux, 2015, p.6)

Partant de ces propos, il est donc nécessaire d'apporter des adaptations au sein des différents contextes d'enseignement, voire au sein d'un même contexte, et ce, en jouant sur les variables didactiques à disposition.

Le jeu sur les variables didactiques permet de générer, en fonction des valeurs choisies, un ensemble de tâches adaptées à un certain public et d'exclure toutes celles potentiellement non productives. Par exemple, dans le cas des élèves considérés comme ayant des troubles du spectre autistique, il est nécessaire que les contraintes de la tâche soient prises en charge par le milieu matériel, faute de quoi les élèves ne les prennent pas en considération, au risque de se retrouver dans des tâches répétitives et de mettre en péril le processus de dévolution.

L'apparition d'activités « clandestines » et difficilement « décodables » par l'expérimentateur a été constatée avec les 7 élèves considérés comme ayant des troubles du spectre autistique. Ces tâches permettent d'envisager des nouvelles relances, de sortir des chemins balisés et aussi de découvrir des nouvelles activités potentielles pour les autres contextes qui n'avaient pas été pensées a priori.

L'étude de cas réalisée met également en exergue que le jeu sur les registres ostensifs n'agit pas de la même manière selon le contexte. Par exemple, les tâches impliquant de la communication entre pairs, ou avec l'expérimentateur, se révèlent inopérantes dans un contexte où les élèves n'ont pas, ou peu, accès au langage.

Du point de vue de la prise en main de ce matériel pédagogique par les professionnels, les attentes sont, semble-t-il, différentes. Les enseignants de l'école régulière souhaitent pouvoir s'appuyer sur une séquence d'enseignement qu'ils pourraient suivre sans devoir réaliser un travail de planification conséquent. Les enseignants spécialisés travaillant avec des élèves présentant des troubles du comportement et de l'apprentissage semblent preneurs d'une série de tâches avec lesquelles jongler en fonction des connaissances et états émotionnels de leurs élèves. Quant aux enseignants spécialisés avec les élèves considérés comme ayant des troubles du spectre autistique, leur principale préoccupation, à ce stade de la recherche, semble de se rendre compte si les élèves peuvent entrer dans le type d'activités proposé.

Ne serait-ce précisément pas la spécificité des processus de dévolution dans les trois contextes qui fait que la « prise en main » du matériel par les enseignants n'est pas la même ?

A ce stade, il est donc nécessaire de retourner travailler avec des élèves de l'enseignement spécialisé afin de confronter ces premiers résultats à la réalité du terrain.

BIBLIOGRAPHIE

Bessot, A. (2004). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Cahier du laboratoire Leibniz, 91*, 1-29.

Briand, J., Loubet, M. & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle : situations et analyses.* Paris : Hatier.

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998).* Repéré à: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coutat, S. & Vendeira, C. (2015). Quelles ressources pour la reconnaissance de formes à l'école maternelle? In: *Actes du 41e Colloque COPIRELEM – (Mont de Marsan 2014*) Repéré à https://archive-ouverte.unige.ch/unige:74972

Coutat, S. & Vendeira, C. (2015). Des pointes, des pics et des arrondis en 1P-2P. *RMé, 223*, 14-19.

Coutat, S. & Vendeira, C. (2018). Document d'accompagnement : Activités pour la classe de 1P-2P, Espace (MSN11), Figures géométriques, Travailler autrement les formes géométriques au cycle 1. [consulté sur] https://www.unige.ch/fapse/dimage/fr/recherche/reconnaissance-de-forme-geometrique/projet-cv/

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Favre J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N, 82*, 9-30.

Gentaz, E. (2013). Comment aider les enfants de 5-6 ans à connaître les figures géométriques planes ? Un point de vue des sciences cognitives de l'éducation. *Actes du XXXXème colloque Copirelem*, 1-7.

Giroux, J. (2013). Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire : Problématique et repères didactiques. *Education et Didactique, 7(1)*, 59-86.

Giroux, J. (2015). Difficultés des élèves en mathématiques au primaire : les apports de la didactique. *Math-école, 224*, 4-7.

Pinet, L. & Gentaz, E. (2008). Évaluation d'entraînements multisensoriels de préparation à la reconnaissance de figures géométriques planes chez les enfants de cinq ans : étude de la contribution du système haptique manuel. *Revue française de pédagogie* [En ligne], *162*. URL : http://rfp.revues.org/753

Vendeira, C. & Coutat, S. (2017). « C'est une montagne ou une trompette ? » Entre perception globale et caractéristiques des formes aux cycles 1 et 2. *Grand N, 100*, 79-103.

EVALUER A TRAVERS UN JEU MATHEMATIQUE EN 1H : LE JEU « LAPINS ET CAROTTES »

Pernelle Grobet, Charlotte Theytaz

Etudiantes, Université de Genève

CONTEXTE

Dans le cadre de notre formation en enseignement primaire à l'Université de Genève, nous effectuons un certain nombre de stages en responsabilité. L'expérience que nous allons relater se déroule dans le cadre de notre formation au sein d'une classe de 1H de 21 élèves. La formatrice de terrain qui nous a accueillis dans sa classe a travaillé avec ses élèves sur le jeu problème « Lapins et carottes » des moyens d'enseignement officiels (plateforme ESPER). De notre côté, nous avons évalué les élèves sur ce jeu. A cet effet, nous avons conçu un fichier d'évaluation ainsi qu'une grille d'observation pour mieux détailler les stratégies des élèves.

EXPLICATIONS DU JEU « LAPINS ET CAROTTES »

Dans ce jeu, les enjeux sont d'utiliser le nombre pour se déplacer sur le plan de jeu et de comparer deux collections. Les règles sont les suivantes :

> « Au premier tour, placez votre lapin sur une case carotte, puis à tour de rôle lancez le dé et avancez sur la piste, dans un sens ou dans l'autre.

Ensuite :

- si vous tombez sur une case fleur, vous rejouez ;
- si vous tombez sur une case carotte, vous prenez le nombre de cartes carotte indiqué par la case ;
- si vous tombez sur une case botte de carottes, vous relancez le dé et vous prenez le nombre de cartes carotte indiqué par le dé ;
- si vous tombez sur une case jardinier, vous relancez le dé et vous redonnez le nombre de carottes indiqué par le dé. »

Le jeu se termine lorsqu'il n'y a plus de cartes carotte dans la corbeille. Le gagnant est celui qui a le plus de cartes carotte dans son panier. (ESPER, http://www.ciip.esper.ch/#/sequence/38/activite/162/ressource/TYPE_MATH_ACTIVITE)

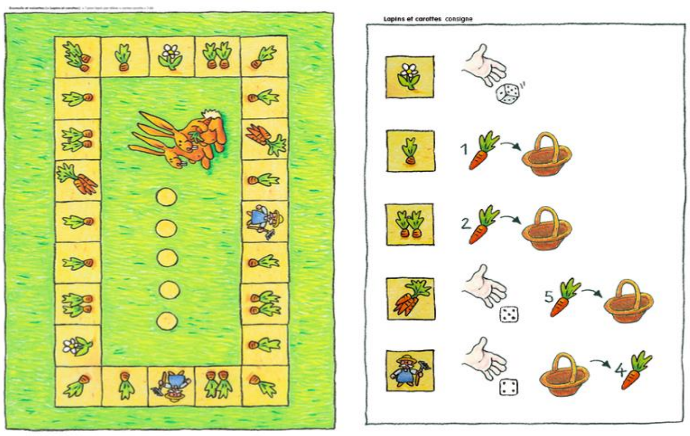


Fig. 1 : Plateau de jeu et règles du jeu (ESPER)

Dans ce jeu de plateau, le hasard intervient de manière incontournable lors du lancé du dé par les élèves. Toutefois, une fois le dé jeté, deux possibilités de déplacements du pion s'offre à l'élève. Dès lors, la stratégie experte est celle d'anticiper ces deux possibilités afin de choisir la plus avantageuse (celle permettant d'obtenir le plus de carottes et d'éviter en toute circonstance de se rendre sur la case « jardinier » qui implique la perte de carottes). Nous précisons que cette stratégie d'anticipation n'est visée que dès la 2H.

Passation de l'évaluation formative

Selon la *Directive : évaluation des compétences et des connaissances des élèves*, (Directeur du service enseignement et évaluation, 2018), l'évaluation tout au long du cycle 1 est formative. « La progression de l'élève est évaluée sur la base de traces significatives d'apprentissage, d'observations critériées ou de travaux écrits ponctuels » (p.3).

Afin de pouvoir observer les élèves jouer, nous les avons pris par groupe hétérogène de 3 ou 4, à différents moments durant l'accueil. Les élèves ayant déjà joué plusieurs fois avec leur enseignante n'ont pas eu de grandes difficultés à se rappeler des règles. Pour pouvoir les observer plus finement, nous étions deux stagiaires à prendre des notes pendant chaque partie, qui ont durées entre 5 et 10 minutes. Nous avons laissé les élèves jouer sans trop les interrompre afin d'identifier leurs stratégies de jeu, comment ils géraient le fait d'attendre leur tour et s'ils observaient les actions de leurs camarades, ou encore s'ils se régulaient en cas de désaccord. Lorsque les élèves étaient bloqués, nous les avons questionnés et guidés pour qu'ils puissent continuer. Parfois, nous les avons interrogés afin qu'ils verbalisent leur stratégie (par exemple, "pourquoi tu comptes dans les deux sens avant de déplacer ton pion ?").

Durant les différentes parties, les élèves avaient un peu de peine à savoir à qui était le tour de jouer. Certains confondaient les règles en lançant le dé ; ils ne se rappelaient plus s'ils devaient avancer ou prendre le nombre de carottes indiquées par le dé. De manière générale, nous avons pris le parti de ne pas intervenir auprès des élèves aussitôt qu'une difficulté se faisait sentir, nous souhaitions qu'ils se régulent entre joueurs. C'est seulement lorsque cela ne fonctionnait vraiment pas que nous proposions des relances par le biais de questions. Par exemple en faisant référence à la Fig. 1 qui explique la signification des différentes cases. Notons toutefois que dans l'ensemble, les élèves se sont bien débrouillés.

Critères d'évaluation

Ayant un statut de stagiaires, nous avons été conseillées par l'enseignante titulaire de la classe afin de choisir les critères évaluatifs pour l'activité réalisée en classe. Par exemple, un travail avait été réalisé depuis le début de l'année sur le lien entre le nombre et la constellation de points sur les dés. Les élèves ont également appris, grâce à d'autres jeux de plateau, à déplacer leur pion en fonction des constellations de points du dé. Le dénombrement est également travaillé dans cette classe depuis le début de l'année. Ainsi, les objectifs visés par ce jeu sont que les élèves sachent dénombrer une petite collection d'objets (en prenant le bon nombre de carottes), associent un nombre à une constellation de points sur les dés et se déplacent sur un plateau de jeu en s'appuyant sur la comptine numérique.

Partant de ces objectifs, nous avons pu déterminer nos différents critères d'évaluation formative.

- Le premier critère est « je reconnais les constellations sur le dé ». Nous attendons des élèves qu'ils arrivent à savoir à quel nombre correspondent les points sur le dé. Les stratégies possibles sont l'association entre la disposition des points du dé et le nombre correspondant ou par comptage des points et attribution du dernier mot-nombre prononcé au cardinal
- Le deuxième est « j'avance mon pion correctement sur le plateau de jeu ». Les élèves doivent compter correctement les cases en avançant (ou reculant) leur pion, sans compter la case sur

laquelle le pion se trouve déjà et sans compter plusieurs fois la même case ou en oublier (énumération).

- Le troisième critère est « je prends (ou rend) le bon nombre de carottes ». Les élèves doivent procéder par comptage ou correspondance terme à terme avec le dessin des carottes ou les points sur le dé).
- Le dernier est « je connais la signification des différentes cases ». Nous attendons des élèves qu'ils aient retenu les actions à réaliser selon les différentes cases. Ce critère, bien que lié à ce jeu particulier et n'impliquant pas des compétences sur le nombre, a été conservé afin d'évaluer si les élèves sont capables de se référer à la consigne de jeu illustrée en cas de besoin (Fig. 1).

Selon les injonctions officielles, « en 1H et 2H, l'enseignant n'indique en aucun cas si l'objectif d'apprentissage ou l'objectif de l'activité est « atteint » ou « à reprendre ». Dans ces années de scolarité, les évaluations servent avant tout à décrire ce que l'élève est capable de faire dans les activités proposées » (Burdet, 2015, p.1).

Pour ces différentes raisons, pour chaque critère en lien avec le jeu, nous avons établi trois degrés de réussite tel que proposé sur le site des disciplines EP (https://edu.ge.ch/ep/msn/mathematiques/1p-8p-propositions-de-fichets-generiques). Dans le cadre de ce jeu, nous avons opté pour une évaluation en termes de : souvent, parfois (environ la moitié du temps), pas encore. Afin de laisser une trace de l'évaluation formative pour les parents d'élèves, nous avons réalisé le document suivant qui a été complété pour chaque élève et qui figure dans son portfolio (comme activité significative) :


Prénom:.. Date :......................

Mathématiques 1P
Je joue à un jeu mathématique.

Jeu : Lapins et carottes

Objectifs :

- Dénombrer une petite collection d'objets.
- Constituer une petite collection d'objets.
- Mémoriser la suite numérique.

Lorsque je joue:

	Souvent	Parfois	Pas encore
Je reconnais les constellations sur le dé.	☐	☐	☐
J'avance mon pion correctement sur le plateau de jeu.	☐	☐	☐
Je prends le bon nombre de carottes.	☐	☐	☐
Je connais la signification des différentes cases.	☐	☐	☐

Remarques éventuelles : ________________________

Fig. 2 : Fichet d'évaluation

Deux critères suplémentaires ont été évalué formativement mais ne figurent pas explicitement sur le fichet d'évaluation étant attendu seulement dès la 2H. Toutefois ces critères peuvent donner lieu à des commentaires dans la partie « remarques éventuelles ». Ces critères sont :

- « J'anticipe les deux possibilités de déplacement de mon pion afin d'aller vers la case la plus avantageuse » (stratégie experte pour les 2H)
- « Je vérifier ce que font les autres joueurs » (bon nombre sur le dé pour avancer et prendre ou donner le bon nombre de carottes)

Afin d'évaluer au mieux le travail des élèves, nous avons détaillé pour chaque critère d'évaluation les procédures attendues pour que l'élève se voit attribuer une croix dans *souvent*, *parfois* ou *pas encore*.

La Fig. 3 les stratégies possibles qui ont guidé nos observations en classe pour l'évaluation formative. Ces dernières ont été enrichies de quelques procédures observées chez certains élèves qui n'avaient pas été pensées a priori (en police grisée).

souvent	***parfois***	***pas encore***
1. Je reconnais les constellations sur le dé.		
- Lorsqu'un élève reconnait la constellation des points du dé et lui attribue le nombre correspondant. - Lorsqu'il reconnait la constellation des points du dé (par exemple en disant le mot-nombre à haute voix), mais qu'il procède quand-même au comptage des points (par habitude ? ou pour vérifier ?) .	- Lorsqu'un élève a besoin de procéder plusieurs fois au comptage des points, mais que ce n'est pas systématique.	- Lorsqu'un élève a besoin de compter de manière quasi systématique les points de la constellation ou lorsqu'il se trompe dans l'attribution du nombre correspondant à la constellation obtenue.
2. J'avance correctement mon pion sur le plateau de jeu.		
- Lorsqu'un élève compte 0 sur la case de départ, puis avance normalement. - Lorsqu'un élève se trompe occasionnellement et arrive à se corriger quand on lui fait remarquer.	- Lorsqu'un élève oublie plusieurs fois mais de manière non systématique de compter une case. - Lorsqu'un élève compte plusieurs fois, mais de manière non systématique la case de départ (par exemple lorsqu'il avance de 3 cases au lieu de 2).	- Lorsqu'un élève oublie quasi toujours de compter une case. - Lorsqu'un élève compte quasi toujours la case de départ.
- Lorsqu'un élève ne s'arrête pas au nombre obtenu sur le dé ou qu'il s'arrête avant, les stagiaires le relance pour voir ce qu'il en est et afin de pouvoir évaluer la bonne compétence.		
3. Je prends (rend) le bon nombre de carottes en association avec la case du plan de jeu		
- Lorsqu'un élève prend/rend toujours ou presque le bon nombre de carottes.	- Lorsqu'un élève ne prend/rend pas toujours le bon nombre de carottes.	- Lorsqu'un élève prend/rend presque systématiquement le mauvais nombre de carottes.

<table>
<tr><td colspan="3">Ci-dessous des exemples de situations lors desquels les élèves ne prennent/rendent pas le bon nombre de carottes pour d'autres raisons que des difficultés de dénombrement[1] :
- Lorsqu'un élève se trompe entre le nombre de carottes dessiné sur la case et le nombre de points sur le dé (que ce soit pour se déplacer ou pour prendre/rendre des carottes) ;
- Lorsque sur la case « botte » un élève relance le dé puis veut déplacer son jeton au lieu de prendre des carottes ;</td></tr>
<tr><th colspan="3">4. Je connais la signification des différentes cases</th></tr>
<tr><td>- Lorsqu'un élève associe toujours ou presque les bonnes actions aux différentes cases du jeu</td><td>- Lorsqu'un élève, plusieurs fois mais de manière non systématique, ne se souvient plus de la signification d'une case et qu'il demande ou attend qu'on la lui indique (problème de mémoire ? de capacité à se référer au document existant ? Ne comprend pas le codage des consignes ?)
- Lorsqu'un élève, plusieurs fois mais de manière non systématique, fait sur une case ce qui est attendu sur une autre (par exemple en relançant le dé plutôt qu'en prenant des carottes).
(problème de confusion entre plusieurs règles)</td><td>- Lorsqu'un élève fait systématiquement (ou quasi) ce qui est indiqué dans la colonne juste à gauche</td></tr>
<tr><th colspan="3">5. J'anticipe les deux possibilités de déplacement de mon pion afin d'aller vers la case la plus avantageuse (stratégie experte pour les 2H)</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Un élève utilise cette procédure et l'explique à un autre qui indique qu'il n'a pas envie de faire comme ça, que ce n'est pas une bonne idée selon lui.</td></tr>
<tr><th colspan="3">6. Je vérifier ce que font les autres joueurs (bon nombre sur le dé pour avancer et prendre ou donner le bon nombre de carottes)</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Un élève recompte les carottes prises par sa camarade et dit qu'elle en a pris deux en trop.</td></tr>
<tr><td colspan="3">- Un élève vérifie systématiquement ce que fait ses camarades de jeu. Il leur explique aussi quand ils ne se souviennent plus des règles.</td></tr>
</table>

Fig. 3 : Grille d'observation des stratégies possibles et leur classement selon *souvent*, *parfois* ou *pas encore*. Pour les critères 5 et 6 aucune stratégie particulière n'avait été anticipée. Il s'agissait d'observer globalement ces deux critères.

Cette grille d'observation (Fig. 3) a été créée et utilisée par les stagiaires lorsque les élèves étaient en activité.

[1] Ces cas de figurent n'ont pas été évalué dans ce critère, mais dans le 4ème qui concerne la compréhension plus globale du jeu particulier et des consignes s'y rapportant.

Analyse des procédures des élèves et évaluation

Tous les élèves sont parvenus à reconnaître les constellations de points de 1 à 6 sur le dé, mais certains recomptaient quand même les points du dé « pour être sûrs ».

Concernant le déplacement de leur pion sur le plateau, certains comptaient le 1 sur la case où se trouvait déjà le pion au lieu de faire 1 en avançant d'une case. Pour éviter cela, certains comptaient le 0 sur place et avançaient ensuite. Cette stratégie a été suggérée par notre formatrice, ayant aussi remarqué que certains avaient du mal à s'en souvenir. D'autres élèves ne parvenaient pas à déplacer correctement leur pion. En effet, ils comptaient souvent trop vite ce qui leur faisait sauter des cases ou compter deux fois la même. Après une remarque des autres joueurs ou de l'enseignante, les élèves recommençaient depuis la case de départ. Il arrivait parfois qu'ils ne se souviennent plus d'où ils étaient partis et ne savaient de ce fait plus où replacer leur pion. D'autres encore, déplaçaient le pion d'un autre joueur.

Les élèves n'ont pas rencontré de difficulté à prendre ou rendre le bon nombre de carottes. Quand les élèves en piochaient, ils les prenaient une à une et les comptaient à haute voix pour construire leurs collections. Certains les empilaient, d'autres les alignaient les unes à côté des autres. Lors d'une partie, une élève avait déjà deux carottes au préalable, elle en a pris cinq de plus en arrivant sur une case botte. Un autre élève a recompté les carottes de sa camarade et en a compté sept. Il lui a dit qu'elle en avait pris trop, car elle devait n'en prendre que cinq. Il ne s'était pas aperçu ou ne se souvenait plus qu'elle en avait déjà deux avant cela. Pour éviter les confusions de ce type, nous leur avons proposé d'aligner les carottes supplémentaires séparément de celles déjà piochées.

Ensuite, il arrivait parfois, qu'en arrivant sur une case carotte les élèves voulaient prendre le nombre de carottes indiqué par le dé, alors qu'ils étaient sur une case « une ou deux carottes ». Certains ont donc eu un peu de mal à différencier le nombre de carottes à prendre du nombre sur le dé pour avancer.

Concernant la case botte, les élèves savaient qu'ils devaient rejouer, mais en relançant le dé, au lieu de prendre le nombre de carottes indiqué par celui-ci, ils avançaient leur pion. Ils confondaient le fait de lancer le dé pour se déplacer ou pour savoir combien de carottes prendre. Néanmoins, pour la case « jardinier », les élèves ont bien intégré qu'ils devaient rendre des carottes et ne se sont pas trompés.

Nous avons observé que la stratégie experte, expliquée précédemment, n'était utilisée que par une minorité de la classe. Bien que certains élèves l'aient expliqué à leurs camarades, ceux-ci ne l'utilisaient toutefois pas. S'ils se rendaient sur la case la plus avantageuse, cela n'était que par hasard, car ils le faisaient sans comparer les deux options. Néanmoins, lorsqu'ils faisaient 1 avec le dé, ils parvenaient la plupart du temps à aller dans la meilleure direction. Ils ont usé de cette stratégie quand le déplacement était petit, car une petite distance offre une meilleure vision des deux possibilités.

Durant la partie, les joueurs vérifiaient peu ce que faisaient les autres. Ils étaient parfois passifs et se concentraient uniquement lorsque c'était à leur tour de jouer. Cela montre qu'il est difficile à cet âge-là de se décentrer et d'être concentré tout au long de l'activité pour observer les actions des autres joueurs. Toutefois, certains ont tout de même interrompu le jeu s'ils n'étaient pas d'accord avec une action. On observe que malgré la durée du jeu certains arrivent à être attentifs par moments en suivant ce qu'il se passe.

Les élèves se sont souvenus que l'absence de carotte dans le panier marquait la fin de la partie. Pour comparer les collections et désigner le gagnant en fin de partie, les élèves ont procédé par dénombrement ou ont déduit perceptivement laquelle était la plus grande. En effet, quand les collections étaient visuellement comparables, par exemple 6 carottes contre 3, ils arrivaient à dire qui avait gagné sans compter les cartes. Lorsque les collections ne variaient que d'une carte (6 contre 5), chaque élève comptait sa collection pour la comparer à celles des autres. En comptant, ils pointaient la carte comptée et l'écartaient des autres cartes pour ne pas la compter deux fois.

Conclusion

Il s'agissait d'une première expérience d'évaluation sous forme de jeu. Après avoir réalisé cette évaluation, nous nous sommes rendu compte qu'il n'était pas évident d'observer les élèves en train de jouer. En effet, il faut trouver des moments propices aux observations des petits groupes d'élèves et s'assurer que le reste de la classe fonctionne en autonomie. Il est également nécessaire d'avoir une vision d'ensemble des élèves en train de jouer pour pouvoir les évaluer en même temps dans un contexte de classe normal. Dès lors, l'utilisation d'une grille d'évaluation peut être une aide non négligeable à la réalisation de cette tâche afin d'éviter la subjectivité. Toutefois, dans les faits, l'utilisation en classe de la grille présentée dans cette article n'a pas toujours été évidente. En effet, attribuer à une procédure observée une évaluation en termes de *souvent*, *parfois* ou *pas encore* reste difficile. Sur le site des disciplines EP du DIP de Genève, d'autres fichets génériques sont proposés aux enseignants. Par exemple, plutôt que « souvent parfois ou pas encore », il est possible d'évaluer en termes de « avec ou sans aide » ou « ce que j'apprends… » qui permettent une évaluation plus globale que celle adoptée durant notre stage. Ainsi, selon les activités d'évaluations proposées (jeu de plateau ou autres) une réflexion sur le choix des critères peut se révéler essentiel pour la faisabilité du projet.

Bibliographe

Burdet, E. (2015). *Le fichet d'évaluation au Cycle élémentaire.* Service enseignement et évaluation.

Conférence intercantonale de l'instruction publique. (2018). Lapins et carottes. Repéré à http://www.ciip-esper.ch.

Directeur du service enseignement et évaluation. (2018). *Directive : évaluation des compétences et des connaissances des élèves.* Service enseignement évaluation, République du canton de Genève.

Site des disciplines EP : https://edu.ge.ch/ep/

RMÉ POUR CELLES EST CEUX QUI S'INTÉRESSENT À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.revue-mathematiques.ch, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 1 depuis la rubrique *Consultation*.

Contact : revue.mathematiques@gmail.com

Site internet : www.revue-mathematiques.ch