RMé 234

234

RMé

REVUE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE

SEPTEMBRE 2020

ISSN : 2571-516X

SOMMAIRE

COMMENT UNE MOTO AVEC DES ROUES CARREES PEUT-ELLE ROULER ?..................... 5

Jana Lackova 5

POINT DE VUE DIDACTIQUE SUR LES EVALUATIONS NATIONALES FRANÇAISES AU DEBUT DE LA SCOLARITE OBLIGATOIRE 22

Nadine Grapin, Eric Mounier 22

MELI-MELO DANS LES DOMINOS 31

Sylvia Coutat 31

LEÇONS DE LA CLASSE DE MATHEMATIQUES – LES FRACTIONS EQUIVALENTES 42

Jérôme Proulx 42

Chères lectrices, chers lecteurs,

Au moment où la crise sanitaire perdure au lieu de s'estomper comme espéré, permettez-nous d'abord de souhaiter que vous et vos proches vous vous en sortiez indemnes. Signe de temps difficiles, cette nouvelle livraison de RMé comporte un nombre limité d'articles, mais leur qualité compense la quantité et leur variété devrait permettre de plaire à un lectorat d'intérêts hétérogènes.

Ce numéro 234 de la Revue de Mathématiques pour l'école est composé de 4 articles, allant du primaire au secondaire II.

L'article de Sylvia Coutat traite de l'activité, « Méli-mélo » destinée aux petits élèves de 4H (7-8 ans) qui vise à développer le raisonnement et les stratégies de recherche. Il s'agit de recouvrir avec 15 dominos allant de 0-0 à 4-4 des grilles carrées 5 sur 5 comportant les nombres. L'auteure présente les différentes stratégies possibles pour réussir la tâche : étude des cas possibles, analyse logique numérique ou géométrique, ajustement d'essais successifs, association de stratégies, puis analyse celles pratiquées par les élèves. Elle conclut à l'importance des relances des enseignants pour que les enfants capitalisent leurs apprentissages dans cette activité et leur lance un appel pour qu'ils mutualisent leurs pratiques en ce domaine.

Toujours concernant le primaire, Nadine Grapin et Éric Mounier s'intéressent aux évaluations nationales françaises au début de la scolarité obligatoire (élèves de 6-7 ans), en les scrutant d'un point de vue didactique. Choisissant l'évaluation de la numération écrite chiffrée, enjeu principal d'apprentissage des mathématiques au début de la scolarité, ils constatent que certaines des tâches proposées n'évaluent pas les connaissances essentielles du dénombrement. Leur analyse, enrichie des tâches testées, est particulièrement intéressante et met encore une fois encore en évidence les difficultés de l'évaluation des aspects conceptuels des connaissances.

Jérôme Proulx, en tant que didacticien des mathématiques, est présent dans des classes québécoises du primaire et du secondaire (et de l'université) et en profite pour recueillir ce qu'il nomme des « perles mathématiques » proférées par les élèves. Dans son texte sur les fractions équivalentes, il compare les méthodes des élèves du primaire et du secondaire I à propos des fractions équivalentes. En particulier, il constate que les représentations imagées des fractions, sous forme de tranches de pizza ou de carrés de chocolat, largement pratiquées au primaire pour montrer l'équivalence des fractions, deviennent obsolètes, voire auto-interdites, par les élèves du secondaire qui préfèrent s'en tenir à multiplier ou diviser numérateur et dénominateur par un même nombre. On peut cependant se demander si lutter en classe contre la « pression sociale » interdisant aux « grands » la poursuite du travail avec les dessins ne permettrait pas à certains d'entre eux de continuer à donner du sens aux fractions équivalentes et mieux réussir les tâches de ce type.

Avez-vous déjà imaginé de rouler avec un vélo avec des roues carrées ? Pour cela il suffit que la route ne soit pas plate, mais en forme d'une série de fonctions-chaînette ! Partant d'une part d'un ancien article de RMé 229 (Ouailal, Boussaa & Achtaich, 2018) et d'autre part d'un travail de recherche personnel d'un élève du Baccalauréat International, Jana Lackova nous entraine sur les pas de la réflexion de son élève, qui construit sa résolution – dépassant largement les connaissances enseignées en classe – dans l'interaction milieu-média, utilisant à bon escient des informations issues d'internet, des logiciels géométriques comme GeoGebra et d'autres sources mathématiques.

Bonnes lectures à toutes et à tous,

Pour le comité RMé,

Laura Weiss

Ouailal, S., Boussaa, N., & Achtaich, N. (2018). Une situation-problème motivante autour de la fonction exponentielle, *RMé 229*, 39-46. Repéré à https://www.revue-mathematiques.ch/files/7415/2224/0118/RMe229-Ouailal.pdf

COMMENT UNE MOTO AVEC DES ROUES CARREES PEUT-ELLE ROULER ?

Jana Lackova

Université de Genève

INTRODUCTION

Cet article a pour ambition de réagir à l'article présenté dans RMé n°229 par Ouailal *et al.* (2018) et de proposer un autre regard sur l'exploitation de la situation du vélo/moto avec des roues carrées à partir d'un travail d'exploration réalisé par un élève de 17 ans dans le cadre du Baccalauréat International (IB)[1]. Ces auteurs, en prenant comme porte d'entrée la motivation des élèves, proposent un dispositif appelé la *situation-problème motivante* (SPM). La SPM propose un déroulement en trois parties dont effectivement la première lance un défi amusant : « Peut-on rouler avec une bicyclette à pneus carrés ? » (Ouailal *et al.*, 2018, p. 41). L'objectif de cette activité est « d'étudier une fonction générée à partir de la fonction exponentielle, d'exploiter son graphique pour favoriser une modélisation de la courbe sur laquelle on peut dérouler un carré » (p. 41). Par la suite les élèves travaillent sur des types de tâches classiques autour de la fonction (continuité, monotonie, fonction réciproque, etc.) avec la représentation graphique d'une fonction (parabole) connue des lycéens dans la partie 2 et d'une fonction inhabituelle (chaînette) pour la troisième partie. Cependant, le lecteur et les élèves peuvent rester un peu déçus car ils ne sauront pas si et comment on pourrait faire rouler une bicyclette avec des roues carrées. Du fait qu'aucun lien n'est établi entre les parties 2 et 3 et la question initiale, celle-ci ne semble que servir de prétexte pour attirer l'attention des élèves. De plus, ces deux parties visent clairement à travailler la fonction réciproque et, dans ce cas, une autre question de départ en lien avec la fonction réciproque et à laquelle les élèves auraient pu répondre, aurait été plus appropriée.

UNE BRÈVE ANALYSE *A PRIORI* ET LA SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME

Avant de regarder le travail d'un élève, plongeons ensemble dans le problème. La première question qui se pose est de comment modéliser la surface sur laquelle la moto avec des roues carrées peut rouler. Pour le confort de conducteur, il faut que le siège reste tout le temps à une hauteur constante par rapport au sol, ce qui, mathématisé, revient à garder le centre du carré à une hauteur h constante lors du roulement. De plus, la roue doit tourner sans glisser, c'est à dire qu'elle doit être tangente à la surface au point de contact, le centre doit être aligné verticalement avec le point de contact et la longueur de la « bosse » doit être égale à la longueur du côté du carré (voir Fig.1).

---

[1] L'IB est une fondation éducative à but non lucratif établie à Genève en 1968 pour répondre aux besoins des écoles internationales et de la communauté internationale. Elle propose quatre programmes éducatifs pour les élèves âgés de 3 à 19 ans couvrant ainsi tous les degrés de la scolarité.

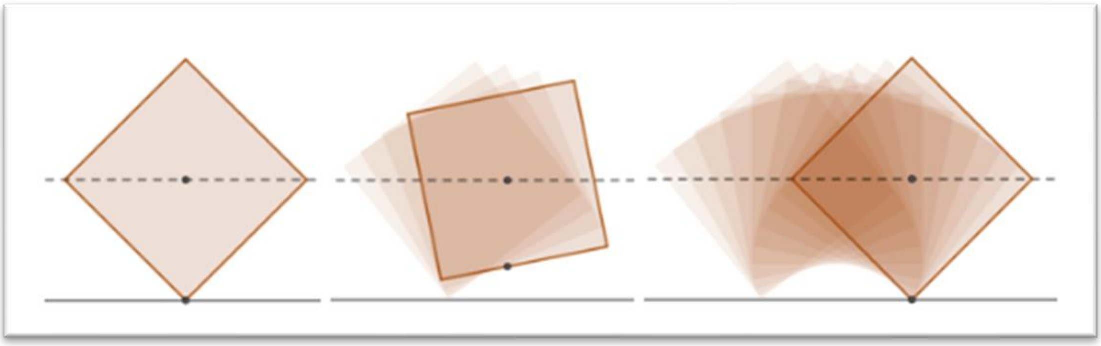


Fig. 1 : Roulement du carré

Maintenant, si on considère une position quelconque du carré, on peut construire deux triangles rectangles comme le montre la Figure 2.

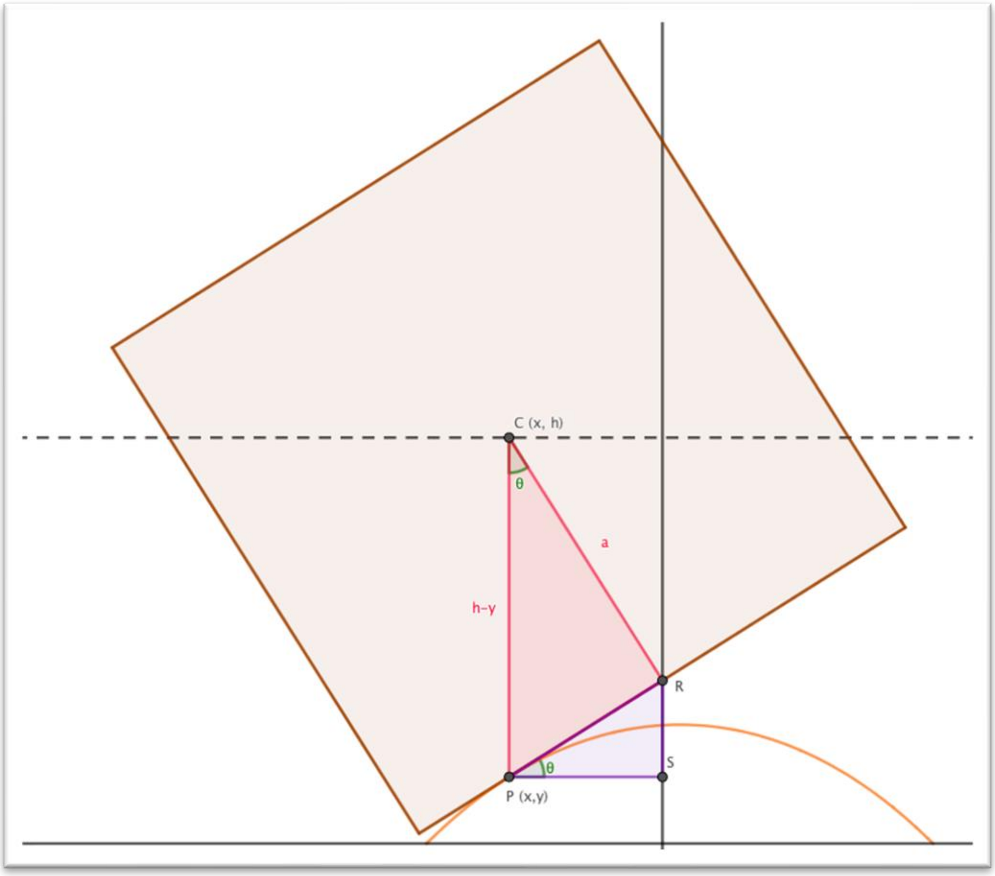


Fig. 2 : Position quelconque du carré

La clé de la modélisation est que l'angle θ correspond à la pente de la tangente en P à la fonction « route » *y(x)*, c'est à dire :

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

De plus, dans un triangle rectangle nous avons l'identité suivante :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

On en déduit :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Dans le ΔPRC rectangle en R nous avons :

$$\cos\theta = \frac{a}{h-y}$$

On en déduit :

$$\frac{a}{h-y} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 - 1}$$

Et on résout pour dx :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 - 1}}dy = dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 - 1}}dy = \int dx$$

Avec une substitution de $u = \frac{h-y}{a}$ et donc $du = \frac{-dy}{a}$ d'où $dy = -adu$.

$$\int \frac{-a}{\sqrt{u^2-1}}du = \int dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du = -\frac{1}{a}\int dx$$

La primitive de la fonction g(u)=$\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$ est $G(u) = arcosh\, u$, réciproque du cosinus hyperbolique.

On aura alors :

$$arcosh\, u + c_1 = -\frac{x}{a} + c_2$$

$$arcosh\left(\frac{h-y}{a}\right) = -\frac{x}{a} + C$$

$$\frac{h-y}{a} = \cosh\left(-\frac{x}{a}+C\right)$$

$$y = -a\cosh\left(-\frac{x}{a}+C\right)+h$$

Pour déterminer la constante *C*, il faut résoudre cette équation pour la valeur initiale de $P(0, h-a)$, c'est à dire quand le carré est en position horizontale (voir Fig. 3)

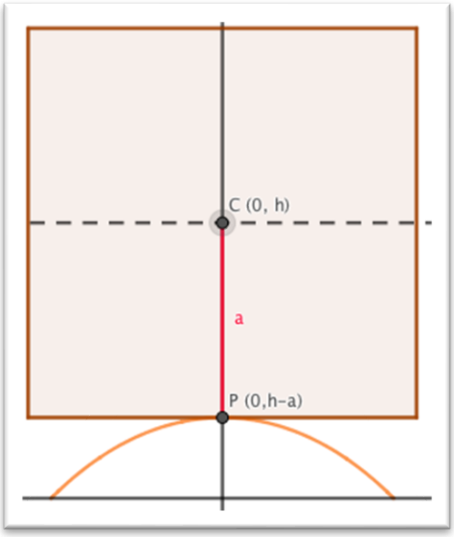


Fig. 3 : Position horizontale du carré

$$h-a = -a\cosh(0+C)+h \;\Leftrightarrow\; \cosh(0+C) = 1 \;\Leftrightarrow C = 0$$

On a alors la solution particulière de notre équation différentielle :

$$y = -a\cosh\left(-\frac{x}{a}\right)+h \Leftrightarrow y = -a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)+h$$

puisque le cosinus hyperbolique est une fonction paire.

Il reste à effectuer un dernier petit calcul afin d'exprimer la hauteur h en fonction du paramètre a, sachant que la longueur du côté du carré est de 2a. Pour cela nous allons mettre le carré en position verticale (voir Fig. 4).

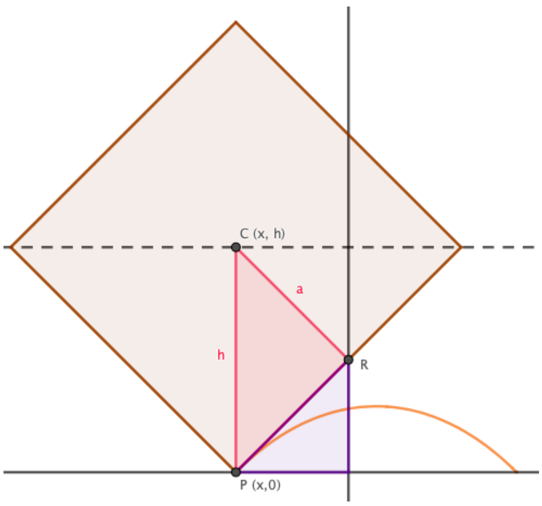


Fig. 4 : Position verticale du carré

Puisque le ΔPRC est rectangle et isocèle en R, nous avons :

$$h^2 = 2a^2$$
$$h = a\sqrt{2}$$

Cela nous donne l'équation finale de la courbe sur laquelle on pourra faire rouler un carré de côté 2a :

$$y = -a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + a\sqrt{2}$$

L'intersection de la chaînette ainsi définie avec l'axe *x* donne la partie de la courbe sur laquelle pourra se dérouler notre roue carrée. La solution analytique pour trouver les coordonnées de ces deux points est laissée ici à la charge du lecteur intéressé[2]. Après cette solution analytique, il est légitime de se demander si et comment cette situation pourrait être proposée comme une véritable démarche d'investigation au collège car la modélisation nécessite d'avoir recours aux outils mathématiques (notamment l'équation différentielle et les fonctions hyperboliques) qui ne sont pas disponibles aux collégiens. Cela est d'autant plus important afin d'éviter de tomber dans le piège de s'en servir comme prétexte sans jamais vraiment l'explorer comme c'était le cas de la SPM proposée par Ouailal *et al.* (2018).

Un regard théorique sur la démarche d'investigation

Après cette petite incursion dans les maths d'au-delà du collège, penchons-nous ensemble sur ce qu'on entend derrière la démarche d'investigation. L'idée de rendre l'élève actif ou de le mettre en situation de recherche n'est pas nouvelle, elle remonte déjà au 17e siècle avec les écrits de Comenius (1592–1670) ou de Rousseau (1712–1778) comme le soulignent Maaß et Artigue (2013, p. 781). Cependant, l'émergence de la pédagogie basée sur la démarche d'investigation[3] est généralement attribuée au philosophe et éducateur américain John Dewey (1859-1952). Dewey (1938, pp. 104-105) définit l'enquête comme la transformation contrôlée ou dirigée d'une situation indéterminée en une situation déterminée, dans l'idée de convertir les éléments de la situation originale en un ensemble unifié. Le premier pas indispensable dans l'enquête mènera selon Dewey (1938, p. 108) à la problématisation de la situation, qui sans cela risquerait de perdre de sa pertinence. L'étape suivante de la détermination du problème et de la recherche d'une solution est l'observation, qui pourrait être source d'idées ou de suggestions et aboutir à une idée pertinente qui présenterait une possible solution. Il précise qu'il faut se méfier d'accepter trop vite des idées qui mèneraient à des conclusions hâtives et non-fondées, car la *solution soudaine* est généralement le résultat de beaucoup de recherches préalables. Schön (1992, p. 122) conclut que l'enquêteur est ainsi impliqué et s'approprie la situation au lieu d'être un simple spectateur externe. Artigue et Blomhøj (2013, p. 799) décrivent les conditions dans lesquelles l'enquête peut se développer dans les classes. Il faut que la situation initiale comporte une part d'inconnu qui constitue un défi. Cependant, cette part d'inconnu doit pouvoir être approchée par ce qui est déjà connu afin de pouvoir générer des idées ou des hypothèses, ce qui selon ces auteurs constitue un défi didactique majeur quant à l'intégration de l'enquête dans l'enseignement. Ces auteurs résument que la DI consiste à mettre les élèves en situation de recherche afin de leur faire expérimenter la manière dont les scientifiques travaillent.

Analyse du travail d'un élève

Il existe, dans plusieurs pays, des dispositifs qui consistent à faire effectuer aux élèves en autonomie sous la direction de l'enseignant un travail obligatoire, évalué dans le cadre du diplôme de fin d'études

[2] La réponse est $x = \pm a \cdot \text{arcosh}\,(\sqrt{2})$ ou bien $x = \ln\,(\sqrt{2} \pm 1)$ et il s'agit bien d'un nombre transcendant et pour vous donner l'ordre de grandeur $x \approx \pm a \cdot 0{,}8814$.

[3] De l'anglais : inquiry-based learning.

secondaires, comme le travail de maturité en Suisse ou les TPE[4] en France. Ce travail, généralement interdisciplinaire, vise à introduire aux méthodes scientifiques. L'IB a mis en place un dispositif d'évaluation en mathématiques « Exploration en mathématiques » dont l'objectif est de permettre aux élèves d'effectuer en autonomie un travail mathématique conséquent sur un thème choisi encadré par leur enseignant.

Je propose d'analyser ici les éléments qui ont permis à un élève de 17 ans du Baccalauréat International d'explorer la situation analysée ci-dessus dans le cadre de son travail de diplôme à partir d'une vidéo (Fig. 5) montrant un saut avec une moto à roues carrées.

Fig. 5 : Le point de départ… (https://www.youtube.com/watch?v=u-hDEEl67_Y)

Au moment d'élaborer son travail d'exploration, l'élève avait à disposition des connaissances sur les fonctions et leur transformation en général, les fonctions standards des programmes du collège (les fonctions polynomiales du 2^{e} et 3^{e} degré, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques, la fonction exponentielle et logarithmique, etc.) et les bases de l'analyse (la dérivée des fonctions connues, l'intégrale définie et indéfinie et leurs applications). Je précise que le programme ne couvre pas les fonctions hyperboliques ni les équations différentielles, donc une modélisation telle que proposée ci-dessus n'était pas accessible à cet élève. Par rapport à son profil, il s'agit d'un élève bon en mathématiques de la filière maths renforcées. Ce travail était encadré par deux enseignants de mathématiques dont un est l'auteur de cet article. Il me semble important de souligner qu'il s'agit d'une analyse *a posteriori* du rapport final rendu par l'élève. Celui-ci n'était pas écrit sous forme d'une narration de recherche mais sous forme d'un compte rendu des résultats obtenus, je n'avais donc pas accès à l'intégralité de ses recherches, mais seulement à celles qui ont abouti aux résultats présentés complétées par mes souvenirs lors de l'encadrement.

Les avancées récentes (Para & Otero, 2018) dans la théorie anthropologique du didactique (TAD) montrent que les dialectiques sont indispensables pour qu'une véritable enquête puisse avoir lieu. Dans cette analyse, je me m'intéresserai plus particulièrement à la dialectique médias-milieux (Chevallard, 2008). Le terme média désigne tout système qui apporte de l'information sur le monde ou sur une de ses parties et qui s'adresse à un certain type de public : le cours du professeur, une revue, un site Internet, etc. (Chevallard, 2008). Le milieu représente « tout système qu'on peut regarder comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite, à telle question déterminée » (Chevallard, 2008, p. 344) et le milieu ainsi défini est proche de celui de milieu adidactique de la théorie des situations didactiques. Selon Chevallard (2008) le processus de validation se réalise grâce à la dialectique des médias et des milieux car :

[4] Travaux pratiques encadrés.

[…] l'existence d'une dialectique vigoureuse (et rigoureuse) entre médias et milieux est une condition cruciale pour qu'un processus d'étude et de recherche ne se réduise pas au recopiage acritique d'éléments de réponse épars dans les institutions de la société. » (p. 345)

Dans le dispositif « Exploration en mathématiques », les élèves ont accès aux différents médias (internet, livres, Wolfram alpha[5], etc.), cependant s'ils veulent utiliser un savoir particulier qui n'est pas au programme, ils doivent en manifester une bonne compréhension et être capables de l'appliquer correctement. Je voudrais souligner particulièrement l'importance du rôle des médias dans cette exploration parce qu'ils ont fourni des informations, nécessaires pour combler les lacunes dans les connaissances de l'élève, sans lesquelles ce travail d'exploration n'aurait pas pu exister. Cette exploration serait bien sûr impossible sans la présence d'une dialectique, d'un « va et vient » entre l'information provenant de ces médias et le milieu qui va évoluer et être enrichi en fonction de l'information retenue ou rejetée. Regardons donc comment l'élève a su problématiser la situation, chercher les informations dans les médias, les intégrer dans son milieu et les vérifier par une démarche expérimentale dans l'environnent GeoGebra.

La problématisation de la situation

La situation de la moto qui roule avec des roues carrées a clairement suscité chez cet élève la curiosité intellectuelle (voir Fig. 6 en bleu) de comprendre pourquoi et comment cela est possible et constitue ainsi la situation indéterminée au sens de Dewey d'une potentielle démarche d'investigation. Cependant, Dewey (1938) insiste sur le fait qu'une enquête ne pourrait pas se déployer sans la problématisation de cette situation. Dans l'introduction, on trouve deux éléments (voir Fig. 6 en jaune et rouge) qui contribuent à une bonne problématisation de cette situation : la prise de conscience qu'une surface particulière est nécessaire pour faire rouler une roue carrée et l'information que la courbe ainsi formée s'appelle chaînette. Comme l'élève mentionne déjà dans l'introduction qu'il sait que le carré peut rouler sur une chaînette (voir Fig. 6 en rouge), je fais l'hypothèse que cette information lui a été donnée par son enseignant. Celle-ci a probablement aussi été retrouvée dans des médias, notamment dans Wikipedia (Mé$_1$)[6], puisqu'on trouve dans le dossier de l'élève des captures d'écran de l'animation de la roue carré qui roule sur la chaînette renversée[7] (voir Fig. 7).

> to BBC One, which is probably one of my most favourite channels due a fantastic show 'Bang Goes The Theory'. I vividly remember the episode (luckily I found a link to it on YouTube, see the screenshot on the cover)[1] where Jem Stansfield, a member of the 'Bang Goes The Theory' team, jumps on the ramp on a square wheeled motorbike. I was simply stunned by the fact that a square wheel can even roll but then I realized that it required a special kind of path.
> Now, as an IB higher-level math student I became very interested in the math part of the path for the wheel, which I know is called a catenary. Furthermore, I learnt that catenaries are defined by a specific function, thus, in this exploration I am aiming to find the relationship between the side length of the square and the function of the catenary.

Fig. 6 : Extrait de l'introduction du dossier

[5] https://fr.wikipedia.org/wiki/WolframAlpha L'élève connaît cette ressource de son enseignant.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wheel.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wheel#/media/File:Rolling-Square.gif.

Square wheel

From Wikipedia, the free encyclopedia

A **square wheel** is a wheel that, instead of being circular, has the shape of a square. While literal square wheels exist, a more common use is as a metaphor meaning feeling bad and naive (see reinventing the wheel).

A square wheel can roll smoothly if the ground consists of evenly shaped inverted catenaries of the right size and curvature.[1][2][3]

A different type of square-wheeled vehicle was invented in 2006 by Jason Winckler of Global Composites, Inc. in the United States. This has square wheels, linked together and offset by 22.5°, rolling on a flat surface. The prototype appears ungainly,

An animation of a square wheel rolling smoothly over inverted catenaries.

Fig. 7 : Extrait de Wikipedia

Ce travail d'exploration est construit à partir d'une réponse toute faite provenant des médias qui n'a non seulement pas empêché l'enquête de se dérouler, mais a permis à l'élève de mener une véritable activité mathématique. La condition pour cela est l'existence de la dialectique médias-milieux que je vais tenter d'identifier dans cette analyse.

L'analyse en termes de dialectique entre médias et milieux

Dans cette exploration, nous pouvons distinguer deux parties : un travail expérimental à l'aide de GeoGebra qui aboutit à la formulation d'une conjecture et une solution analytique avec une preuve formelle de la conjecture formulée.

Commençons par regarder les médias qui étaient sources d'informations nécessaires et importantes pour l'avancement de l'enquête. La page de Wikipedia (Mé$_2$) donne deux éléments qui sont admis dans le milieu de l'élève : la roue carrée peut rouler sur une chaînette renversée (réponse R$_1$) et une animation (R$_2$) qui montre la roue carrée rouler sur une série de chaînettes tronquées (Fig. 7). La réponse R$_1$ permet à l'élève de procéder à une nouvelle recherche qui aboutit à la page Wolfram MathsWorld (mentionnée comme ressource dans la bibliographie) sur la chaînette[8] dans laquelle on trouve l'information ci-dessous (Fig. 8).

The catenary also gives the shape of the road (roulette) over which a regular polygonal "wheel" can travel smoothly. For a regular n-gon, the Cartesian equation of the corresponding catenary is

$$y = -A \cosh\left(\frac{x}{A}\right),$$

where

$$A \equiv R \cot\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Fig. 8 : Extrait de la page Wolfram MathsWorld sur la chaînette

Cette ressource donne l'équation du cosinus hyperbolique avec la condition sur le paramètre A pour un polygone régulier et l'élève en récupère l'équation du cosinus hyperbolique (R$_{1.1}$) :

$$y = -a \times \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Avant de continuer, il est important de faire le point sur ce que le milieu de l'élève contient déjà (voir Table 1 en noir) et ce que vient d'y être ajouté (voir Table 1 en vert) afin de mieux saisir la dialectique médias-milieux.

[8] http://mathworld.wolfram.com/Catenary.html.

Médias		Milieu	
		Ordinateur avec accès à Internet	
		GeoGebra : l'élève connaît ce logiciel	
		Wolfram Alfa	
		Connaissances antérieures (fonctions, dérivée, intégrale)	
$Mé_1$	Wikipedia (Square wheel)	La roue carrée peut rouler sur une chaînette renversée.	R_1
$Mé_1$	Wikipedia (Square wheel)	Animation Roue carrée	R_2
$Mé_2$	site Wolfram MathsWorld (chaînette)	L'équation du cosinus hyperbolique : $y = -a \times \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$	$R_{1.1}$

Table 1 : Liste des médias et contenu du milieu

Le milieu avec lequel l'élève va interagir tout au long de cette exploration contient déjà des connaissances antérieures sur les fonctions et avec l'aide du logiciel GeoGebra il peut travailler avec cette fonction inhabituelle. La dialectique médias-milieux entre en jeu qui lui permet d'évaluer la pertinence des informations en menant une réflexion critique afin d'enrichir le milieu.

A partir de la R_2 (l'animation), l'élève fait deux observations :

1) Afin que le carré puisse se dérouler sur la chaînette il faut que la longueur de son côté soit égale à la longueur de la courbe sur laquelle il se déroule.
2) Le carré s'adapte parfaitement là où les deux courbes se rencontrent, il y doit y avoir alors un angle de 90° (voir Fig. 9).

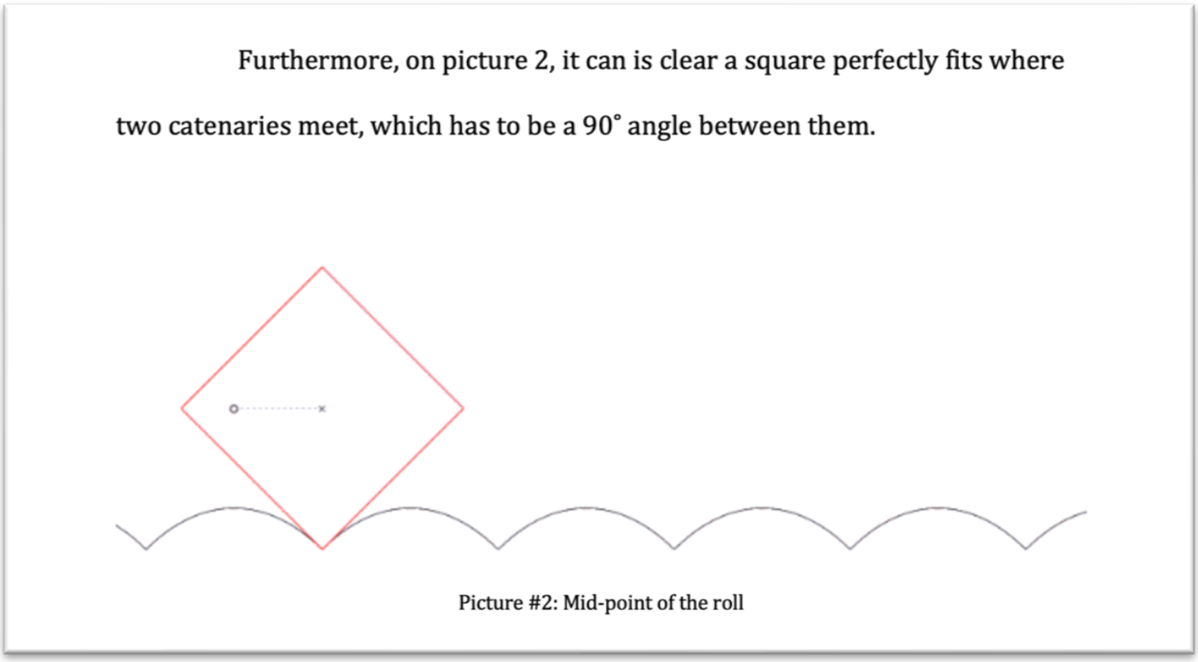


Fig. 9 : Carré en position verticale (extrait du dossier de l'élève)

Ces observations et ses connaissances antérieures sur les fonctions et la dérivée permettent à l'élève de faire l'hypothèse que les tangentes au point d'intersection des deux courbes doivent être perpendiculaires avec donc leurs pentes respectives égales à 1 et -1 (Fig. 10).

> Using knowledge of calculus, it means that the gradient of the tangents line at those points is ± 1. To find the gradient of the function it has to be differentiated, which in GeoGebra can be done by simply inputting $f'(x)$. Now, it is required to find the x-values of $f'(x)$ where it equals to ± 1. Then the intersection point to can be obtained, which in this case is (-4.41, 1). The next step would be creating two tangent lines to $f(x)$. To obtain the second tangent line whose gradient in -1 one can just use the 'Reflect about Line' command in GeoGebra. Then using the 'Angle' command it can be seen that the two lines indeed make a 90° angle. Now, it is important to have exact points of intersection

Fig. 10 : Hypothèse émise par l'élève (extrait du dossier de l'élève)

De plus, puisqu'à ce stade de son exploration, il ne peut pas vérifier son hypothèse analytiquement, il utilise les outils de GeoGebra pour la tester (Fig. 11). Pour rappel, c'est l'élève qui a créé son environnement expérimental dans GeoGebra avec l'aide de l'enseignant qui lui a expliqué l'outil « curseur ».

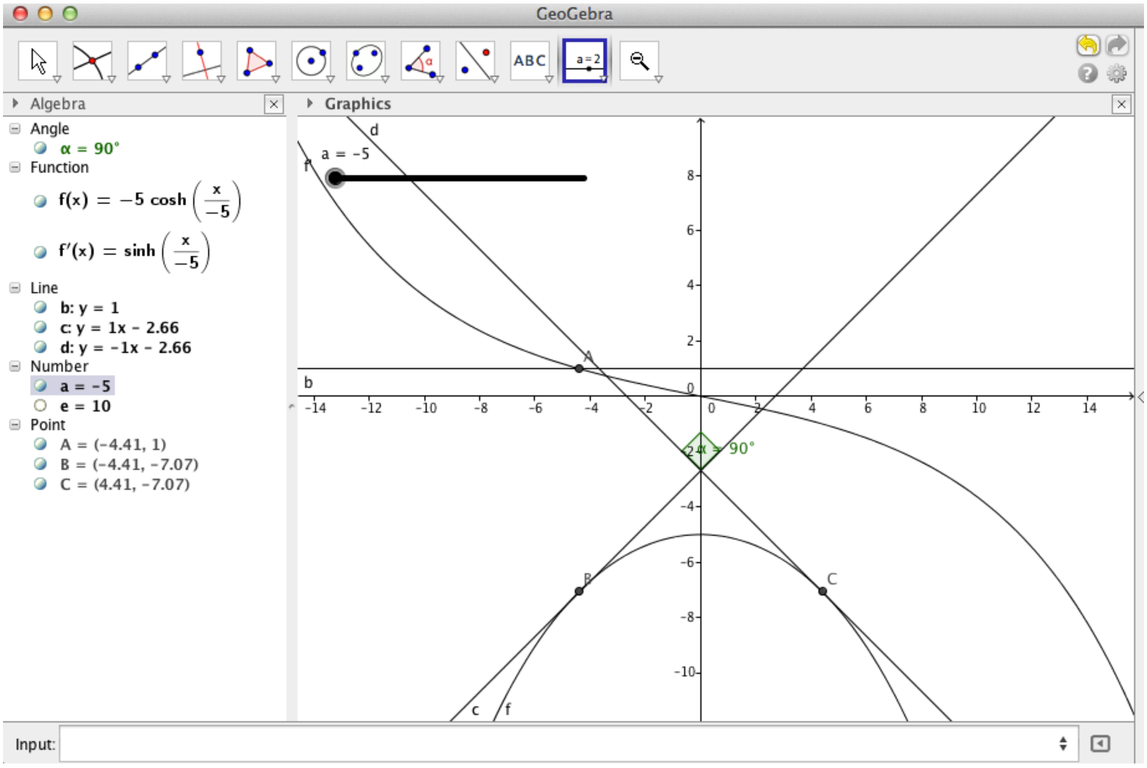


Fig. 11 : Environnement GeoGebra pour tester les hypothèses (extrait du dossier de l'élève)

L'élève explique qu'il lui faut la dérivée du cosinus hyperbolique, cherche où $f'(x) = 1$ et trouve le point $A(4{,}41; 1)$. Bien qu'il manque l'explication en détail de comment il trouve le point B[9], il crée la tangente de *f(x)* en B vérifiant que sa pente est bien égale à 1. En effet, GeoGebra affiche l'équation de la tangente instantanément (droite c sur la Fig. 11). En utilisant les propriétés de la symétrie axiale, il trouve le point C et la deuxième tangente (droite d sur la Fig. 11). Afin de confirmer ses hypothèses de départ, il vérifie que ces deux tangentes sont bien perpendiculaires.

La deuxième partie de ce travail exploratoire consiste à chercher la relation entre le paramètre *a* du cosinus hyperbolique et la longueur du côté du carré. Le paramètre *a* de la fonction *f(x)* est géré par l'outil curseur de GeoGebra et la valeur *e* qui représente la longueur de la courbe entre les points B et C (voir Fig. 11) est calculée par GeoGebra. L'élève utilise le curseur pour générer d'autres exemples (voir Fig. 12) et fait la conjecture que la longueur de la courbe est le double de la valeur absolue du paramètre et, de ce fait, la longueur du côté du carré est égale à *2/a/*.

Parameter *a*	Arc length of the catenary
-5.0	10
-4.0	8
-3.0	6
-2.0	4
-1.0	2
0.0	0
1.0	2
2.0	4
3.0	6
4.0	8
5.0	10

Fig. 12 : Relation entre le paramètre *a* et longueur de la courbe (extrait du dossier de l'élève)

La deuxième partie de ce travail présente la solution analytique et la preuve formelle de la conjecture ci-dessus. À nouveau, l'élève a besoin des médias, notamment pour savoir comment calculer la longueur d'une courbe entre deux points car cela n'est pas au programme de mathématiques. Je fais l'hypothèse que l'élève a utilisé la vidéo (expliquant comment trouver la formule pour la longueur d'une courbe) de Khan Academy[10] car cette ressource était utilisée par l'enseignant et connue des élèves (Fig. 13).

[9] Je pose l'hypothèse que l'élève s'est rendu compte le point B est à l'intersection de la courbe et d'une ligne verticale passant par A.

[10] https://youtu.be/8Y-snjheI9M.

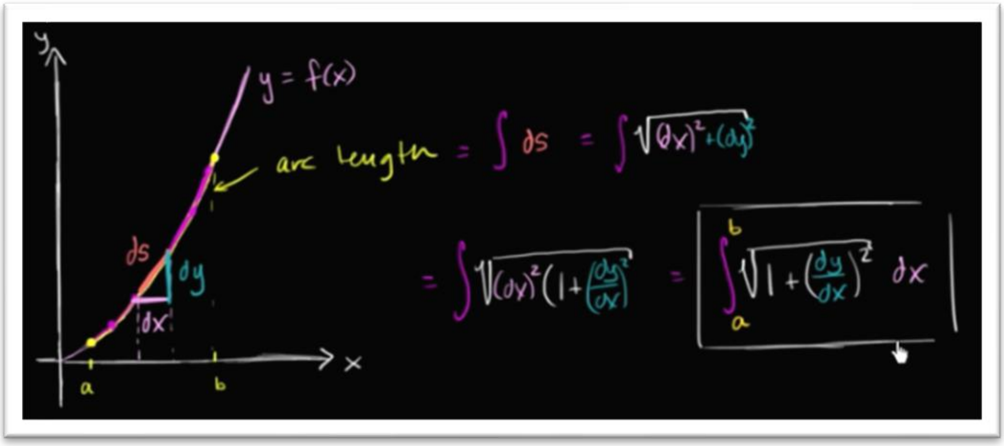


Fig. 13 : Formule de la longueur d'une courbe (extrait de la vidéo de Khan Academy)

Cet extrait (voir Fig. 14) montre non seulement que l'élève ne se satisfait pas du « copier-coller » de la formule qui calcule la longueur de la courbe, mais que ses connaissances antérieures lui donnent accès à la justification de cette formule. Nous avons ici à nouveau un exemple de comment l'élève à réussi d'extraire l'information des médias, se l'approprier, l'articuler avec ses connaissances antérieures et appliquer dans son travail.

How does one find the curve length of a function? The curve length of a function can be represented as an infinite series of straight lines that are made out of *x* and *y* vector components, therefore, the length of that line can be found using Pythagoras' Theorem. Now, let's define the function of the change in curve length as '*ds*' (so the curve length is *s*) and change of *x* and *y* components as '*dx*' and '*dy*' respectively, thus, according to the Pythagoras' Theorem the function looks like this,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Since a function in terms of *x* is required so it should be re-arranged in the following way,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

It is important to simplify the function in order to get its integral, thus, the following simplification have to be made,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Now, the function can be integrated to obtain the following formula,

$$\text{Curve lenght} = s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Fig. 14 : Formule de la longueur d'une courbe (extrait du dossier de l'élève)

Pour pouvoir calculer cette intégrale, l'élève doit déterminer deux choses : la dérivée du cosinus hyperbolique et l'intervalle d'intégration de la courbe. La dérivée vient des médias, notamment de la page Wolfram MathsWorld (mentionnée comme ressource dans la bibliographie) sur le sinus hyperbolique[11].

[11] http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicSine.html.

> As it can be seen from the formula, the first derivative of the function has to be found. Since hyperbolic functions are not covered in the syllabus, additional research had to be done. The answer was found on Wolfram Web Resource[3], it was that
>
> $$\frac{\partial}{\partial x}\cosh x = \sinh x$$

Fig. 15 : La dérivée du cosinus hyperbolique (extrait du dossier de l'élève)

Nous pouvons à nouveau observer une dialectique entre médias et milieux et constater que l'élève admet avec succès ces nouvelles informations dans son milieu et en manifeste une bonne compréhension. Il est capable d'appliquer la règle sur la dérivation des fonctions composées et trouver la dérivée dont il a besoin (Fig. 16)

> However, in this case there is also a parameter a present, thus the derivative that is going to be used is the following,
>
> $$\frac{\partial}{\partial x}\left(-a\cosh\frac{x}{a}\right) = \sinh\frac{x}{a}$$

Fig. 16 : Application de la dérivée du cosinus hyperbolique (extrait du dossier de l'élève)

L'élève utilise ensuite la formule pour la longueur de courbe étudiée et admise dans son milieu et calcule l'intégrale (Fig. 17)

After obtaining the first derivative of the function, the formula for the arc length can be used, which is presented below,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + sinh^2\left(\frac{a}{x}\right)}\, dx$$

In this particular case, substitution would the most appropriate method of integrating, thus, the first step would be the substitution,

$$u = \frac{x}{a}, \text{therefore, du} = \frac{1}{\mathrm{a}}dx$$

Since parameter a is a constant, it can be factored out, which makes the integral look like this:

$$a\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{sinh^2(u) + 1}\, du$$

The following hyperbolic identity, $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$, can be rearranged to $\sqrt{sinh^2(u) + 1} = \sqrt{cosh^2(u)}$, which can be substituted into the integrand, which means that the integral now takes this form,

$$= a\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{cosh^2(u)}\, du = a\int_{\alpha}^{\beta} \cosh(u)\ du$$

The integral of $\cosh(u)$ is $\sinh\,(u)$ so,

$$[a\ \times \sinh(u)]_{\alpha}^{\beta}$$

Which after substitution becomes the following,

$$= \left[a\ \times \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{\alpha}^{\beta}$$

Fig. 17 : Calcul de l’intégrale (extrait du dossier de l’élève)

Il reste enfin à déterminer les limites de l’intégrale pour calculer la longueur de la courbe entre deux points. En lisant cette partie du dossier (Fig. 18), on peut constater que l’élève est de plus en plus à l’aise avec la manipulation des fonctions hyperboliques et leurs réciproques.

Now, it is crucial to determine the bounds of the integral, which signify the points where the square begins and ends its roll. As it was previously discussed, the gradient of the tangent at those two points has to equal to −1 at beginning and 1 at the end. Since the bounds are going to change depending on the parameter a, it is, thus, important to define those points in terms of the parameter.

The first step would be finding the first derivative of the function, which is now known to be $\sinh\frac{x}{a}$. Then, it should be set to equal to either ± 1, as shown below,

$$\sinh\frac{x}{a} = \pm 1$$

$$\frac{x}{a} = \text{arcsinh}(\pm 1)$$

$$x = a \times \text{arcsinh}(\pm 1)$$

Fig. 18 : Calcul des limites de l'intégrale (extrait du dossier de l'élève)

Après avoir réussi à déterminer les limites de l'intégrale il suffit de substituer, simplifier et voilà, la conjecture est démontrée (Fig.19).

So these two values are the bounds for the following integral, the lower being $a \times arcsinh(-1)$ and upper being $a \times arcsinh(1)$. Now, they can just be put into the following integral as seen below,

$$l = \left[a \times \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{a \times \text{arcsinh}(-1)}^{a \times \text{arcsinh}(1)}$$

$$l = \left[a \times \sinh\left(\frac{a \times arcsinh(1)}{a}\right)\right] - \left[a \times \sinh\left(\frac{a \times arcsinh(-1)}{a}\right)\right]$$

$$l = [a \times \sinh(\text{arcsinh}(1)] - [a \times \sinh(\text{arcsinh}(-1)]$$

$$l = [a] - [-a]$$

$$l = 2a$$

Fig. 19 : Le calcul final (extrait du dossier de l'élève)

Certes, cette partie analytique demande une bonne maîtrise du calcul littéral et d'être à l'aise avec les manipulations algébriques. Cependant, connaître la bonne technique pour calculer cette intégrale n'aurait pas été suffisant pour résoudre ce problème. Et à la limite, la technique pourrait même être prise en charge par des systèmes de calcul formel[12].

[12] https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_de_calcul_formel.

Conclusion

Cet élève a réussi à produire une exploration de qualité et il est donc légitime de se demander ce qui se cache derrière cette réussite. Premièrement, pour un élève du collège il serait impossible de réaliser ce travail sans les médias et sans GeoGebra (ou un autre logiciel équivalent) que l'élève maîtrise. L'outil théorique de la dialectique médias-milieux utilisé pour analyser ce travail suggère que la qualité de l'exploration dépend de la qualité de cette dialectique. Il reste cependant important d'étudier davantage les conditions dans lesquelles cette dialectique se déroule et qui déterminent sa qualité. Il est néanmoins clair que la bonne qualité de la dialectique médias-milieux dans l'exploration qu'on vient d'analyser a joué un rôle primordial dans la réussite de celle-ci. Afin de mieux comprendre et décrire les conditions pour qu'une bonne dialectique puisse avoir lieu, il faudrait analyser davantage le type de médias auxquels les élèves ont accès, la manière dont ces informations sont traitées par les élèves et le rôle des connaissances antérieures dans le processus de rejet ou d'acceptation d'une information provenant des médias. En fin de compte, cette analyse montre que la situation de la « roue carrée » a le potentiel d'être exploitée au collège, non seulement comme prétexte pour faire faire des exercices classiques comme proposé par Ouailal *et al.* (2018), mais d'engager réellement les élèves dans une véritable activité mathématique. Pour cela, il ne faut pas avoir peur des médias et des logiciels, au contraire on peut les laisser prendre en charge certaines lacunes dans le savoir-faire analytique afin de favoriser la réflexion critique et donner du sens aux mathématiques. Un des leitmotivs du Baccalauréat International à sa création était : « apprendre à apprendre, telle est désormais la première fonction de l'école » (Office du Baccalauréat International, 1973, p. 24), parce que la masse de connaissances rendait l'enseignement encyclopédique inopérant. Laissons alors encore une dernière fois la parole à cet élève pour nous dire ce qu'il a appris en faisant ce travail :

> **In this exploration, I was able to apply my knowledge of calculus to a problem that was very compelling for me and use a powerful program, such as GeoGebra, to successfully model a given situation. Furthermore, I was able to go beyond covered material by using a formula to find an arc length of the function as well to explore mysterious hyperbolic function, which were also not covered in class.**

Fig. 20 : Ce que l'élève a appris (extrait du dossier de l'élève)

Références

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : La dialectique des média et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (Éds.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques*. IREM.

Dewey, J. (1938). *Logic : The theory of inquiry*. Henry Holt and company.

Maaß, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching : A synthesis. *ZDM*, *45*(6), 779-795. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0528-0

Office du Baccalauréat International. (1973). *Le Baccalauréat International*. OBI.

Ouailal, S., Boussaa, N., & Achtaich, N. (2018). Une situation-problème motivante autour de la fonction exponentielle. *Revue de mathématiques pour l'école*, *229*.

Para, V., & Otero, M. R. (2018). Study and Research path : Indicators of the development of the dialectics. *Pré-actes CITAD6*, 241-253. https://citad6.sciencesconf.org/data/pages/Pre_proceedings_citad_7.pdf

Schön, D. A. (1992). The Theory of Inquiry : Dewey's Legacy to Education. *Curriculum Inquiry*, *22*(2), 119-139. https://doi.org/10.2307/1180029

POINT DE VUE DIDACTIQUE SUR LES EVALUATIONS NATIONALES FRANÇAISES AU DEBUT DE LA SCOLARITE OBLIGATOIRE

Nadine Grapin, Eric Mounier

Laboratoire de didactique André Revuz

Pour améliorer les performances des élèves français, vingt et une mesures pour l'enseignement des mathématiques (Villani-Torossian, 2018) ont été définies et ont conduit à la mise en œuvre d'un plan d'action national incluant, entre autres, en 2018-19, la passation d'évaluations standardisées au début et milieu de la première année d'école élémentaire (Grade 1, Cours Préparatoire - CP, élèves âgés de 6-7 ans) et à l'entrée en deuxième année (Grade 2, Cours Elémentaire 1$^{\text{ère}}$ année – CE1, élèves âgés de 7-8 ans). Celles-ci sont conçues pour répondre à un double enjeu : en tant qu'outil de diagnostic pour l'enseignant et en tant qu'outil de bilan pour accompagner le pilotage au niveau local et national. La page internet de présentation de cette évaluation précise qu'elle est conçue par la DEPP (Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance) selon les orientations données par le CSEN (Conseil Supérieur de l'Education Nationale), la DGESCO (Direction Générale de l'Enseignement SCOlaire) et par des « chercheurs de haut niveau » (ni les chercheurs ni les champs de recherche ne sont ici explicitement cités) ; les exercices sont ensuite élaborés par des équipes de terrain (ce qui n'est pas le cas pour tous les exercices, puisque certains, comme nous le verrons par la suite, sont issus d'épreuves existantes, conçues pour détecter, entre autres, les élèves dyscalculiques).

En mobilisant une analyse didactique, nous allons nous centrer sur ce que peuvent révéler ces évaluations des connaissances des élèves, étape nécessaire avant leur utilisation comme outil pour l'enseignant ou pour l'institution. Nous avons choisi d'étudier l'évaluation proposée à l'entrée du CE1 ciblant un enjeu principal d'apprentissage signalé par les programmes et par les chercheurs en didactique des mathématiques : la numération écrite chiffrée. Conditionnant toute la compréhension du nombre, dans ses aspects conceptuels et opératoires, cet apprentissage a débuté pour les élèves l'année précédente, celle du CP, et se poursuit sur l'ensemble de l'école primaire. Nous devrions donc trouver trace de son évaluation, mais sous quelle forme ?

Pour répondre à cette question, nous précisons d'abord notre méthodologie d'analyse puis nous présentons les résultats obtenus. Nous montrons ensuite à travers un exemple, extrait de nos propres recherches, l'intérêt d'une approche didactique pour penser la conception d'une tâche d'évaluation, en l'articulant avec les connaissances qui peuvent être évaluées et les procédures qui peuvent être mobilisées.

MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE

En tant que didacticiens des mathématiques et spécialistes de l'évaluation des connaissances des élèves, notre analyse porte non seulement sur les tâches proposées, mais aussi sur le traitement des réponses des élèves (leur relation avec les connaissances potentiellement mobilisées) et sur l'interprétation des résultats qui en découle (le type de données recueillies et la façon de les « faire parler ») en lien avec les décisions pouvant être prises (dans notre cas, cela concerne le travail de l'enseignant et le pilotage par l'institution).

Nous observons si chaque élève peut répondre en utilisant pleinement ses connaissances, sans qu'il n'y ait de facteurs qui parasitent sa réflexion. Pour cette étude, nous avons particulièrement regardé les conditions de passation prescrites à partir des éléments suivants : durée allouée à chaque exercice et à l'ensemble du test, organisation matérielle de la passation (disposition des élèves en classe, évaluateur), instruments et matériel à disposition des élèves ainsi que le discours d'accompagnement de l'évaluation. D'autres facteurs, que nous n'étudions pas ici, peuvent venir jouer sur les réponses, comme par exemple le type de support utilisé pour l'évaluation (papier-crayon, oral informatique, etc.).

Nous étudions ensuite comment pourrait être évaluée telle ou telle connaissance. Pour ce faire, nous sélectionnons l'ensemble des tâches du test possiblement concernées par cette dernière. Nous effectuons alors une analyse *a priori* « classique » en théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), consistant à considérer les procédures employées pour en inférer les connaissances à l'œuvre (Mounier, 2010, 2017). Pour les élèves de cet âge, il s'agit le plus souvent des connaissances en-acte (Vergnaud, 1990), c'est à dire utilisées dans l'action, de manière pragmatique. L'analyse *a priori* permet une interprétation des réponses des élèves et un codage de ces dernières en fonction des procédures. Signalons dès à présent que pour l'évaluation analysée, aucun renseignement n'est donné explicitement sur la façon dont sont codées les réponses des élèves ; les enseignants reçoivent par élève, des scores en pourcentage selon des compétences identifiées et, pour chaque item, une indication sur sa réussite ou non. Aucune indication n'est apportée sur les procédures. Nous y reviendrons ultérieurement.

RÉSULTATS D'ANALYSE

Afin de donner au lecteur une vision synthétique et complète du test, nous avons regroupé dans le tableau figurant en annexe l'ensemble des exercices proposés dans l'évaluation à l'entrée du CE1 (MEN, 2018a) sur le domaine des nombres et du calcul, en les mettant en regard des compétences du programme du cycle 2 correspondant (en France, les programmes sont rédigés par cycle, le CP étant la première année du cycle 2).

Les modalités de passation

Afin de standardiser les passations, un guide est fourni aux enseignants (MEN, 2018 b) où sont indiqués, entre autres, le temps alloué pour répondre à chaque exercice et les consignes à donner. En ce qui concerne le temps prescrit pour répondre aux exercices, nous remarquons que pour la première série de calcul mental (exercice 2 - sommes de nombres inférieurs à 9), le temps de réponse accordé aux élèves est de 10 secondes et permet de limiter la plupart des procédures de comptage (sauf éventuellement pour les nombres inférieurs à 5). En revanche, pour la seconde série de 15 calculs (exercice 7), un temps global de 7 minutes est accordé. Cette modalité n'empêche donc pas de poser le calcul, voire de sur-compter, et par conséquent rend l'exercice invalide au regard de son objectif d'évaluation.

Nous nous interrogeons aussi sur le fait d'accorder une minute pour réaliser la comparaison de 60 paires de nombres entiers à deux chiffres (exercice 4). Les concepteurs de l'évaluation (CSEN, 2019) expliquent que cette tâche a été développée par des chercheurs en Belgique et qu'elle permet de « détecter les élèves en difficultés » à partir d'une évaluation réalisable à grande échelle. Le choix d'intégrer cette tâche dans cette évaluation est aussi justifiée par le fait que « La recherche internationale a montré que la rapidité et la précision de la comparaison des nombres, particulièrement quand ils sont présentés sous forme symbolique (chiffres arabes), sont d'excellents indicateurs de la réussite ultérieure des élèves en mathématiques ». De notre point de vue de didacticien, au-delà du manque d'intérêt consistant à proposer 60 fois une tâche similaire, expliquer à l'élève qu'il n'aura « sûrement pas fini mais ce n'est pas grave. Ce qui compte c'est d'en faire le plus possible » peut conduire l'élève à barrer des nombres le plus rapidement possible sans réfléchir à ce qu'il fait. En outre, les évaluations développées initialement pour la recherche sont bien souvent menées par des personnes formées avec des conditions de passation spécifiques ; ce qui n'est pas le cas pour ces évaluations, qui sont mises en œuvre dans les classes par les enseignants. Ces différences nous questionnent sur la validité de certaines tâches, comme celle de comparaison évoquée précédemment.

D'autres questions d'organisation ne sont pas évoquées dans ces consignes de passation et pourtant, elles ne sont pas sans conséquence sur l'activité de l'élève : est-ce que la file numérique, qui peut être utilisée comme appui au comptage, est affichée (ou non) dans la salle de classe ? comment s'assurer que les élèves ne copient pas l'un sur l'autre ? En outre, les évaluations sont censées être prises en charge par l'enseignant de la classe de CE1 ; si les élèves retrouvent le même enseignant qu'ils avaient en CP, un contrat didactique est déjà installé et les connaissances qu'ils mobilisent peuvent être différentes de celles qu'ils mobiliseraient avec un enseignant qu'ils connaissent moins (Grapin & Mounier, 2019).

Ainsi, malgré les recommandations générales données dans le guide (le temps laissé à l'élève, les modalités de réponse, le type d'aide ponctuelle, un discours encourageant et bienveillant), les conditions de passation risquent d'être bien différentes d'une classe à l'autre, ce qui n'est pas sans conséquence sur la reproductibilité du test et sur les conclusions qui peuvent en être tirées à un niveau académique ou national. Par ailleurs, outre le fait que ce type d'évaluation est inhabituel pour les élèves de ce niveau scolaire, tant dans le type de tâche proposées que dans son organisation (sur livret et en temps limité par exemple), les choix opérés sur les modalités de passation ou le flou entourant certaines d'entre elles peuvent avoir aussi un impact sur les procédures qu'utiliseraient les élèves pour répondre, biaisant ainsi l'interprétation des résultats qui pourrait être faite.

Analyse des connaissances sur la numération écrite chiffrée

Apports didactiques sur la numération écrite chiffrée

Le programme et les chercheurs en didactique estiment la compréhension de la numération écrite chiffrée (initiée au CP) comme essentielle. En effet, tout au long de la scolarité, celle-ci est non seulement indispensable aux habiletés calculatoires, à la compréhension future des nombres décimaux, mais aussi centrale pour la conceptualisation du nombre. Nous nous référons aux travaux de Tempier (2013) sur les deux aspects de cette numération : l'aspect décimal (le rôle de dix dans la constitution des unités de numérations successives, unité simple, dizaine, centaine, etc.) et l'aspect positionnel (le fait que chaque chiffre renvoie à une unité de numération spécifique selon sa position). Nous prenons aussi en compte la distinction entre les deux systèmes de numération que sont la numération écrite chiffrée et la numération orale. Pour Mounier (2010, 2017), cette distinction va au-delà des différences de forme usuellement évoquées : en particulier, épistémologiquement parlant, les écritures chiffrées ne sont pas la façon d'écrire les noms des nombres exprimés oralement en français (c'est l'écriture littérale « quatre-vingt-trois » qui assure cette fonction ; l'écriture chiffrée « 83 » peut aussi l'assurer mais c'est loin d'être sa seule utilité !). Les deux numérations constituent deux systèmes sémiotiques distincts qui permettent de représenter des nombres, de calculer, de raisonner de manière différente. À l'école, ce sont aussi deux systèmes à distinguer mais aussi à relier, à faire dialoguer, et ceci dès le CP, *a minima* pour les nombres inférieurs à cent.

Des tâches aux procédures

Dans le guide accompagnant l'évaluation, les connaissances en jeu dans les exercices ne sont pas explicitement citées (voir annexe). En analysant les procédures *a priori* employées par les élèves, nous avons ainsi répertorié les exercices du test susceptibles d'évaluer les connaissances en jeu dans la compréhension de la numération écrite chiffrée.

Dans les exercices 1 et 8 concernant le passage de l'écriture chiffrée au nom du nombre, et réciproquement, les nombres choisis recouvrent l'ensemble du champ numérique de 1 à 100 ; ce qui est conforme aux programmes. Si l'objectif d'évaluation tel qu'annoncé dans le guide de l'enseignant pour l'exercice 8 « écrire des nombres entiers » reste flou (faut-il les écrire en lettres ou en chiffres ?), la tâche demandée à l'élève est en adéquation avec cet objectif. Pour l'exercice 1, l'élève doit entourer parmi six propositions d'écritures chiffrées, le nombre prononcé par l'enseignant : par exemple, il faut reconnaître l'écriture chiffrée de « quatre-vingt-trois » parmi 80 – 38 – 73 – 13 – 83 – 93. Le temps imparti étant de 5 secondes, il est difficile de penser que l'élève aura le temps de lire l'ensemble des écritures chiffrées qui lui sont proposées pour retrouver celle correspondant au nombre qui lui a été dicté. Cela revient donc selon nous à demander de passer du nom du nombre à une écriture en chiffres, puis de la reconnaître parmi celles proposées.

Nous allons maintenant examiner les procédures pour répondre à ces deux exercices, permettant ainsi d'analyser s'ils mettent en jeu les connaissances relatives à la numération écrite chiffrée. C'est cette analyse des procédures qui est indispensable pour interpréter la réponse. Que peut faire un élève de CE1 pour écrire avec des chiffres un nombre indiqué oralement par son nom en français ? Voici la liste des procédures envisageables (des procédures réciproques concernent la tâche inverse, « lire » une écriture chiffrée) :

- P1 : connaitre la réponse par cœur ;
- P2 : utiliser une file numérique (comptage, un à un ou/et dix en dix, partir d'un nombre dont l'écriture chiffrée est connue) ;
- P3 : procéder comme pour la lecture ou écriture de la langue française : par exemple dans « quatre-vingt-dix-huit », distinguer le son « quatre-vingt-dix » puis savoir que les noms des nombres commençant par « quatre-vingt-dix » s'écrivent avec deux chiffres dont le premier est un « 9 », puis entendre « huit » et savoir qu'il s'écrit « 8 » et qu'il faut le placer à la droite du « 9 » ;
- P4 : savoir relier « quatre-vingt-dix » à « 9 » en utilisant la comptine des dizaines (dix, vingt, trente, etc., quatre-vingt-dix) ; ce qui permet de dénombrer le nombre de mots, par exemple en levant les doigts au fur et à mesure (« dix » un doigt de levé, « vingt » un 2e doigt, etc., « quatre-vingt-dix » un 9e doigt). Faire de même en sur-comptant à partir de « quatre-vingt-dix », pour obtenir « 8 ».

Des procédures hybrides peuvent intervenir, comme le comptage des dizaines (P4) suivi du repérage direct du son « huit » (P3), ou bien une remémoration rapide de la réponse (P1) grâce à la file numérique (P2). Plusieurs procédures peuvent aussi être convoquées pour vérifier ou s'assurer d'une réponse.

Des procédures aux connaissances : qu'apprend-on au-delà de la réussite ou de l'échec ?

Que peuvent alors nous dire les réponses des élèves aux exercices 1 et 8 ? Tout d'abord, il n'est pas possible de savoir quelle procédure a été utilisée par l'élève et donc d'identifier les connaissances en-acte. En effet rien ne favorise ou ne bloque une procédure plutôt qu'une autre. En outre, même si nous accédions à sa procédure, seule la procédure P4 pourrait indiquer si l'élève a mobilisé des connaissances qui renvoient à l'aspect décimal de la numération écrite chiffrée (le nombre de dizaines et d'unités restantes). Et même ici, rien n'assure que du sens soit donné à la dizaine : l'élève sait-il qu'il compte des dizaines, les dizaines n'étant ici pas matérialisées ?

Qu'en est-il des autres exercices ? L'exercice 4 consistant à comparer des paires de nombres donnés via leur écriture chiffrée ne permet pas plus de savoir la procédure utilisée. Les « petits » nombres en jeu dans les exercices 2 (calcul mental), 3 (dominos) et 5 (résolution de problèmes additifs) ne peuvent pas permettre d'évaluer les connaissances relatives aux propriétés du système de numération écrit chiffré, puisque les connaissances sur la numération orale, anciennes et ici opérationnelles, sont très vraisemblablement mobilisées. Il en est de même de l'exercice 6 (placer un nombre sur une « ligne numérique ») : pour des raisons liées à leur ancienneté, les connaissances relatives à la numération orale seront sans doute mobilisées dans cette tâche inhabituelle, puisque celles sur la numération écrite chiffrée sont plus récentes, moins stabilisées, et ne sont ici pas plus efficaces, voire parfois même d'aucun secours.

Reste le cas de l'exercice 7, le calcul « en ligne ». Le champ numérique est plus large que celui de l'exercice 2, ce qui pourrait engager à recourir dans certains cas aux chiffres plutôt qu'au calcul mental (basé sur le nom des nombres). Deux types de stratégies sont possibles : faire le calcul et reconnaitre la réponse ou cocher une réponse parmi celles proposées. Lorsque l'élève répond correctement il est difficile de connaitre son type de stratégie ainsi que la procédure qu'il a utilisée ; par exemple, l'élève peut avoir une stratégie de calcul et utiliser une procédure basée sur la numération écrite chiffrée pour donner le résultat de 10 + 8. Néanmoins, les réponses correctes à certains calculs peuvent laisser penser un possible recours aux chiffres (15+14 ; 21+53 ; 38+22). Cela semble en effet plus efficace, à moins d'une maitrise du calcul mental non attendue pour un élève de cet âge. Notons que l'utilisation des chiffres peut faire écho à un calcul posé, qui n'atteste pas pour autant une compréhension du système de numération écrit chiffré. En effet, les élèves peuvent réussir le calcul sans donner du sens à l'algorithme qu'ils utilisent (Mounier & Priolet, 2016). Si l'élève ne répond pas correctement en utilisant toujours le même type de distracteur (comme accoler les deux chiffres, répondre « 2153 » pour 21+53), la procédure est clairement identifiée et elle peut alors révéler une méconnaissance de la numération écrite chiffrée.

Ainsi, force est de constater que tous les exercices du test peuvent se résoudre en utilisant une oralisation des écritures chiffrées quand celles-ci sont présentes (savoir « lire »). Tout se passe comme si les concepteurs ne distinguaient pas les deux numérations, considérant peut-être la numération écrite chiffrée avant tout comme une transcription écrite de la numération orale. Ce sont donc des connaissances relatives à la numération orale et non propres aux écritures chiffrées (aspects positionnels et décimaux, conceptualisation de la dizaine) qui sont évaluées, y compris à travers les transcriptions d'un système à l'autre.

En résumé, le non-accès aux procédures limite l'utilisation du test pour évaluer les connaissances des élèves. Notons cependant qu'en considérant certaines réponses erronées et leur mise en réseau pour les interpréter, les tests peuvent donner quelques indices de la (mauvaise) compréhension de la numération écrite chiffrée. Nous avons cité les réponses erronées de l'exercice 7, mais il y a aussi celles aux exercices 1 et 8 (par exemple « 89 » pour réponse possible à « quatre-vingt-dix-huit »). Pour que les difficultés de l'élève soient alors repérées, il faudrait que les réponses soient interprétées au regard des procédures fausses qui ont pu les produire et donc être traitées différemment de « réussite – échec », mais aussi qu'il y ait une mise en correspondance de ces réponses, à l'intérieur d'un même exercice et entre les exercices. Ces tests resteraient pour autant insuffisants pour évaluer la compréhension de la numération écrite chiffrée, du fait des tâches proposées.

PROPOSITION ALTERNATIVE : EXEMPLE DE TÂCHE POUR ÉVALUER DES CONNAISSANCES SUR LA NUMÉRATION ÉCRITE CHIFFRÉE

La tâche d'évaluation que nous décrivons ci-après (figure 1) vise à évaluer la façon dont les élèves sont capables (ou non) de mobiliser des connaissances sur la dizaine.

Il est indiqué aux élèves que chaque ligne comporte dix carrés. La tâche consiste à écrire en chiffres le nombre de carrés dans un temps limité. Grace à une analyse *a priori*, nous avons proposé cette tâche avec ces valeurs de variables (75 carrés organisés en 7 rangées de dix et une constellation de cinq, temps limité de moins d'une minute) afin de bloquer le comptage un à un et d'observer si les élèves utilisaient la dizaine. Deux principales procédures menant à la bonne réponse sont alors envisageables.

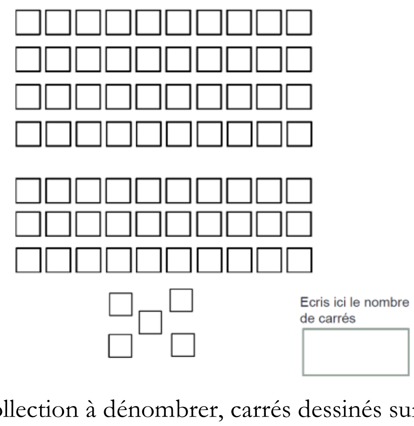


Fig. 1 : Collection à dénombrer, carrés dessinés sur feuille A4

La procédure 1 consiste à utiliser la comptine des dizaines pour prendre en compte les dizaines organisées (dix, vingt, …, soixante-dix) puis les unités restantes (cinq) pour obtenir le nom du nombre (« soixante-quinze ») et enfin à traduire ce nom en une écriture chiffrée (« 75 »). La procédure 2 consiste à compter une à une les dizaines puis les unités, écrire avec un chiffre les deux nombres obtenus en les alignant dans l'ordre conventionnel. Cette tâche permet ainsi de savoir si les élèves utilisent la dizaine dans un cas où il est nécessaire de le faire. En la proposant à 266 élèves de début de CE1, seuls 37% ont réussi à donner la bonne réponse en utilisant *a priori* la procédure 1 ou la procédure 2, ce qui témoigne de la difficulté à utiliser à bon escient la dizaine pour des élèves de ce niveau scolaire.

Au-delà de ce que cela peut déjà révéler sur l'emploi de la dizaine, nous remarquons que cette tâche seule ne permet pas d'affirmer si la dizaine est effectivement bien conceptualisée (combien d'élèves auraient utilisé la comptine des dizaines même si les groupements ne comportaient pas dix éléments ?). En outre, contrairement à la procédure 2, l'emploi de la procédure 1 ne révèle pas l'utilisation de connaissances intrinsèques au système de numération écrit chiffré puisque les élèves veulent obtenir le nom du nombre avant d'obtenir son écriture chiffrée (ce qui est inutile) et que cette procédure ne nécessite pas la connaissance explicite du nombre de dizaines (ce que signifie le premier chiffre des écritures chiffrées). Il y a alors lieu de proposer des tâches complémentaires pour évaluer ces connaissances essentielles, entre autres avec des tâches de dénombrement de collections non organisées ou semi-organisées (Grapin & Mounier, 2019).

Conclusion

Afin de pouvoir évaluer les connaissances des élèves, nous avons montré l'intérêt de pouvoir accéder à leurs procédures à partir de leur réponse. Cela suppose ainsi de concevoir des tâches pour lesquelles la résolution doit nécessiter la mobilisation des connaissances que l'on souhaite évaluer et pour lesquelles il est possible d'inférer les procédures mobilisées à partir de la réponse de l'élève. Seule une analyse didactique *a priori* de la tâche peut permettre de déterminer des valeurs de variables adaptées pour répondre à ce double enjeu. À partir de telles tâches, il est alors possible d'identifier des procédures incorrectes ou inadaptées, révélant précisément les difficultés des élèves et permettant d'une part à l'enseignant de cibler les aides qu'il propose et d'autre part, pour l'institution, de pouvoir pointer des difficultés devant faire l'objet de réflexions plus approfondies sur un enjeu d'apprentissage spécifique. Au-delà de la conception des tâches, le traitement des réponses des élèves gagnerait à dépasser le « correct-incorrect » pour prendre en compte les procédures ; il serait dès lors possible, si les tâches de l'évaluation s'y prêtent, de mettre en correspondance les procédures utilisées pour résoudre différents exercices et ainsi évaluer les mêmes connaissances dans différentes situations.

Les évaluations nationales actuelles ne sont pas conçues pour un tel traitement, mais nous ne savons pas si d'autres analyses sont faites par DEPP, analyses qui seraient basées sur d'autres éléments que la qualité de la réponse (juste ou fausse). En fait, en définissant des seuils de réussite, l'institution produit des résultats (Andreu *et al.*, 2019) conduisant à l'identification des élèves « en difficulté ». Ces résultats ne nous semblent pas pertinents pour rendre compte de la situation réelle de l'état des connaissances des élèves. Ceci rejoint le constat fait par Goigoux (2019) sur les évaluations en français. Pourtant, différents outils de la didactique des mathématiques pourraient permettre de définir *a priori* ces seuils en les combinant à une analyse statistique *a posteriori* (Grapin & Grugeon-Allys, 2018). Si on se place du côté des enseignants, ces derniers pourraient interpréter plus finement les résultats en prenant en compte les modalités de passation et les connaissances antérieures de leurs élèves. Cependant ils n'ont accès ni aux procédures (ou alors très ponctuellement), ni à la manière de coder les réponses (juste ou fausse), ce qui rend délicat d'utiliser ces évaluations pour proposer des aides à leurs élèves.

Nos conclusions relativement au contenu de cette évaluation montrent différents points d'amélioration possibles. Son exploitation en formation des enseignants reste néanmoins potentiellement intéressante, notamment pour échanger sur l'interprétation des réponses des élèves, sur la nécessité d'observer des procédures, sur les modalités de passation d'une évaluation ou encore pour travailler autour d'autres aspects (non abordés dans cet article), comme la complexité des tâches ou la couverture du domaine évalué. L'élaboration de tâches d'évaluation complémentaires dans ce cadre peut ainsi permettre de réfléchir aux situations d'apprentissage proposées en amont et aux pratiques en général.

Références

Andreu, S., Cioldi, I., Conceicao, P., Étève, Y., Fabre, M., Tidiane Ndiaye, C.A., Portelli, T., Rocher, T., & Vourc'h, R. (2019). Évaluations repères 2018 de début de CE1 : premiers résultats, *Note d'information*, 19.14.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Conseil Supérieur de l'Education Nationale (2019). *Evaluer pour mieux aider ; EvalAide, un dispositif scientifique de prévention des difficultés en lecture et en mathématiques au CP et au CE1.*

https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Evaluations_2019-2020/00/4/EvalAide_CSEN_Definitif_Mai2019_1165004.pdf

Grapin, N., & Grugeon-Allys B. (2018). Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : quelles complémentarités ? Quelles divergences ? *Mesure et évaluation en éducation. 41*(2), 37-66.

Grapin, N., & Mounier, E. (2019) Concevoir et mettre en œuvre des évaluations au service des apprentissages numériques des élèves au cycle 2, *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, Paris du 20 au 26 août 2017.* La Pensée Sauvage Editions.

Goigoux, R. (2019). Evaluation : faire mentir les chiffres, en pédagogie aussi. http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2019/05/13052019Article636933706640890148.aspx

Mounier, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot, Paris.

Mounier, E. (2017). Nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leur lien avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques*, *36*(3), 347-396.

Mounier, E., &. Priolet, M. (2016). La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire. Le cas de l'addition et de la soustraction. *Grand N*, *98*, 5-26

Ministère de l'Education Nationale (2018 a) *Repères CE1 – Cahier de mathématiques*. Repéré à https://cache.media.eduscol.education.fr/file/CE1/62/6/CE1MA_1015626.pdf

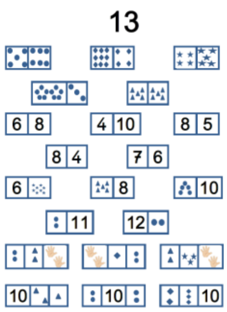
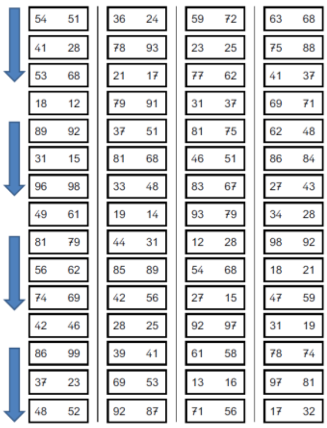
Ministère de l'Education Nationale (2018 b) *Repères CE1 – Guide pour l'enseignant.* Repéré à https://cache.media.eduscol.education.fr/file/CE1/62/0/GUIDE_CE1_1015620.pdf

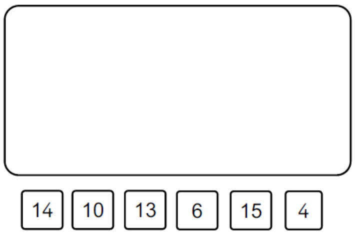
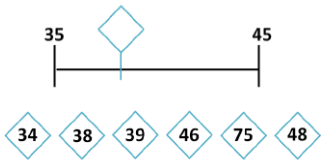
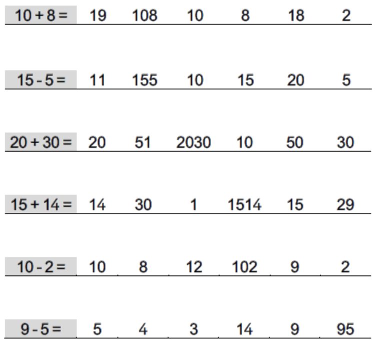
Tempier, F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Paris.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2.3), 133 – 170.

Villani, C., & Torossian, C. (2018) *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Ministère de l'Éducation nationale. Paris. Repéré à http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf

ANNEXE : DESCRIPTION DES EXERCICES DE L'ÉVALUATION EN LIEN AVEC LES ATTENDUS DES PROGRAMMES

Description des exercices de l'évaluation		**Libellé des connaissances et compétences dans les programmes**
Libellé de la compétence dans le guide	**Explicitation de l'exercice d'évaluation associé**	
Ex 1 Lire des nombres entiers	10 questions. L'élève a une liste de 6 écritures chiffrées ; il doit entourer le nombre qui est prononcé par l'enseignant.	Passer d'une représentation à une autre, en particulier associer les noms des nombres à leurs écritures chiffrées.
Ex 2 Calculer (mentalement avec des nombres entiers inférieurs à 9)	10 calculs. Pour chaque calcul, l'élève a une liste de 6 écritures chiffrées ; il doit entourer le résultat d'un calcul prononcé oralement par l'enseignant.	Calcul mental : calculer sans le support de l'écrit, pour obtenir un résultat exact, pour estimer un ordre de grandeur ou pour vérifier la vraisemblance d'un résultat.
Ex 3 Représenter les nombres entiers.	2 nombres proposés (7 et 13).  L'élève doit entourer les dominos pour lesquels la somme est égale à 7 ou 13.	Utiliser diverses représentations des nombres (écritures en chiffres et en lettres, noms à l'oral, graduations sur une demi-droite, constellations sur des dés, doigts de la main, etc.).
Ex 4 Comparer des nombres entiers.	L'élève doit barrer le plus grand dans chaque paire et réaliser le plus de comparaisons possibles en 1 minute. 	Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =, ≠, <, >.
Ex 5 Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul.	5 problèmes proposés. L'enseignant lit l'énoncé du problème 2 fois et peut répéter les données si des élèves le demandent.	Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite

<table>
<tr><td></td><td>Les élèves disposent d'un cadre où ils peuvent écrire ou faire des schémas, puis ils doivent entourer leur réponse.
</td><td>graduée, etc., conduisant à utiliser les quatre opérations.</td></tr>
<tr><td>Ex 6
Associer un nombre à une position.</td><td>15 situations à traiter
</td><td></td></tr>
<tr><td>Ex 7
Calculer en ligne avec des nombres entiers (additions et soustractions).</td><td>15 calculs. L'élève doit entourer la bonne réponse parmi les nombres proposés, par exemple (feuille 1)
</td><td>Calcul en ligne : calculer avec le support de l'écrit, en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.</td></tr>
<tr><td>Ex 8
Ecrire des nombres entiers.</td><td>10 nombres à écrire.
L'enseignant dicte chaque nombre 2 fois ; l'élève l'écrit en chiffres sur sa feuille.</td><td>Passer d'une représentation à une autre, en particulier associer les noms des nombres à leurs écritures chiffrées.</td></tr>
</table>

Note : nous avons dénombré une quinzaine de connaissances et compétences figurant explicitement dans les programmes qui ne sont pas évaluées par ce test.

MELI-MELO DANS LES DOMINOS

Sylvia Coutat

Université de Genève

INTRODUCTION

Les moyens d'enseignement romands sont en pleine réorganisation. Quelques activités disparaissent et d'autres apparaissent. Dans cet article nous proposons de partager une réflexion autour d'une activité des presque anciens moyens d'enseignement 2P (classe de 4H) « Méli mélo ! » (Ging, Sauthier, Stierli, 1997, p.48) qui semble être absente des nouveaux moyens d'enseignement. Cette activité appartient au module 1 « Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement » et au champ « Apprendre à développer des stratégies de recherche ». Dans cette activité, les élèves disposent de 15 dominos. L'enjeu de la tâche est de trouver la bonne position de chaque domino pour pouvoir recouvrir la grille à l'aide des 15 dominos. La grille 1 issue des moyens d'enseignement est présentée en Fig. 1 ainsi que les 15 dominos disponibles. Une deuxième grille est donnée dans les moyens d'enseignement (Fig. 12).

4	2	3	1	3	4
0	4	0	1	3	4
0	2	1	0	3	0
2	2	1	1	3	4
3	4	2	0	2	1

0 0	1 1	2 2	3 3
0 1	1 2	2 3	3 4
0 2	1 3	2 4	4 4
0 3	1 4	0 4	

Fig. 1 : Grille 1 et ensemble des dominos disponibles

Cet article propose une analyse de l'activité en se focalisant sur les stratégies de recherche que les élèves peuvent investir pour positionner les dominos sur la grille. Un bref rappel des stratégies de recherche décrites dans les instructions officielles est proposé afin de voir ensuite comment ces dernières interviennent dans la résolution de « Méli mélo ». Suite à cette analyse, nous partagerons quelques réflexions sur la réalisation de l'activité effective en classe ainsi que quelques exemples de difficultés d'élèves et un début de réflexion autour des relances possibles pour l'enseignant. Pour conclure nous nous interrogerons sur les potentiels apprentissages des élèves en lien avec la résolution de problème.

LES STRATÉGIES DE RECHERCHE DANS LES INSTRUCTIONS

Dans le Plan d'Etude Romand (PER), pour les cycles 1 et 2, les éléments pour la résolution de problème varient selon l'axe thématique concerné, ils se déclinent en un maximum de 7 objectifs d'apprentissages. Certains de ces apprentissages concernent des stratégies de recherche ; on les retrouve d'ailleurs dans le document d'accompagnement (ESPER CIIP, sd) des nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques (MERM). Le Tableau 1 présente l'ensemble de ces apprentissages potentiels à l'école primaire. Pour les stratégies de recherche communes aux deux documents, nous avons conservé la formulation du PER. Les stratégies en gras concernent uniquement le cycle 2.

Énoncé de la stratégie	PER	MERM
Tri et organisation des informations (*listes*, *schéma*, …)	X	X
Mise en œuvre d'une démarche de résolution	X	
Ajustement d'essais successifs	X	X
Pose d'une conjecture, puis validation ou réfutation	X	X
Déduction d'une **ou plusieurs** informations à partir de celles qui sont connues	X	X
Réduction temporaire de la complexité d'un problème	X	
Vérification, puis communication d'une démarche (oralement) et d'un résultat en utilisant un vocabulaire, **une syntaxe ainsi que des symboles** adéquats	X	
Partir de la question (chainage arrière)		X
L'étude des cas possibles qui permet une étude exhaustive des cas		X

Tableau 1 : Éléments pour la résolution de problème Stratégies dans les instructions officielles

Certaines de ces stratégies sont utilisées dans la résolution de « Méli mélo ». Pour la suite, nous utilisons un exemple de résolution qui permet de les illustrer. Différentes stratégies peuvent être investies, celles-ci dépendent de la grille proposée, des dominos à disposition et de l'avancée dans la résolution. Dans les stratégies que nous présentons, certaines sont issues des stratégies présentées précédemment. D'autres stratégies de recherche sont spécifiques à la tâche « Méli-Mélo ».

Les stratégies de recherche pour la tâches « Méli Mélo »

Plusieurs stratégies peuvent être utilisées pour la résolution de cette tâche. Nous en présentons quatre : l'étude des cas possibles et l'ajustement d'essais successifs que l'on retrouve dans le Tableau 1, l'analyse logique numérique et l'analyse logique géométrique. Alors que l'étude des cas possibles et l'ajustement d'essais successifs sont des stratégies qui peuvent être utilisées dans différents problèmes de recherche, les deux autres stratégies sont spécifiques au problème « Méli Mélo ». Nous présentons ces stratégies et leurs relations en illustrant une résolution de la grille 1. Le cheminement que nous proposons pour la recherche de la solution est un exemple parmi d'autres, sachant qu'une seule solution est possible pour la grille 1.

Etude des cas possibles

Dans le contexte de « Méli Mélo », l'étude des cas possibles permet pour chaque case d'identifier les différents dominos possibles puis pour chaque domino possible d'identifier si d'autres positions sont possibles. Par exemple pour la case 4 en haut à gauche de la grille, deux dominos sont possibles, le domino horizontal (4,2) et le domino vertical (4,0). Pour le cas (4,2) avant de poser le domino il faut analyser la grille et voir si une autre position du domino (4,2) est possible. Comme c'est effectivement le cas, on ne peut alors avoir la certitude de la position du domino (4,2). De même pour le domino (4,0), plusieurs positions sont possibles sur la grille. Il faut alors prolonger l'analyse sur les autres cases de la grille. L'étude des cas possibles est une stratégie intéressante car elle a l'avantage d'assurer une analyse exhaustive des cases de la grille, mais elle est aussi très couteuse en temps et énergie. Le texte d'accompagnement des MERM (ESPER CIIP, sd) souligne que cette stratégie de recherche doit être organisée. Les grilles contiennent 30 cases. Etudier chaque case peut s'avérer long, alors que choisir astucieusement les premières cases à étudier peut réduire le temps d'investigation des différentes cases. Il devient intéressant de remarquer que les cases situées dans les coins n'ont que deux dominos possibles (Fig. 3) les cases sur les bords trois dominos possibles et les autres cases peuvent être associées à 4 dominos (Fig. 2).

4	2	3	1	3	4
0	4	0	1	3	4
0	2	1	0	3	0
2	2	1	1	3	4
3	4	2	0	2	1

Fig. 2 : Case 1 impliquant quatre cas possibles

4	2	3	1	3	4
0	4	0	1	3	4
0	2	1	0	3	0
2	2	1	1	3	4
3	4	2	0	2	1

Fig. 3 : Case 4 impliquant deux cas possibles

Une organisation de l'étude des cas possibles serait d'étudier en premier les cases des coins, puis des bords et finalement les autres cases de la grille. Dans le cas de la grille 1, cette stratégie permet d'identifier le domino (4,4) qui ne peut être placé ailleurs que dans le coin supérieur droit, ainsi que le domino (4,1) dans le coin inférieur droit (Fig. 4).

4	2	3	1	3	4
0	4	0	1	3	4
0	2	1	0	3	0
2	2	1	1	3	4
3	4	2	0	2	1

Fig. 4 : Positions de 2 dominos dans les coins

Bien entendu d'autres organisations dans l'étude des cas possibles sont possibles. Il est par exemple possible de s'appuyer sur des dominos spécifiques comme le présente la stratégie suivante.

Analyse logique numérique

L'étude des cas possibles, telle que nous l'avons présentée, analyse les cases de la grille. Choisir les cases à étudier selon leur position est une organisation dans l'étude des cas possibles possible (Fig. 4). Choisir les cases selon les valeurs numériques est une autre organisation possible. On peut commencer par chercher sur la grille les cases mitoyennes ayant le même nombre (c'est-à-dire la position possible des dominos doubles). Ces couples de cases identiques sont très visibles et ne concernent que 4 des dominos disponibles ((0,0) : (1,1) ; (2,2) ; (3,3) ;(4,4)) voire 3 dominos car (4,4) est déjà placé. Sur la grille 1 le domino (0,0) n'a qu'une seule position possible (Fig. 5). On peut ensuite reprendre la recherche avec les cases au nombre 1, correspondant à un domino possédant un 1 à savoir (1,2) ; (1,3) ;(1,4), puis le nombre 2 etc...

4	2	3	1	3	4
0	4	0	1	3	4
0	2	1	0	3	0
2	2	1	1	3	4
3	4	2	0	2	1

Fig. 5 : Position unique du domino (0,0)

Cette stratégie peut gagner en efficacité si les dominos sont classés sur la table (les dominos doubles, les dominos avec le nombre 1, les dominos restants avec le nombre 2, …). En effet le va et vient entre la grille et les dominos disponibles est facilité. Cette stratégie découle de la stratégie d'étude des cas possibles avec une organisation utilisant les nombres sur les dominos et les cases de la grille. Il est aussi possible d'organiser la recherche en utilisant la position des dominos sur la grille pour déduire la position de nouveaux dominos.

Analyse logique géométrique

Selon l'emplacement des dominos sur la grille, certaines positions sont induites. Dans la Fig. 6 l'emplacement du domino (0,0) induit la position du domino (4,2) tout comme la position des dominos (4,4) et (4,1) qui induisent la position du domino (3,0).

4	2	3	1	3	4
0	4	0	1	3	4
0	2	1	0	3	0
2	2	1	1	3	4
3	4	2	0	2	1

Fig. 6 : Position induite géométriquement des dominos (4,2) et (3,0)

Cette stratégie permet d'identifier la position d'un domino sans passer par une étude des cas possibles ou par une analyse logique numérique qui peuvent s'avérer rapidement épuisantes.

Ajustement d'essais successifs

Ces trois premières stratégies permettent d'avancer dans la résolution de la tâche. Au fur et à mesure de cette avancée, le nombre de cases ainsi que le nombre de dominos se réduisent ce qui rend l'étude des cas possibles de plus en plus accessible. L'état de la recherche à la Fig. 6 peut être prolongé par l'une ou l'autre des trois stratégies présentées. On pourrait, par exemple, reprendre la stratégie de logique numérique avec les dominos doubles, ce qui nous permet de positionner le domino (3,3). On pourrait être tenté de placer le domino (1,1) dans la foulée, même si d'autres positions sont possibles (Fig. 7). Voyons le résultat de cet essai.

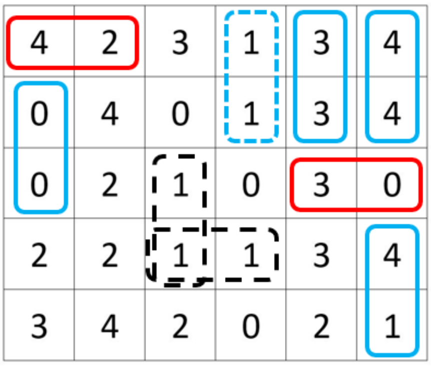


Fig. 7 : Essais avec le domino (1,1)

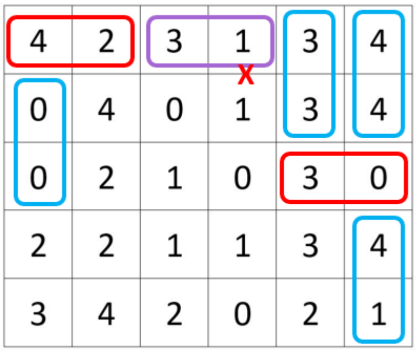


Fig. 8 : Déduction de la position du domino (3,1)

L'analyse logique géométrique nous indique la position du domino (3,0). Or ce domino n'est plus disponible. Jusqu'à présent les positions choisies pour chaque domino n'étaient pas basées sur des suppositions, sauf pour le domino (1,1). On peut donc en déduire que l'essai pour le domino (1,1) est faux. C'est alors le domino (3,1) qui doit être positionné. Cette stratégie pour le domino (1,1) illustre la stratégie d'ajustement d'essais successifs appelée aussi tâtonnement réfléchi ou essais et ajustements. Cette stratégie enchaine les essais où chaque nouvel essai s'enrichit des insuffisances de l'essai précédent. On se lance dans un essai dont la validité n'est pas assurée. Si on parvient à la solution, alors l'essai était finalement valide. Si on ne parvient pas à la solution, si on arrive à une impossibilité, alors l'essai est faux et l'analyse doit être refaite.

Associations des stratégies pour la dernière ligne droite

La position des dominos sur la grille implique six nouveaux coins avec lesquels on peut utiliser une analyse des cas possibles. Commençons, par exemple, par la case 4 dans le coin en haut à gauche produit par les dominos (4,2) et (0,0). Elle peut être associée à la case du dessous (2) ou à la case à sa droite (0). Cependant le domino (4,2) n'est plus disponible ce qui rend ce cas impossible, il ne reste que la position pour le domino (4,0) (Fig. 9). Le domino (1,0) peut immédiatement être posé par une analyse logique géométrique.

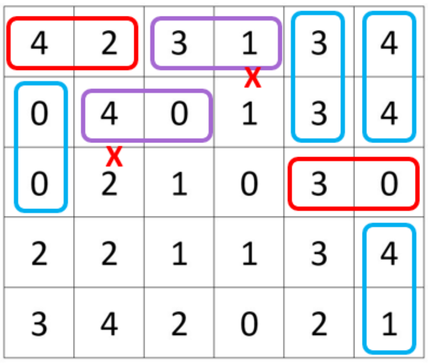


Fig. 9 : Position du domino (4,0)

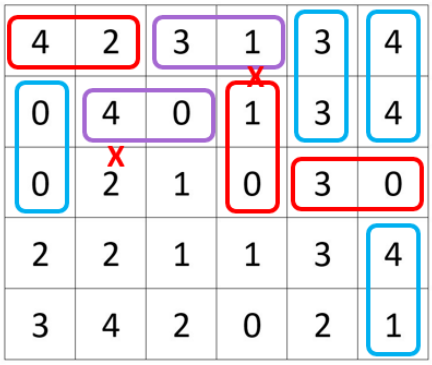


Fig. 10 : Position du domino (1,0)

La configuration de la grille à la Fig. 10 peut être déstabilisante. Si on utilise l'étude des cas possibles en partant des coins, il reste les positions doubles (1,1) et (2,2), les positions (2,1) et (3,2) toutes les quatre avec deux positions possibles. Heureusement le coin avec la case (3) en bas à gauche n'offre qu'une possibilité pour le domino (3,4). Ce qui induit (logique géométrique) la position du domino double (2,2) puis du domino (2,1) au-dessus. Le domino (1,1) trouve finalement sa place (logique numérique) et induit la position des dominos (3,2) et (2,0) par la logique géométrique. La Fig. 11 présente la solution de la grille 1. Les dominos encadrés de bleu indiquent une résolution par étude des cas possibles avec une organisation dans l'étude des cas possibles (par les coins ou par la logique numérique). Les dominos encadrés de rouge indiquent une résolution par logique géométrique. Les dominos encadrés de violet indiquent une résolution par ajustement d'essais.

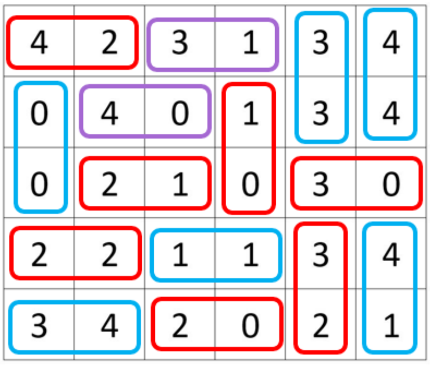


Fig. 11 : Solution de la grille 1

Si la solution de la grille 1 est unique, le déroulement de la recherche peut varier, nous n'avons présenté qu'un exemple de cheminement parmi d'autres pour illustrer les stratégies de recherche. Comme chaque domino possède une unique place, il suffit de s'assurer de l'unicité de chaque nouvelle position pour s'assurer la réussite de l'activité. Cette solution unique apporte une accessibilité à la recherche. Cette accessibilité diffère avec la 2ème grille.

DEUX GRILLES POUR DEUX NIVEAUX DE DIFFICULTÉS

Dans les moyens d'enseignement de 1997, deux grilles de jeu sont proposées. La grille 2 (Fig. 12) est proposée comme un prolongement de la première. Alors que dans la grille 1 l'analyse des cas possibles avec étude par les coins, la logique numérique et la logique géométrique nous permettent d'arriver à la solution, elles s'avèrent moins efficaces pour la grille 2. Par exemple l'étude des cas possibles sur les coins n'apporte pas de solution au départ, tout comme la logique géométrique sur les dominos doubles. La stratégie qui permet de déposer un premier domino est la stratégie d'analyse logique numérique couplée à l'étude des cas possibles qui dévoile le domino (4,0) avec une seule position possible (Fig. 13).

4	2	2	2	3	3
3	3	2	0	0	3
2	0	0	0	0	1
1	4	1	3	1	2
1	1	4	4	4	4

Fig. 12 : Grille 2

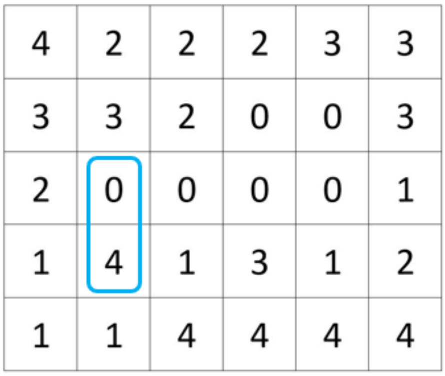


Fig. 13 : La position unique du domino (0,4)

Une fois le domino (0,4) posé sur la grille, il n'existe plus de position unique disponible pour les autres dominos. En effet chaque domino possède au moins deux positions possibles. Ce cas de figure oblige à utiliser la stratégie d'ajustement d'essais successifs. Une analyse logique géométrique de la grille 2 avec le domino (0,4) (Fig. 13) révèle que les cases 1 et 2 (de la première colonne) sont isolées. Deux possibilités apparaissent, soit les cases appartiennent au domino (1,1) et au domino (3,2) (Fig. 14) soit elles appartiennent au même domino (2,1) (Fig. 15). Face à ces deux possibilités il s'agit de faire un essai avec l'une des positions et voir s'il s'avère valide. S'il n'aboutit pas, il faudra ajuster la résolution en prenant l'autre essai.

4	2	2	2	3	3
3	3	2	0	0	3
2	0	0	0	0	1
1	4	1	3	1	2
1	1	4	4	4	4

Fig. 14 : Essai 1

4	2	2	2	3	3
3	3	2	0	0	3
2	0	0	0	0	1
1	4	1	3	1	2
1	1	4	4	4	4

Fig. 15 : Essai 2

Si on part de l'essai 1 (Fig. 14) avec une analyse logique géométrique on place les dominos (4,2) et (1,4) puis le domino (3,2) (Fig. 16). Cependant le domino (3,2) n'est plus disponible, cela signifie que cet essai n'est pas concluant. La difficulté ici est de revenir au début de l'essai. Dans les actions et manipulations des dominos il n'est pas évident que le début de l'essai soit répertorié et le risque est de reprendre au début de la résolution de la grille.

4	2	2	2	3	3
3	3	2	0	0	3
2	0	0	0	0	1
1	4	1	3	1	2
1	1	4	4	4	4

Fig. 16 : Avancée dans la résolution avec une analyse logique géométrique

4	2	2	2	3	3
3	3	2	0	0	3
2	0	0	0	0	1
1	4	1	3	1	2
1	1	4	4	4	4

Fig. 17 : Suite de l'essai 2

Cet essai infructueux nous permet d'affirmer que l'essai 2 (Fig. 15) correspond à une position valide du domino (2,1). Par une analyse logique géométrique, on peut placer le domino (1,1) (Fig. 17). Les différentes analyses possibles débouchent sur une position unique du domino (2,4) dans le coin inférieur droit. En effet, la case 2 de l'avant dernière ligne et dernière colonne peut être associée à la case 1 (au-dessus ou à sa gauche) ou à la case 4 (en-dessous). Cependant le domino (2,1) n'est plus disponible. On en déduit que le seul domino qui peut être placé sur la case 2 est le domino (2,4). Cela implique que le domino (2,4) n'est plus disponible, on en déduit alors que la case 4 du coin supérieur gauche doit être associée à la case 3 avec le domino (4,3). On obtient la Fig. 18 avec les dominos ayant des positions validées. Pour le reste des dominos, il va falloir faire des ajustements d'essais successifs car plusieurs positions sont possibles. Il s'avère finalement que plusieurs combinaisons de positions sont possibles. À titre d'exemple, si on analyse la zone des lignes 1-2 et des colonnes 2-3-4 (Fig. 19), on s'aperçoit que trois configurations sont possibles.

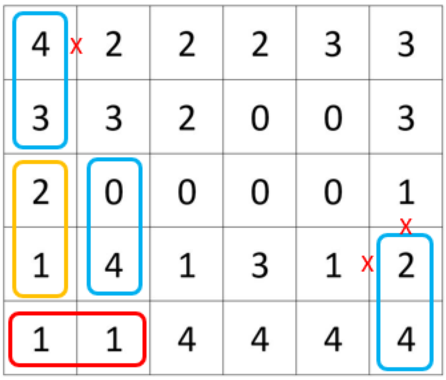


Fig. 18 : Grille 2 avec dominos valides

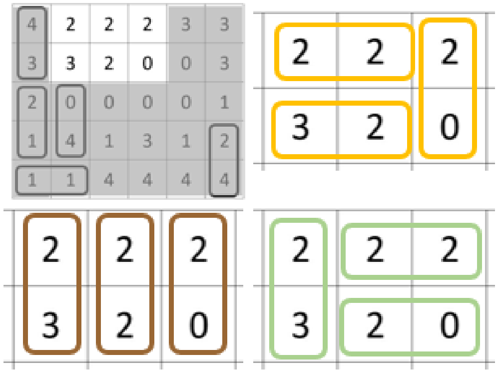


Fig. 19 : Zoom sur une partie de la grille 2

Contrairement à la grille 1, cette grille 2 n'a pas une solution unique. Parmi l'ensemble des dominos disponibles, cinq ont des positions uniques, les autres peuvent avoir plusieurs positions. Lorsque la position d'un domino est identifiée comme unique, alors, il s'agit de sa position définitive. Dans le cas de grille 2, plusieurs grilles-solutions sont possibles et rapidement dans la résolution plusieurs choix de positions de dominos se présentent dont certains valides. Cependant cette information n'est pas donnée au départ, elle est éventuellement découverte si on compare des grilles solutions. Ainsi, tant que la grille n'est pas complète, on ne peut être sûr de la validité de la position choisie. Finalement la résolution de la grille 2 nécessite de s'organiser dans les différents essais et de pouvoir revenir en arrière lorsqu'un essai n'est pas concluant pour tenter un nouvel essai. La difficulté réside dans la gestion des différents essais. La stratégie d'ajustement d'essais successifs peut mettre en difficultés certains élèves du fait de l'organisation qu'elle exige.

Selon les grilles et selon les stratégies utilisées, les élèves rencontrent des difficultés particulières. Voici quelques exemples de production d'élèves qui peuvent nécessiter des relances différentes.

Quelques exemples de productions

Chez les élèves de primaire, la stratégie d'étude des cas possibles avec la stratégie de logique numérique ainsi que la stratégie de logique géométrique ne sont en général pas utilisées au début de la résolution. Dans les premiers instants de recherche, les élèves utilisent plutôt un enchainement d'essais pas toujours ajustés ! Ils semblent déposer au hasard un domino sur des cases puis ils avancent tant que des positions de dominos sont possibles (sans s'assurer de l'unicité de la position). Ils s'arrêtent lorsqu'ils sont face à l'impossibilité de poser un nouveau domino, soit ils enlèvent tous les dominos pour recommencer, soit ils stoppent leur recherche. On voit ici la place de la manipulation des dominos qui permet de se lancer rapidement dans une résolution même si celle-ci n'est pas efficace. Dans ses relances, l'enseignant ne peut valider ou invalider les positions des dominos. D'une part car il n'est pas question que l'enseignant mémorise la position des dominos sur les deux grilles ; d'autre part car l'objectif didactique de l'activité n'est pas de remplir la grille avec les dominos mais de mobiliser des stratégies de recherche, la validité des positions des dominos étant gérée par le milieu.

La grille 1 possède une solution unique, on peut donc supposer que la stratégie qui s'appuie sur le hasard à peu de chance d'aboutir, contrairement à la grille 2 qui possède plus de solutions. Pour que les élèves basculent dans une des stratégies présentées, il est possible que l'enseignant apporte une relance. Pour que cette relance ne soit pas l'énonciation d'une stratégie, il est important de s'appuyer sur l'état d'avancement de la grille par ses incohérences ou ses potentiels.

La Fig. 20 et la Fig. 21 sont des productions d'élèves qui sollicitent l'enseignant car selon eux « ils ne peuvent plus placer de dominos ». Concernant l'élève B, il pourrait placer le domino (3,4). En laissant des cases isolées il bloque toute possibilité de remplir la grille. Concernant l'élève A, même si les dominos ne sont pas sur des positions valides, il reste des dominos qui peuvent encore être placés. On peut supposer que l'élève A a placé les dominos sur la grille sans utiliser une stratégie logique numérique mais uniquement géométrique, et encore détournée ! En effet, si on regarde sa production, ses pièces sont disposées autour de la grille probablement en commençant pas le domino (4,4), puis (1,3) en tournant le long des bords de la grille. Les cases 2 et 0 ne sont pas recouvertes car le domino n'est plus disponible de même pour les cases 4 et 0. Pour la production de l'élève B, tous les dominos sont placés dans la même orientation. Les cases isolées sont produites par des dominos qui ne sont plus disponibles.

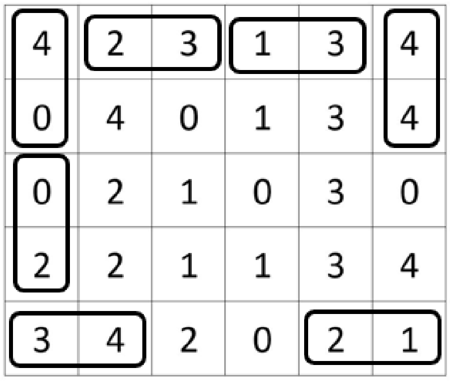


Fig. 20 : Production élève A

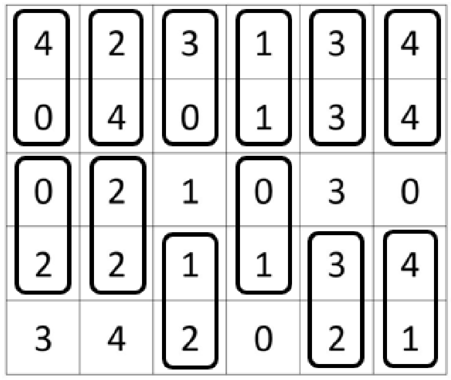


Fig. 21 : Production élève B

Il semblerait que l'élève A soit plus sur une activité de pavage qu'une activité de recherche et de déduction. En effet les cases 2 et 0 ne peuvent recevoir le domino (2,0) qui n'est plus disponible, mais elles peuvent recevoir d'autres dominos comme le (2,1) et les (1,0) qui sont eux encore disponibles. La piste qu'il suit ne va pas lui permettre de recouvrir la grille de dominos, mais une relance qui pointerait par exemple la case 2 ou la case 0 de la dernière ligne pourrait l'amener à repenser l'orientation des dominos et analyser les positions possibles des dominos restants. Lorsqu'il sera bloqué à nouveau, il devra recommencer, peut-être il ne démarrera pas de la même manière, laissant de côté un objectif de pavage. Chaque nouvel essai peut apporter de nouvelles informations et orienter les élèves vers les stratégies de recherche.

Pour l'élève B, revenir sur les consignes en précisant que les dominos peuvent être placés dans plusieurs directions (même avec les chiffres à l'envers) peut être suffisant pour un nouvel essai.

Finalement, alors que la stratégie d'ajustement d'essais successifs se présentait comme une stratégie optionnelle pour la grille 1, il apparait que chez les élèves elle peut intervenir dans la prise en main de la tâche en amont de la stratégie d'étude des cas possibles. Cependant elle n'est pas utilisée avec tout son potentiel par les élèves.

La grille 2 étant une grille de prolongement, on peut supposer que les élèves maitrisent les règles concernant les positions des dominos et que les stratégies des élèves A et B n'apparaitront plus.

Ces exemples concernent des difficultés relatives à la compréhension de la consigne de l'activité. Les exemples ci-dessous (Fig. 22, Fig. 23) illustrent des productions d'élèves qui sont dans une activité de recherche mais qui semblent s'épuiser dans la recherche. Les deux élèves ont identifié la position unique du domino (0,0) ce qui laisse penser qu'ils ont pu utiliser la stratégie d'analyse logique numérique sur les dominos doubles. Comme nous l'avons vu, c'est une organisation dans l'étude des cas possibles efficace mais elle ne peut, seule, permettre de remplir toute la grille. L'élève C n'a vraisemblablement utilisé que les dominos doubles dans sa recherche.

4	2	3	1	3	4
0	4	0	1	3	4
0	2	1	0	3	0
2	2	1	1	3	4
3	4	2	0	2	1

Fig. 22 : Production élève C

4	2	3	1	3	4
0	4	0	1	3	4
0	2	1	0	3	0
2	2	1	1	3	4
3	4	2	0	2	1

Fig. 23 : Production élève D

L'élève D (Fig. 23) semble aussi utiliser une stratégie de recherche (étude des cas possible sur les coins avec le domino (4,1), numérique avec le domino (0,0)) et 3 des 4 dominos déposés sur la grille sont sur des positions valides, seul le domino (0,2) n'est pas valide. Si l'élève se considère bloqué, c'est probablement car l'étude des cas possibles devient trop couteuse. Pour ces deux élèves il s'agit de les diriger vers une autre stratégie comme par exemple l'analyse logique géométrique qui ici leur permettrait de placer quelques dominos et les relancer dans leur recherche.

Comme nous l'avons vu, la principale difficulté de la grille 2 est la nécessité d'utiliser la stratégie d'ajustements d'essais successifs. Des essais sont utilisés pour la grille 1 mais leur exploitation reste très naïve. Cette stratégie leur permet d'évoluer dans l'appropriation des stratégies efficaces. Pour la grille 2, l'ajustement d'essais successifs ne permet pas forcément de dévoiler les stratégies efficaces. Elle est essentielle pour avancer dans la résolution de l'activité et la gestion des positions multiples des dominos. Dans la grille 1, un essai invalidé peut remettre en cause la stratégie utilisée pour positionner le domino (le hasard). Dans la grille 2, un essai invalidé remet en question la position choisie pour un domino, encore faut-il savoir laquelle. Cette différence peut être perturbante pour les élèves. Les relances de l'enseignant pour la grille 2 sont plus difficiles car, tout comme pour la grille 1 il n'est pas question de mémoriser la position des dominos pour valider ou invalider certaines positions. Il s'agit d'orienter les élèves vers des stratégies de recherche, de s'organiser dans l'étude des cas possibles ou la gestion des essais.

POUR QUELS APPRENTISSAGES ?

Lors de la rédaction de cet article, l'activité « Méli mélo », telle qu'elle est présentée, n'était pas présente dans le nouveau moyen pour les classes de 4H. Cette activité vise la mise en œuvre de stratégies de recherche. La stratégie principale est l'étude des cas possibles. C'est-à-dire, pour chaque case, identifier les différents dominos possibles et pour chaque domino possible identifier si d'autres positions sont possibles sur la grille. Cette stratégie est efficace mais peut être très lourde en temps et concentration. L'organisation dans la gestion des cases à étudier est importante car elle peut alléger la recherche. Ainsi plusieurs organisations sont possibles comme par exemple les cases des coins. Il est aussi possible de choisir astucieusement les nombres associés à chaque case renvoyant à des dominos plus ou moins spécifiques, les dominos doubles par exemple. La deuxième stratégie, centrale pour la grille 2, est l'ajustement d'essais successifs. Une dernière stratégie, la logique géométrique, permet de trouver la position de dominos en utilisant uniquement les configurations spatiales des dominos sur la grille. La manipulation des dominos permet à ces stratégies de vivre et d'évoluer à travers les actions des élèves. Il faut cependant que les élèves soient capables de les mobiliser de manière équivalente car selon la configuration de la grille, une stratégie sera plus pertinente qu'une autre. Ainsi, les élèves qui parviennent à identifier la stratégie la plus efficace à chaque instant parviendront à la solution sans trop de difficultés.

Parmi les quatre stratégies présentées, seules deux se retrouvent dans les documents institutionnels (MERM et PER), l'étude des cas possibles et l'ajustement d'essais successifs. Ces stratégies sont contextualisées dans la tâche « Méli Mélo », mais peuvent aussi être transposées dans d'autres problèmes mathématiques. Par exemple la stratégie d'ajustement d'essais successifs est utilisée dans la tâche « Des points partout » (ESPER CIIP, sd) dont une analyse est proposée dans Favier (2018). La stratégie logique géométrique est spécifique à la tâche « Méli Mélo », elle est peu transposable à un autre problème mathématique. La stratégie logique numérique repose sur une organisation dans l'étude des cas possibles qui rend cette dernière stratégie plus efficace et elle est aussi spécifique à la tâche « Méli Mélo ». C'est la valeur ajoutée d'une organisation dans l'étude des cas possibles plutôt que le choix de l'organisation (les dominos doubles) qui sera transposable dans les autres problèmes de mathématiques.

Cependant que restera-t-il de ces stratégies une fois la grille recouverte de dominos ? Les élèves ne seront-ils pas plus attirés à échanger autour des positions des dominos plutôt que des stratégies investies ? On voit ici le rôle essentiel de l'enseignant. En effet les choix de mise en œuvre permettant des collaborations, échanges, formulation, institutionnalisations semblent essentiels pour s'assurer que les élèves de 4H s'approprient ces stratégies. Des situations de formulations permettraient une mise en mots des actions, bien que ces mises en mots soient encore difficile au cycle 1. Comme nous l'avons précisé, les 2 grilles se distinguent par la stratégie d'ajustement successifs, centrale pour la grille 2 et optionnelle pour la grille 1. Ainsi, il semble important que les élèves maitrisent ou *a minima* soient initiés aux stratégies de la grille 1 avant d'entrer dans la résolution de la grille 2. Des mises en commun autour du partage d'échecs et/ou de réussites pourraient permettre aux élèves de formuler les stratégies contextualisées autour de leurs exemples. Cependant, dans quelle mesure peut-on attendre d'élèves de 4H d'expliciter les stratégies qu'ils mettent en œuvre avec les subtilités que nous avons évoquées ? Cette question ne se réduit pas à l'activité « Méli mélo », elle peut concerner l'ensemble des activités de recherche pour lesquelles la résolution de problème est un objet d'apprentissage. Au cycle 1, les élèves développent encore leur maitrise de la langue. Les situations de formulation, nécessaires dans le développement de la connaissances visée, liées à de telles activités deviennent de vrais défis ! Cet article partage une réflexion autour des stratégies de recherche d'un problème mathématique, mais apporte peu de solutions pour les relances de l'enseignant. Peut-être avez-vous déjà des pistes pour relever ces défis que vous pourriez partager avec nous ?

Bibliographie

Favier. S. (2018). Zoom sur la stratégie « ajustements d'esais successifs » au travers de l'activité Des points partout (1H-2H). *RMé, 230*, 15-22.

Ging, E., Sauthier, M.-E. & Stierli. E. (1997). *Mathématiques, deuxième année, fichier de l'élève.* Neuchatel : COROME.

CIIP (2010). *Plan d'étude romand.* Repéré à www.plandetudes.ch.

ESPER CIIP (sd). *La résolution de problèmes et les moyens de 1ère et 8.* Repéré à www.ciip-esper.ch.

LEÇONS DE LA CLASSE DE MATHEMATIQUES – LES FRACTIONS EQUIVALENTES

Jérôme Proulx

Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique - Université du Québec à Montréal

En tant que didacticien des mathématiques, je suis amené par mes travaux de recherche à être en classe et à travailler avec des élèves autant du primaire, du secondaire que de l'université. Lors de ces visites et de ces travaux, les élèves m'offrent souvent ce que j'appelle des perles mathématiques, à travers divers raisonnements, erreurs, questions, stratégies et solutions. C'est à partir de ces productions mathématiques que je propose de tirer des réflexions, voire quelques leçons, autant mathématiques que didactiques, dans le but de comprendre ce que les élèves nous enseignent parfois par leurs activités mathématiques. Ce court article réflexif se situe dans la foulée des deux premiers publiés antérieurement dans la revue (voir Proulx, 2018, 2019).

Dans une conférence prononcée à Montréal en 1988, Guy Brousseau soulevait l'importance de l'oubli chez l'élève, qui permet en particulier aux enseignants des années suivantes de ré-enseigner certaines idées mathématiques de façon plus adaptée au niveau scolaire ou aux problèmes à résoudre. Tous les enseignants ont déjà vécu une situation similaire, où ils savent très bien que les élèves ont vu et travaillé certaines mathématiques l'année précédente, bien qu'ils paraissent souvent les avoir oubliées quelques mois plus tard … et qu'ils semblent devoir (tout) refaire !

Cette situation caricaturale – une sorte de jour de la marmotte didactique ! – s'est produite récemment alors que je travaillais dans une classe de mathématiques de secondaire 1 (12-13 ans). En particulier, dans cette classe, certains élèves avaient travaillé avec moi l'année précédente, à raison d'une fois aux deux semaines, alors qu'ils étaient en 6e année du primaire (11-12 ans). Lors de l'année passée en classe de 6e année, les enseignantes m'avaient demandé de travailler diverses tâches de fractions avec leurs élèves, un sujet difficile pour eux. Lors de ce travail sur les fractions, les élèves m'ont amené, à travers leurs solutions et idées, sur le terrain des fractions équivalentes, telles que 3/10 est équivalent à 6/20 qui est aussi équivalent à 9/30 et ainsi de suite (et parfois même à 1,5/5), ou encore ½ = 50/100 = 5/10 = 3/6 (et parfois même à 3,5/7).

Ces élèves avaient plusieurs façons d'établir ces équivalences. Par exemple, ils les représentaient par des dessins de pizzas ou de palettes de chocolat, en les découpant en morceaux et parties. Les Fig. 1 et Fig. 2, tirées de leurs travaux, témoignent de leurs façons imagées d'établir des équivalences, ici entre 2/10 et 1/5 et entre 3/10 et 6/20 :

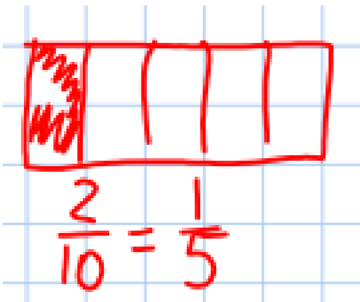


Fig. 1 : Production 1

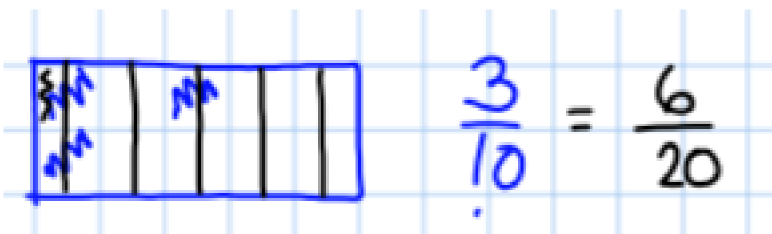


Fig. 2 : Production 2

Ce travail sur les fractions équivalentes faisait intervenir le type de raisonnement suivant sur les parties et le (re-)découpage de celles-ci : pour prendre la même quantité, puisque les morceaux sont deux fois plus petits, il faut en prendre deux fois plus ; s'ils sont trois fois plus gros, il faut en prendre trois fois moins, etc. Les raisonnements s'opéraient alors sur les représentations dessinées, pour comprendre ce qu'il se passe au niveau du symbolisme avec l'écriture fractionnaire (3/10, 1/5, …). Rien de bien surprenant dans ce type de travail, assez habituel à l'école primaire. Est-ce que tous les élèves réussissaient à raisonner de la sorte et à comprendre les liens entre l'écriture, la fraction, les parties, etc. ? Bien sûr que non, mais un travail en ce sens était exigé de tous, qui s'essayaient tant bien que mal, traçaient et découpaient des rectangles et des cercles, recoupaient et combinaient des parties, etc. Ils travaillaient fort !

L'année suivante, toutefois, je travaillais dans une toute autre école en secondaire 1. Et, quelle ne fut pas ma surprise de revoir dans ces nouvelles classes de Secondaire 1 quelques-uns des élèves de la classe de 6e année primaire de l'année précédente. Encore une fois, l'enseignant avec qui je travaillais m'a proposé de faire des fractions avec eux, dans le but de les représenter, les additionner, les comparer, etc. Dès le début de notre travail, les élèves ont rapidement ramené sur le plancher, ou plutôt sur le tableau, l'univers des fractions équivalentes !

Toutefois, il y avait une différence de taille. En effet, dès les premières incursions sur ces questions de fractions équivalentes, j'ai eu la bizarre impression de travailler sur un tout autre concept que l'année précédente, de travailler avec une autre sorte de « bête » mathématique. Cette fois-ci, quelques mois plus tard, les fractions équivalentes étaient devenues de nature entièrement numérique. Les équivalences se réalisaient à coup de multiplications. Les élèves affirmaient « tu fais fois 3, fois 3 » ou encore « tu multiplies en haut et en bas par le même nombre » pour produire leurs fractions équivalentes et aussi justifier leurs équivalences : ½ devient 3/6 en multipliant par trois en haut et en bas, 1/3 devient 2/6 en multipliant par deux en haut et en bas, 6/9 devient 2/3 en divisant par trois et par trois, etc. Le discours me semblait fortement transformé, beaucoup plus de l'ordre d'une technique opératoire que d'un raisonnement sur le tout et ses parties. Et le tableau, lui, se trouvait rempli de ces calculs (Fig. 3).

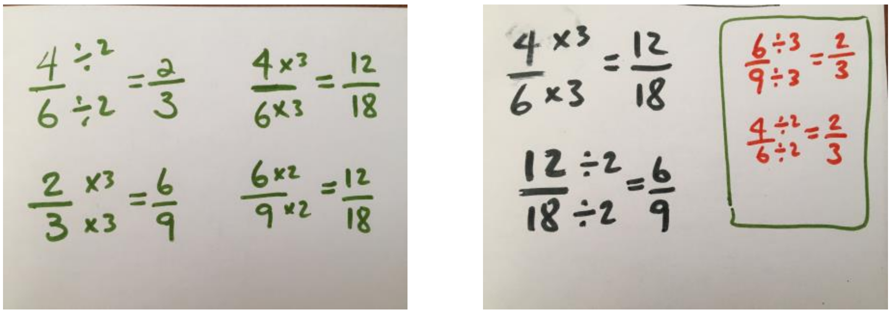


Fig. 3 : Tableau de la classe

Cette technique de multiplication est habituelle au secondaire. Par contre, ce qui (m')impressionnait dans tout ceci était que la trentaine d'élèves de la classe – et je suis même porté à affirmer « tous » les élèves de la classe – ne se trompaient pas! À tout moment, dès qu'ils en avaient besoin, les élèves produisaient des fractions équivalentes avec cette technique : sur leurs feuilles, au tableau ou encore à l'oral. Aucun élève n'a multiplié « en haut » par deux et « en bas » par trois, par exemple, car ils semblaient tous comprendre que ceci ne leur permettrait pas d'obtenir une fraction équivalente : il faut « faire pareil » au numérateur et au dénominateur, me disaient-ils.

Une autre surprise m'attendait. Alors que certains à un moment affirmaient que 1/6 était équivalent à 2/12 et à 3/18, je leur ai demandé s'ils pouvaient me montrer par un dessin ou autre, c'est-à-dire par autre chose que des calculs arithmétiques, pourquoi ces fractions étaient équivalentes. Et là, à ce moment, chacun face à sa feuille de travail, une majorité d'élèves ont bloqué, incapables de produire autre chose que des opérations arithmétiques pour justifier lesdites équivalences. Ces blocages perduraient durant la période de travail allouée, même si leur enseignant et différents adultes observateurs présents en classe essayaient d'aider certains élèves individuellement avec des interventions du type : « essaie avec un rectangle »,

« dessine-toi des cercles, des pizzas », « peux-tu représenter 1/6 par un dessin ? ». Avec ces aides et déclencheurs des adultes, un certain nombre d'élèves a évidemment réussi à faire quelques représentations imagées et nous en avons discuté au tableau à l'avant de la classe. Mais, plusieurs élèves sont demeurés bloqués ou encore remplissaient leur feuille, malgré la consigne, de nombres et de multiplications pour établir les équivalences ; et levaient la main pour nous montrer qu'ils y étaient arrivés ! Au final, bien que les élèves eussent réussi très bien (peut-être même trop bien !) à générer et expliquer les équivalences par leurs multiplications, ils n'arrivaient pas à justifier autrement que par cette technique le pourquoi de l'équivalence. La technique elle-même agissait ici comme justificatif.

Que tirer de tout ceci ?

Cette situation m'a beaucoup intrigué, surtout que je connaissais bon nombre des élèves bloqués, ayant travaillé avec eux sur ces mêmes idées quelques mois auparavant au primaire. Une première réalisation est que lorsque ces élèves, maintenant au secondaire, utilisent la technique de multiplier ou de diviser « en haut et en bas » par le même nombre, ils réussissent à produire des fractions équivalentes : ils ne se trompent pas (ou sinon très rarement). Cette situation, sans contredit, renforce chez eux l'intérêt et la force de cette technique : elle leur permet d'obtenir des réponses exactes qui seront affirmées bonnes par l'enseignant, par les autres élèves, voire par leur note d'examen. Tout ceci n'est pas à négliger pour l'élève. La réussite de la technique renforce son utilisation.

Il est tentant ici de dire « oui, mais c'est inacceptable, car ils ne comprennent pas ce qu'ils font ! ». C'est probablement vrai pour plusieurs d'entre eux. C'est même ce que leur enseignant a déploré lorsque nous en avons discuté ensemble suite à la séance. Par contre, ceci explique peu la situation et ce qu'il s'est produit.

En effet, lorsque le travail fait avec les élèves sur les deux années (6e primaire et Secondaire 1) est comparé, un aspect devient saillant. Ces élèves travaillaient très fort en 6e année pour générer et donner un sens mathématique aux fractions équivalentes. C'est par contre souvent suite à un lourd et complexe labeur, où ils coupaient, recoupaient, combinaient, comparaient des parties souvent différentes (et souvent avec des dessins approximatifs), invalidaient ou confirmaient, etc., qu'ils arrivaient à établir ces équivalences. En d'autres mots, bien que le travail sur les représentations imagées et les explications/verbalisations en termes de parts (petites, doublées, équivalentes, etc.) était axé sur certaines justifications mathématiques, ce n'était évidemment pas simple pour tous les élèves de raisonner ainsi. Bien sûr à ce moment-là, les élèves travaillaient à donner un sens et réfléchissaient au niveau conceptuel sur les fractions équivalentes. Et, bien sûr, tout ce travail était riche mathématiquement et les raisonnements et représentations déployés fort intéressants. Mais, en même temps, tout ce travail était « chargé » pour ces élèves et il ne se traduisait pas nécessairement ou automatiquement en compréhensions et réussites. À l'opposé, maintenant en Secondaire 1, et ayant accès à une technique simple et efficace, ces mêmes élèves réalisent très rapidement qu'ils sont capables de produire des fractions équivalentes ; et peut-être sans trimer aussi dur à travers un exercice laborieux qui ne leur garantit pas toujours de bons résultats.

Plusieurs diront qu'ils préfèrent que les élèves donnent du sens et raisonnent, même s'ils se trompent au final. Ceci se comprend et c'est ce que leur enseignant me disait. Affirmer ceci c'est en même temps oublier l'impact du sentiment d'efficacité chez les élèves que cette technique procure. Ces élèves peuvent maintenant bien réussir ce qui leur est demandé et rapidement, voire presqu'à tout coup, en utilisant justement cette technique. Et il est important de se rappeler qu'il est ici question de fractions, une bête noire en mathématiques pour plusieurs ! Difficile dans ce contexte pour d'autres outils et façons de faire, tels les raisonnements oraux sur les parties ou les représentations dessinées, de faire le poids...

Il y a là en effet une très belle tension, qui fait osciller entre la réussite à trouver des fractions équivalentes versus la tentative de donner du sens mathématique à ces fractions (d'autres ont déjà écrit autour d'idées similaires, dont Charles-Pézard, Butlen & Masselot, 2012). Il semble assez complexe de naviguer entre « donner du sens » et « réussir » à l'intérieur d'une dynamique scolaire où il est demandé aux élèves de produire des solutions rapidement et efficacement, sans erreurs, à un certain moment de leur parcours scolaire. De là, la tension…déchirante. Cette situation fait ressortir toute la complexité et la richesse de l'enseignement des mathématiques, ce qui rappelle l'affirmation forte de Anna Zofia Krygowska sur les retombées de la richesse de la réflexion didactique pour l'enseignement des mathématiques :

> […] je savais très bien enseigner les fractions avant d'avoir fait mes études […] maintenant je ne sais pas du tout comment je dois faire cet enseignement et c'est là le résultat de la didactique des mathématiques. Je ne sais pas en ce sens que je suis obligé de choisir, parmi les différentes solutions possibles, celle qui est la plus adaptée à ma classe; maintenant que je connais ces possibilités, je me sensé obligé de changer mes conceptions au cours de l'interaction enseignant-élève, j'ai des doutes, je vois les difficultés des élèves auxquelles je n'avais pas pensé auparavant. C'est l'embarras des richesses qui est maintenant la raison de mes inquiétudes, de mes doutes. (Krygowska, 1973 ; citée dans Bednarz, 2000, p. 77)

Déjà d'être sensibilisé à cette situation aide à mieux comprendre certaines réactions des élèves et façons d'agir en mathématiques : entre vivre des difficultés et vivre des réussites sur le coup, le choix n'est pas toujours difficile. Et c'est d'une certaine façon à ce choix déchirant que les élèves m'ont confronté, alors que je leur demandais de donner un sens à ces fractions équivalentes et de les justifier par autre chose qu'un calcul multiplicatif.

Il y a quelque chose qui possiblement s'est transformé durant ce passage entre le primaire et le secondaire, pour ces élèves. Ou, encore, il y a quelque chose de nouveau qui leur est devenu accessible l'année suivante, dès le Secondaire 1, avec cette technique efficace. En ce sens, cette situation appelle à quelque chose de plus profond qu'un simple oubli mathématique d'une année à l'autre. Elle appelle à une réflexion importante relative à la tension entre la réussite et la compréhension mathématique, un enjeu de taille dans l'enseignement des mathématiques. Et c'est à cette situation, quelque peu sans solution tranchée, que ces mêmes élèves – ces anciens élèves du primaire avec qui je travaillais maintenant au secondaire – m'ont sensibilisé.

Et ça, c'est toute une leçon !

Note

Une explication complémentaire m'est venue de l'enseignant de Secondaire 1. Il m'a expliqué que pour certains élèves les dessins sont associés à l'école primaire et donc représentent des façons de faire de « bébés ». Maintenant rendus au secondaire, ces élèves n'ont plus ou ne veulent plus utiliser ces façons de faire. Ils veulent et il leur est demandé de faire des mathématiques de « grands » avec des outils de « grands » ; et le dessin n'est pas un de ces outils pour eux, donc il n'a pas sa place. Ce phénomène de « pression sociale » a déjà été documenté, par Gray et Tall (1994) par exemple, au sujet de techniques de comptage avec les doigts où certains élèves refusent de les utiliser parce qu'ils se considèrent trop vieux pour ces méthodes dites enfantines, bien qu'ils n'aient pas de façons alternatives d'y arriver ou se trompent (Baruk, 1985, aborde aussi cet exemple avec aplomb). En transitant du primaire au secondaire, ou encore entre les années scolaires, les élèves laissent certaines choses derrière eux. Dans le cas de ces élèves de Secondaire 1, les dessins et autres représentations (et peut-être même le matériel didactique) semblent pour certains faire partie de ces choses oubliées…

RÉFÉRENCES

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine : de l'erreur en mathématiques*. Seuil : France.

Bednarz, N. (2000). Formation continue des enseignants en mathématiques: Une nécessaire prise en compte du contexte. In P. Blouin & L. Gattuso (Eds.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (pp. 63-78). Montréal, Canada: Éditions Modulo.

Brousseau, G. (1988, janvier). *Fragilité de la connaissance et fragilité du savoir*. Conférence donnée au CIRADE [VHS/couleur/2 cassettes]. Montréal, Canada: UQÀM/CIRADE.

Charles-Pézard, M., Butlen, D., & Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques? Quelle formation?* Grenoble, France: La pensée sauvage.

Gray, E.M., & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 116-140.

Krygowska, A.Z. (1973). Le rôle de la didactique de la mathématique dans les études du futur enseignant. Conférence donnée au Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal.

Proulx, J. (2018). Leçons de la classe de mathématiques – le symbolisme. *Revue de mathématiques pour l'école (RMé)*, *230*, 4-6.

Proulx, J. (2019). Leçons de la classe de mathématiques – les tables de multiplications. *Revue de mathématiques pour l'école (RMé)*, *232*, 31-33.

RMÉ POUR CELLES EST CEUX QUI S'INTÉRESSENT À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.revue-mathematiques.ch, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 1 depuis la rubrique *Consultation*.

Contact : revue.mathematiques@gmail.com

Site internet : www.revue-mathematiques.ch