COMMENT UNE MOTO AVEC DES ROUES CARREES PEUT-ELLE ROULER ?

Jana Lackova

Université de Genève

INTRODUCTION

Cet article a pour ambition de réagir à l'article présenté dans RMé n°229 par Ouailal *et al.* (2018) et de proposer un autre regard sur l'exploitation de la situation du vélo/moto avec des roues carrées à partir d'un travail d'exploration réalisé par un élève de 17 ans dans le cadre du Baccalauréat International (IB)[1]. Ces auteurs, en prenant comme porte d'entrée la motivation des élèves, proposent un dispositif appelé la *situation-problème motivante* (SPM). La SPM propose un déroulement en trois parties dont effectivement la première lance un défi amusant : « Peut-on rouler avec une bicyclette à pneus carrés ? » (Ouailal *et al.*, 2018, p. 41). L'objectif de cette activité est « d'étudier une fonction générée à partir de la fonction exponentielle, d'exploiter son graphique pour favoriser une modélisation de la courbe sur laquelle on peut dérouler un carré » (p. 41). Par la suite les élèves travaillent sur des types de tâches classiques autour de la fonction (continuité, monotonie, fonction réciproque, etc.) avec la représentation graphique d'une fonction (parabole) connue des lycéens dans la partie 2 et d'une fonction inhabituelle (chaînette) pour la troisième partie. Cependant, le lecteur et les élèves peuvent rester un peu déçus car ils ne sauront pas si et comment on pourrait faire rouler une bicyclette avec des roues carrées. Du fait qu'aucun lien n'est établi entre les parties 2 et 3 et la question initiale, celle-ci ne semble que servir de prétexte pour attirer l'attention des élèves. De plus, ces deux parties visent clairement à travailler la fonction réciproque et, dans ce cas, une autre question de départ en lien avec la fonction réciproque et à laquelle les élèves auraient pu répondre, aurait été plus appropriée.

UNE BRÈVE ANALYSE *A PRIORI* ET LA SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME

Avant de regarder le travail d'un élève, plongeons ensemble dans le problème. La première question qui se pose est de comment modéliser la surface sur laquelle la moto avec des roues carrées peut rouler. Pour le confort de conducteur, il faut que le siège reste tout le temps à une hauteur constante par rapport au sol, ce qui, mathématisé, revient à garder le centre du carré à une hauteur h constante lors du roulement. De plus, la roue doit tourner sans glisser, c'est à dire qu'elle doit être tangente à la surface au point de contact, le centre doit être aligné verticalement avec le point de contact et la longueur de la « bosse » doit être égale à la longueur du côté du carré (voir Fig.1).

[1] L'IB est une fondation éducative à but non lucratif établie à Genève en 1968 pour répondre aux besoins des écoles internationales et de la communauté internationale. Elle propose quatre programmes éducatifs pour les élèves âgés de 3 à 19 ans couvrant ainsi tous les degrés de la scolarité.

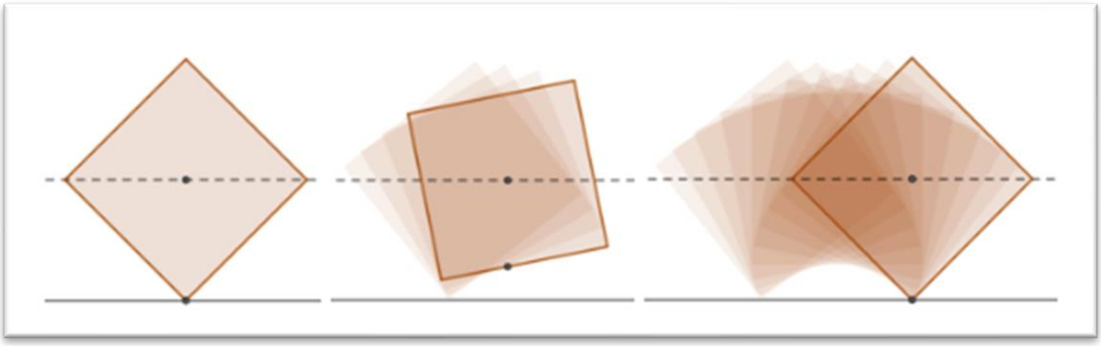


Fig. 1 : Roulement du carré

Maintenant, si on considère une position quelconque du carré, on peut construire deux triangles rectangles comme le montre la Figure 2.

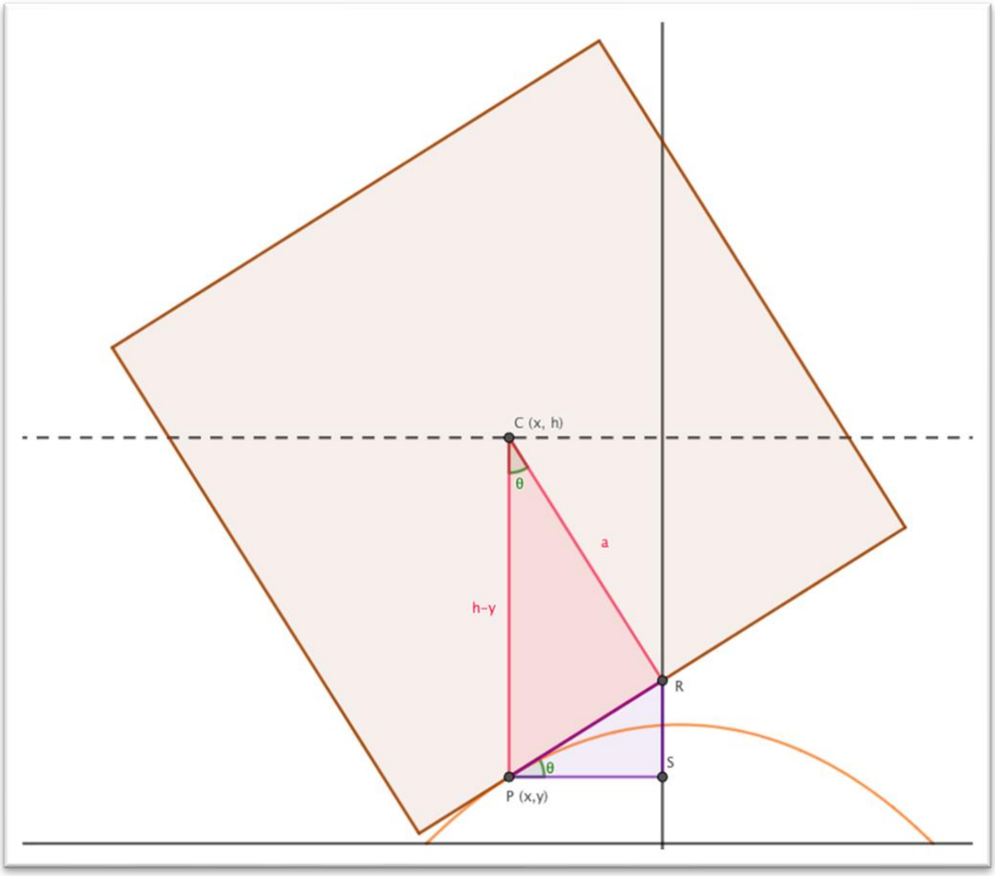


Fig. 2 : Position quelconque du carré

La clé de la modélisation est que l'angle θ correspond à la pente de la tangente en P à la fonction « route » *y(x)*, c'est à dire :

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

De plus, dans un triangle rectangle nous avons l'identité suivante :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

On en déduit :

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

Dans le ΔPRC rectangle en R nous avons :

$$\cos\theta = \frac{a}{h-y}$$

On en déduit :

$$\frac{a}{h-y} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 - 1}$$

Et on résout pour dx :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 - 1}}dy = dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h-y}{a}\right)^2 - 1}}dy = \int dx$$

Avec une substitution de $u = \frac{h-y}{a}$ et donc $du = \frac{-dy}{a}$ d'où $dy = -adu$.

$$\int \frac{-a}{\sqrt{u^2-1}}du = \int dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du = -\frac{1}{a}\int dx$$

La primitive de la fonction g(u)=$\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}$ est $G(u) = arcosh\, u$, réciproque du cosinus hyperbolique.

On aura alors :

$$arcosh\, u + c_1 = -\frac{x}{a} + c_2$$

$$arcosh\left(\frac{h-y}{a}\right) = -\frac{x}{a} + C$$

$$\frac{h-y}{a} = \cosh\left(-\frac{x}{a} + C\right)$$
$$y = -a\cosh\left(-\frac{x}{a} + C\right) + h$$

Pour déterminer la constante *C*, il faut résoudre cette équation pour la valeur initiale de $P(0, h-a)$, c'est à dire quand le carré est en position horizontale (voir Fig. 3)

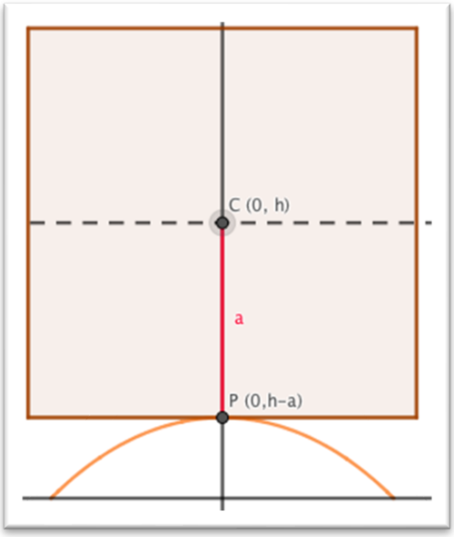


Fig. 3 : Position horizontale du carré

$$h - a = -a\cosh(0 + C) + h \;\Leftrightarrow\; \cosh(0 + C) = 1 \;\Leftrightarrow C = 0$$

On a alors la solution particulière de notre équation différentielle :

$$y = -a\cosh\left(-\frac{x}{a}\right) + h \Leftrightarrow y = -a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + h$$

puisque le cosinus hyperbolique est une fonction paire.

Il reste à effectuer un dernier petit calcul afin d'exprimer la hauteur h en fonction du paramètre a, sachant que la longueur du côté du carré est de 2a. Pour cela nous allons mettre le carré en position verticale (voir Fig. 4).

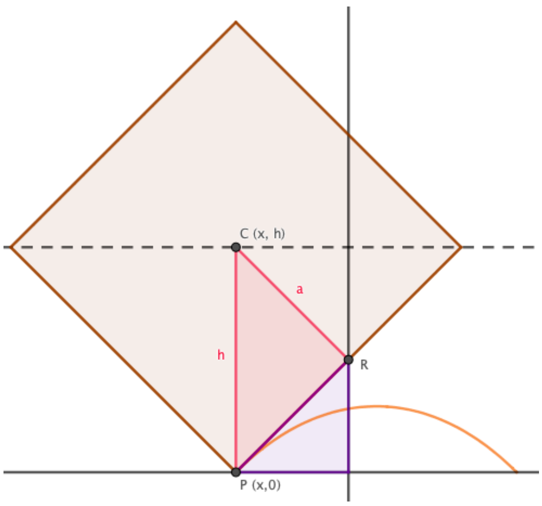


Fig. 4 : Position verticale du carré

Puisque le ΔPRC est rectangle et isocèle en R, nous avons :

$$h^2 = 2a^2$$
$$h = a\sqrt{2}$$

Cela nous donne l'équation finale de la courbe sur laquelle on pourra faire rouler un carré de côté 2a :

$$y = -a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + a\sqrt{2}$$

L'intersection de la chaînette ainsi définie avec l'axe *x* donne la partie de la courbe sur laquelle pourra se dérouler notre roue carrée. La solution analytique pour trouver les coordonnées de ces deux points est laissée ici à la charge du lecteur intéressé[2]. Après cette solution analytique, il est légitime de se demander si et comment cette situation pourrait être proposée comme une véritable démarche d'investigation au collège car la modélisation nécessite d'avoir recours aux outils mathématiques (notamment l'équation différentielle et les fonctions hyperboliques) qui ne sont pas disponibles aux collégiens. Cela est d'autant plus important afin d'éviter de tomber dans le piège de s'en servir comme prétexte sans jamais vraiment l'explorer comme c'était le cas de la SPM proposée par Ouailal *et al.* (2018).

Un regard théorique sur la démarche d'investigation

Après cette petite incursion dans les maths d'au-delà du collège, penchons-nous ensemble sur ce qu'on entend derrière la démarche d'investigation. L'idée de rendre l'élève actif ou de le mettre en situation de recherche n'est pas nouvelle, elle remonte déjà au 17e siècle avec les écrits de Comenius (1592–1670) ou de Rousseau (1712–1778) comme le soulignent Maaß et Artigue (2013, p. 781). Cependant, l'émergence de la pédagogie basée sur la démarche d'investigation[3] est généralement attribuée au philosophe et éducateur américain John Dewey (1859-1952). Dewey (1938, pp. 104-105) définit l'enquête comme la transformation contrôlée ou dirigée d'une situation indéterminée en une situation déterminée, dans l'idée de convertir les éléments de la situation originale en un ensemble unifié. Le premier pas indispensable dans l'enquête mènera selon Dewey (1938, p. 108) à la problématisation de la situation, qui sans cela risquerait de perdre de sa pertinence. L'étape suivante de la détermination du problème et de la recherche d'une solution est l'observation, qui pourrait être source d'idées ou de suggestions et aboutir à une idée pertinente qui présenterait une possible solution. Il précise qu'il faut se méfier d'accepter trop vite des idées qui mèneraient à des conclusions hâtives et non-fondées, car la *solution soudaine* est généralement le résultat de beaucoup de recherches préalables. Schön (1992, p. 122) conclut que l'enquêteur est ainsi impliqué et s'approprie la situation au lieu d'être un simple spectateur externe. Artigue et Blomhøj (2013, p. 799) décrivent les conditions dans lesquelles l'enquête peut se développer dans les classes. Il faut que la situation initiale comporte une part d'inconnu qui constitue un défi. Cependant, cette part d'inconnu doit pouvoir être approchée par ce qui est déjà connu afin de pouvoir générer des idées ou des hypothèses, ce qui selon ces auteurs constitue un défi didactique majeur quant à l'intégration de l'enquête dans l'enseignement. Ces auteurs résument que la DI consiste à mettre les élèves en situation de recherche afin de leur faire expérimenter la manière dont les scientifiques travaillent.

Analyse du travail d'un élève

Il existe, dans plusieurs pays, des dispositifs qui consistent à faire effectuer aux élèves en autonomie sous la direction de l'enseignant un travail obligatoire, évalué dans le cadre du diplôme de fin d'études

[2] La réponse est $x = \pm a \cdot \operatorname{arcosh}(\sqrt{2})$ ou bien $x = \ln(\sqrt{2} \pm 1)$ et il s'agit bien d'un nombre transcendant et pour vous donner l'ordre de grandeur $x \approx \pm a \cdot 0{,}8814$.

[3] De l'anglais : inquiry-based learning.

secondaires, comme le travail de maturité en Suisse ou les TPE[4] en France. Ce travail, généralement interdisciplinaire, vise à introduire aux méthodes scientifiques. L'IB a mis en place un dispositif d'évaluation en mathématiques « Exploration en mathématiques » dont l'objectif est de permettre aux élèves d'effectuer en autonomie un travail mathématique conséquent sur un thème choisi encadré par leur enseignant.

Je propose d'analyser ici les éléments qui ont permis à un élève de 17 ans du Baccalauréat International d'explorer la situation analysée ci-dessus dans le cadre de son travail de diplôme à partir d'une vidéo (Fig. 5) montrant un saut avec une moto à roues carrées.

Fig. 5 : Le point de départ… (https://www.youtube.com/watch?v=u-hDEEl67_Y)

Au moment d'élaborer son travail d'exploration, l'élève avait à disposition des connaissances sur les fonctions et leur transformation en général, les fonctions standards des programmes du collège (les fonctions polynomiales du 2e et 3e degré, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques, la fonction exponentielle et logarithmique, etc.) et les bases de l'analyse (la dérivée des fonctions connues, l'intégrale définie et indéfinie et leurs applications). Je précise que le programme ne couvre pas les fonctions hyperboliques ni les équations différentielles, donc une modélisation telle que proposée ci-dessus n'était pas accessible à cet élève. Par rapport à son profil, il s'agit d'un élève bon en mathématiques de la filière maths renforcées. Ce travail était encadré par deux enseignants de mathématiques dont un est l'auteur de cet article. Il me semble important de souligner qu'il s'agit d'une analyse *a posteriori* du rapport final rendu par l'élève. Celui-ci n'était pas écrit sous forme d'une narration de recherche mais sous forme d'un compte rendu des résultats obtenus, je n'avais donc pas accès à l'intégralité de ses recherches, mais seulement à celles qui ont abouti aux résultats présentés complétées par mes souvenirs lors de l'encadrement.

Les avancées récentes (Para & Otero, 2018) dans la théorie anthropologique du didactique (TAD) montrent que les dialectiques sont indispensables pour qu'une véritable enquête puisse avoir lieu. Dans cette analyse, je me m'intéresserai plus particulièrement à la dialectique médias-milieux (Chevallard, 2008). Le terme média désigne tout système qui apporte de l'information sur le monde ou sur une de ses parties et qui s'adresse à un certain type de public : le cours du professeur, une revue, un site Internet, etc. (Chevallard, 2008). Le milieu représente « tout système qu'on peut regarder comme dénué d'intention dans la réponse qu'il peut apporter, de manière explicite ou implicite, à telle question déterminée » (Chevallard, 2008, p. 344) et le milieu ainsi défini est proche de celui de milieu adidactique de la théorie des situations didactiques. Selon Chevallard (2008) le processus de validation se réalise grâce à la dialectique des médias et des milieux car :

[4] Travaux pratiques encadrés.

> […] l'existence d'une dialectique vigoureuse (et rigoureuse) entre médias et milieux est une condition cruciale pour qu'un processus d'étude et de recherche ne se réduise pas au recopiage acritique d'éléments de réponse épars dans les institutions de la société. » (p. 345)

Dans le dispositif « Exploration en mathématiques », les élèves ont accès aux différents médias (internet, livres, Wolfram alpha[5], etc.), cependant s'ils veulent utiliser un savoir particulier qui n'est pas au programme, ils doivent en manifester une bonne compréhension et être capables de l'appliquer correctement. Je voudrais souligner particulièrement l'importance du rôle des médias dans cette exploration parce qu'ils ont fourni des informations, nécessaires pour combler les lacunes dans les connaissances de l'élève, sans lesquelles ce travail d'exploration n'aurait pas pu exister. Cette exploration serait bien sûr impossible sans la présence d'une dialectique, d'un « va et vient » entre l'information provenant de ces médias et le milieu qui va évoluer et être enrichi en fonction de l'information retenue ou rejetée. Regardons donc comment l'élève a su problématiser la situation, chercher les informations dans les médias, les intégrer dans son milieu et les vérifier par une démarche expérimentale dans l'environnent GeoGebra.

La problématisation de la situation

La situation de la moto qui roule avec des roues carrées a clairement suscité chez cet élève la curiosité intellectuelle (voir Fig. 6 en bleu) de comprendre pourquoi et comment cela est possible et constitue ainsi la situation indéterminée au sens de Dewey d'une potentielle démarche d'investigation. Cependant, Dewey (1938) insiste sur le fait qu'une enquête ne pourrait pas se déployer sans la problématisation de cette situation. Dans l'introduction, on trouve deux éléments (voir Fig. 6 en jaune et rouge) qui contribuent à une bonne problématisation de cette situation : la prise de conscience qu'une surface particulière est nécessaire pour faire rouler une roue carrée et l'information que la courbe ainsi formée s'appelle chaînette. Comme l'élève mentionne déjà dans l'introduction qu'il sait que le carré peut rouler sur une chaînette (voir Fig. 6 en rouge), je fais l'hypothèse que cette information lui a été donnée par son enseignant. Celle-ci a probablement aussi été retrouvée dans des médias, notamment dans Wikipedia (Mé$_1$)[6], puisqu'on trouve dans le dossier de l'élève des captures d'écran de l'animation de la roue carré qui roule sur la chaînette renversée[7] (voir Fig. 7).

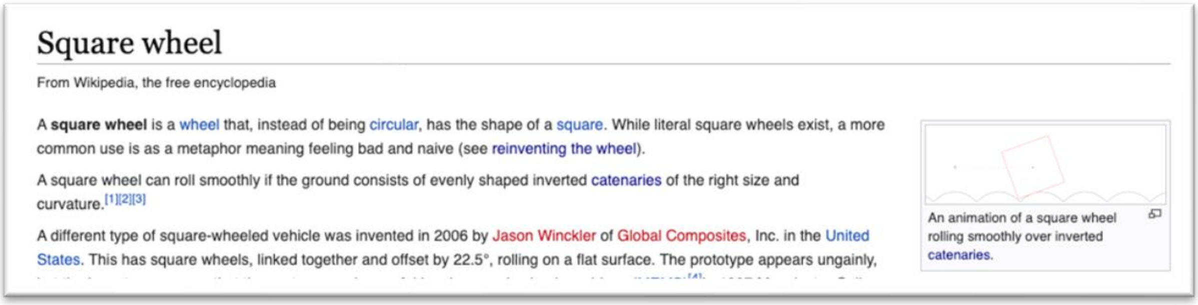
> to BBC One, which is probably one of my most favourite channels due a fantastic show 'Bang Goes The Theory'. I vividly remember the episode (luckily I found a link to it on YouTube, see the screenshot on the cover)[1] where Jem Stansfield, a member of the 'Bang Goes The Theory' team, jumps on the ramp on a square wheeled motorbike. I was simply stunned by the fact that a square wheel can even roll but then I realized that it required a special kind of path.
> Now, as an IB higher-level math student I became very interested in the math part of the path for the wheel, which I know is called a catenary. Furthermore, I learnt that catenaries are defined by a specific function, thus, in this exploration I am aiming to find the relationship between the side length of the square and the function of the catenary.

Fig. 6 : Extrait de l'introduction du dossier

[5] https://fr.wikipedia.org/wiki/WolframAlpha L'élève connaît cette ressource de son enseignant.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wheel.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Square_wheel#/media/File:Rolling-Square.gif.



Square wheel

From Wikipedia, the free encyclopedia

A **square wheel** is a wheel that, instead of being circular, has the shape of a square. While literal square wheels exist, a more common use is as a metaphor meaning feeling bad and naive (see reinventing the wheel).

A square wheel can roll smoothly if the ground consists of evenly shaped inverted catenaries of the right size and curvature.[1][2][3]

A different type of square-wheeled vehicle was invented in 2006 by Jason Winckler of Global Composites, Inc. in the United States. This has square wheels, linked together and offset by 22.5°, rolling on a flat surface. The prototype appears ungainly,

An animation of a square wheel rolling smoothly over inverted catenaries.

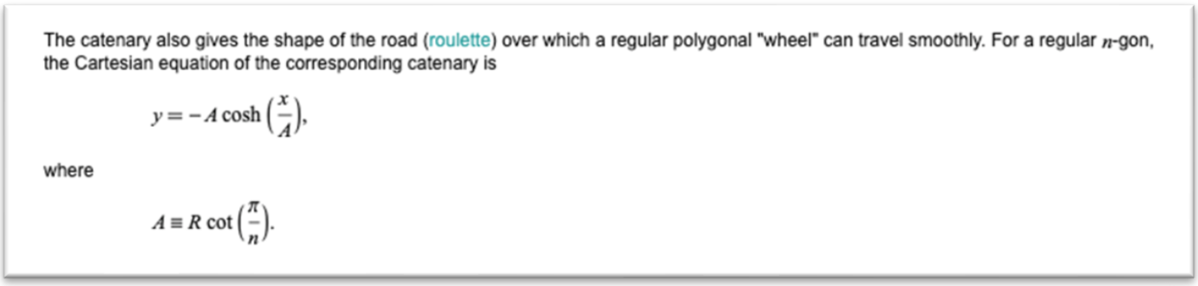
Fig. 7 : Extrait de Wikipedia

Ce travail d'exploration est construit à partir d'une réponse toute faite provenant des médias qui n'a non seulement pas empêché l'enquête de se dérouler, mais a permis à l'élève de mener une véritable activité mathématique. La condition pour cela est l'existence de la dialectique médias-milieux que je vais tenter d'identifier dans cette analyse.

L'analyse en termes de dialectique entre médias et milieux

Dans cette exploration, nous pouvons distinguer deux parties : un travail expérimental à l'aide de GeoGebra qui aboutit à la formulation d'une conjecture et une solution analytique avec une preuve formelle de la conjecture formulée.

Commençons par regarder les médias qui étaient sources d'informations nécessaires et importantes pour l'avancement de l'enquête. La page de Wikipedia (Mé$_2$) donne deux éléments qui sont admis dans le milieu de l'élève : la roue carrée peut rouler sur une chaînette renversée (réponse R$_1$) et une animation (R$_2$) qui montre la roue carrée rouler sur une série de chaînettes tronquées (Fig. 7). La réponse R$_1$ permet à l'élève de procéder à une nouvelle recherche qui aboutit à la page Wolfram MathsWorld (mentionnée comme ressource dans la bibliographie) sur la chaînette[8] dans laquelle on trouve l'information ci-dessous (Fig. 8).



The catenary also gives the shape of the road (roulette) over which a regular polygonal "wheel" can travel smoothly. For a regular n-gon, the Cartesian equation of the corresponding catenary is

$$y = -A \cosh\left(\frac{x}{A}\right),$$

where

$$A \equiv R \cot\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Fig. 8 : Extrait de la page Wolfram MathsWorld sur la chaînette

Cette ressource donne l'équation du cosinus hyperbolique avec la condition sur le paramètre A pour un polygone régulier et l'élève en récupère l'équation du cosinus hyperbolique (R$_{1.1}$) :

$$y = -\,a\ \times \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Avant de continuer, il est important de faire le point sur ce que le milieu de l'élève contient déjà (voir Table 1 en noir) et ce que vient d'y être ajouté (voir Table 1 en vert) afin de mieux saisir la dialectique médias-milieux.

[8] http://mathworld.wolfram.com/Catenary.html.

Médias		Milieu	
		Ordinateur avec accès à Internet	
		GeoGebra : l'élève connaît ce logiciel	
		Wolfram Alfa	
		Connaissances antérieures (fonctions, dérivée, intégrale)	
Mé$_1$	Wikipedia (Square wheel)	La roue carrée peut rouler sur une chaînette renversée.	R$_1$
Mé$_1$	Wikipedia (Square wheel)	Animation Roue carrée	R$_2$
Mé$_2$	site Wolfram MathsWorld (chaînette)	L'équation du cosinus hyperbolique : $y = -a \times \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$	R$_{1.1}$

Table 1 : Liste des médias et contenu du milieu

Le milieu avec lequel l'élève va interagir tout au long de cette exploration contient déjà des connaissances antérieures sur les fonctions et avec l'aide du logiciel GeoGebra il peut travailler avec cette fonction inhabituelle. La dialectique médias-milieux entre en jeu qui lui permet d'évaluer la pertinence des informations en menant une réflexion critique afin d'enrichir le milieu.

A partir de la R$_2$ (l'animation), l'élève fait deux observations :

1) Afin que le carré puisse se dérouler sur la chaînette il faut que la longueur de son côté soit égale à la longueur de la courbe sur laquelle il se déroule.
2) Le carré s'adapte parfaitement là où les deux courbes se rencontrent, il y doit y avoir alors un angle de 90° (voir Fig. 9).

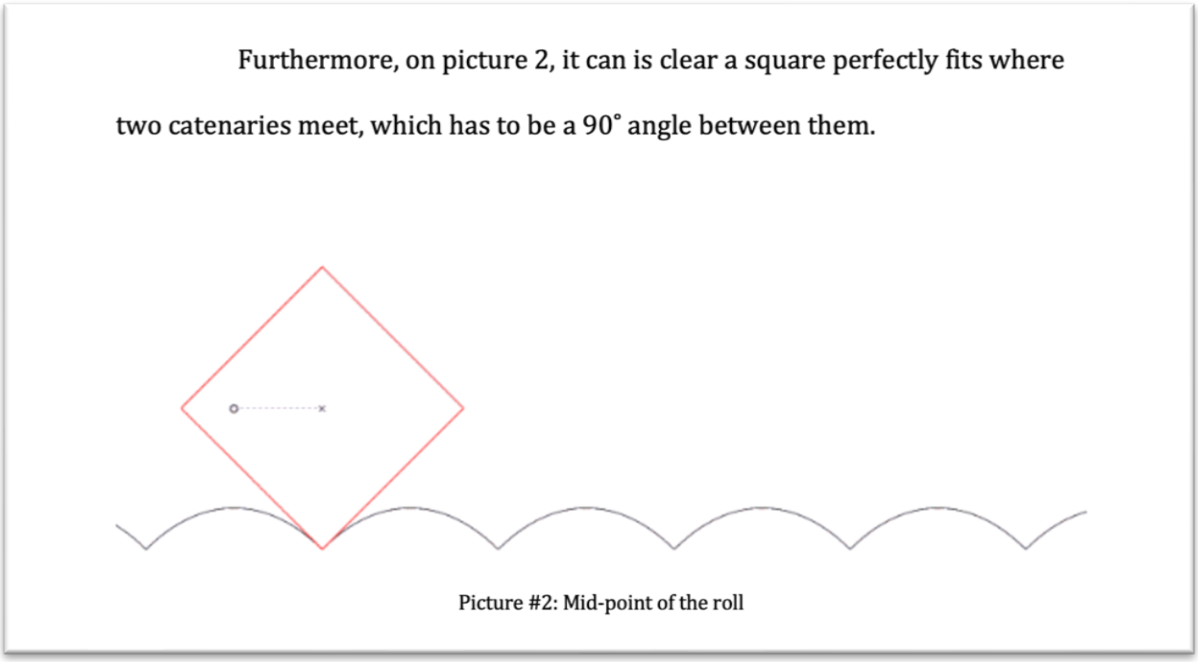
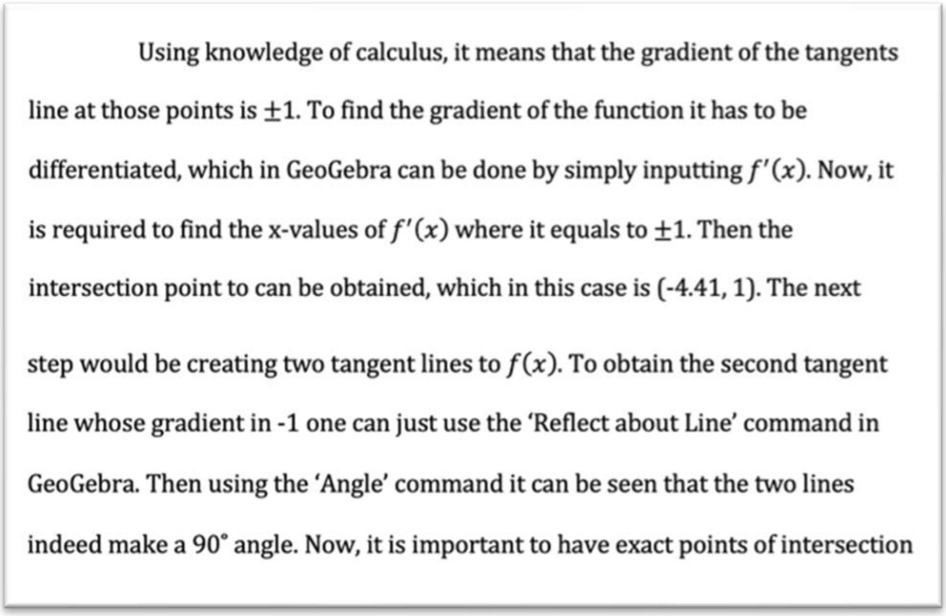


Fig. 9 : Carré en position verticale (extrait du dossier de l'élève)

Ces observations et ses connaissances antérieures sur les fonctions et la dérivée permettent à l'élève de faire l'hypothèse que les tangentes au point d'intersection des deux courbes doivent être perpendiculaires avec donc leurs pentes respectives égales à 1 et -1 (Fig. 10).



Using knowledge of calculus, it means that the gradient of the tangents line at those points is ± 1. To find the gradient of the function it has to be differentiated, which in GeoGebra can be done by simply inputting $f'(x)$. Now, it is required to find the x-values of $f'(x)$ where it equals to ± 1. Then the intersection point to can be obtained, which in this case is (-4.41, 1). The next step would be creating two tangent lines to $f(x)$. To obtain the second tangent line whose gradient in -1 one can just use the 'Reflect about Line' command in GeoGebra. Then using the 'Angle' command it can be seen that the two lines indeed make a 90° angle. Now, it is important to have exact points of intersection

Fig. 10 : Hypothèse émise par l'élève (extrait du dossier de l'élève)

De plus, puisqu'à ce stade de son exploration, il ne peut pas vérifier son hypothèse analytiquement, il utilise les outils de GeoGebra pour la tester (Fig. 11). Pour rappel, c'est l'élève qui a créé son environnement expérimental dans GeoGebra avec l'aide de l'enseignant qui lui a expliqué l'outil « curseur ».

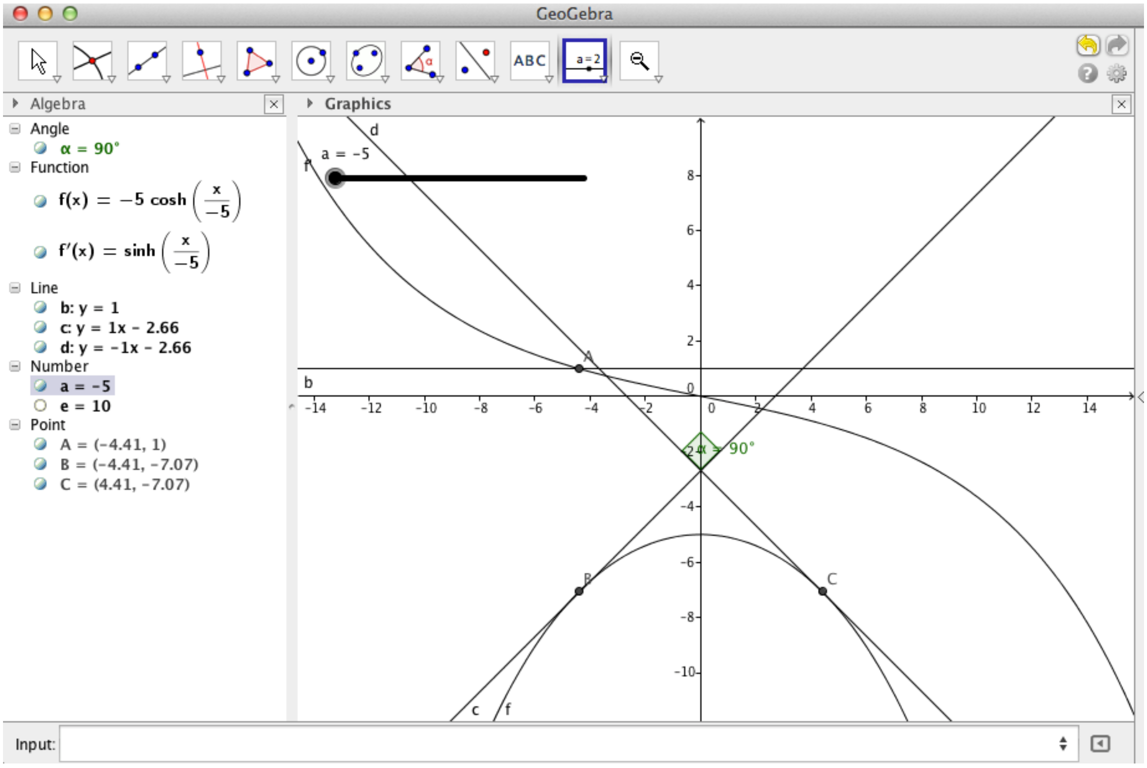


Fig. 11 : Environnement GeoGebra pour tester les hypothèses (extrait du dossier de l'élève)

L'élève explique qu'il lui faut la dérivée du cosinus hyperbolique, cherche où $f'(x) = 1$ et trouve le point $A(4{,}41; 1)$. Bien qu'il manque l'explication en détail de comment il trouve le point B[9], il crée la tangente de *f(x)* en B vérifiant que sa pente est bien égale à 1. En effet, GeoGebra affiche l'équation de la tangente instantanément (droite c sur la Fig. 11). En utilisant les propriétés de la symétrie axiale, il trouve le point C et la deuxième tangente (droite d sur la Fig. 11). Afin de confirmer ses hypothèses de départ, il vérifie que ces deux tangentes sont bien perpendiculaires.

La deuxième partie de ce travail exploratoire consiste à chercher la relation entre le paramètre *a* du cosinus hyperbolique et la longueur du côté du carré. Le paramètre *a* de la fonction *f(x)* est géré par l'outil curseur de GeoGebra et la valeur *e* qui représente la longueur de la courbe entre les points B et C (voir Fig. 11) est calculée par GeoGebra. L'élève utilise le curseur pour générer d'autres exemples (voir Fig. 12) et fait la conjecture que la longueur de la courbe est le double de la valeur absolue du paramètre et, de ce fait, la longueur du côté du carré est égale à *2/a/*.

Parameter *a*	Arc length of the catenary
-5.0	10
-4.0	8
-3.0	6
-2.0	4
-1.0	2
0.0	0
1.0	2
2.0	4
3.0	6
4.0	8
5.0	10

Fig. 12 : Relation entre le paramètre *a* et longueur de la courbe (extrait du dossier de l'élève)

La deuxième partie de ce travail présente la solution analytique et la preuve formelle de la conjecture ci-dessus. À nouveau, l'élève a besoin des médias, notamment pour savoir comment calculer la longueur d'une courbe entre deux points car cela n'est pas au programme de mathématiques. Je fais l'hypothèse que l'élève a utilisé la vidéo (expliquant comment trouver la formule pour la longueur d'une courbe) de Khan Academy[10] car cette ressource était utilisée par l'enseignant et connue des élèves (Fig. 13).

[9] Je pose l'hypothèse que l'élève s'est rendu compte le point B est à l'intersection de la courbe et d'une ligne verticale passant par A.

[10] https://youtu.be/8Y-snjheI9M.

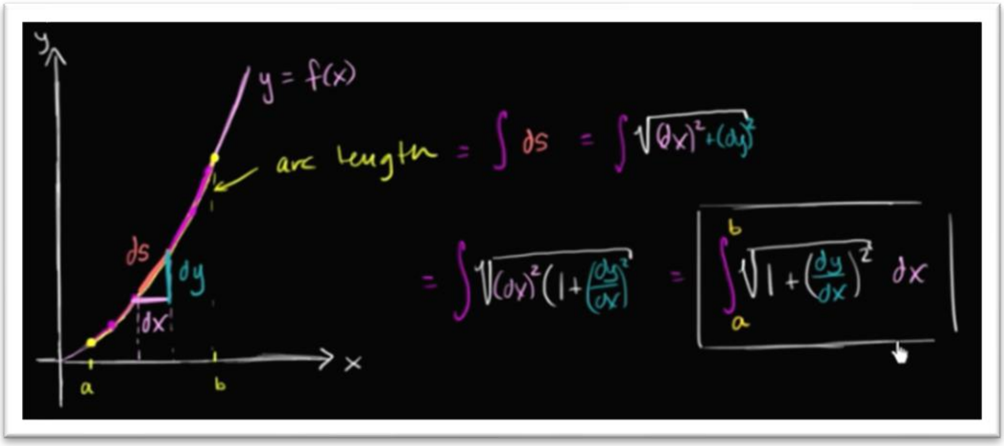


Fig. 13 : Formule de la longueur d'une courbe (extrait de la vidéo de Khan Academy)

Cet extrait (voir Fig. 14) montre non seulement que l'élève ne se satisfait pas du « copier-coller » de la formule qui calcule la longueur de la courbe, mais que ses connaissances antérieures lui donnent accès à la justification de cette formule. Nous avons ici à nouveau un exemple de comment l'élève à réussi d'extraire l'information des médias, se l'approprier, l'articuler avec ses connaissances antérieures et appliquer dans son travail.

How does one find the curve length of a function? The curve length of a function can be represented as an infinite series of straight lines that are made out of *x* and *y* vector components, therefore, the length of that line can be found using Pythagoras' Theorem. Now, let's define the function of the change in curve length as '*ds*' (so the curve length is *s*) and change of *x* and *y* components as '*dx*' and '*dy*' respectively, thus, according to the Pythagoras' Theorem the function looks like this,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Since a function in terms of *x* is required so it should be re-arranged in the following way,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

It is important to simplify the function in order to get its integral, thus, the following simplification have to be made,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Now, the function can be integrated to obtain the following formula,

$$\text{Curve lenght} = s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Fig. 14 : Formule de la longueur d'une courbe (extrait du dossier de l'élève)

Pour pouvoir calculer cette intégrale, l'élève doit déterminer deux choses : la dérivée du cosinus hyperbolique et l'intervalle d'intégration de la courbe. La dérivée vient des médias, notamment de la page Wolfram MathsWorld (mentionnée comme ressource dans la bibliographie) sur le sinus hyperbolique[11].

[11] http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicSine.html.

As it can be seen from the formula, the first derivative of the function has to be found. Since hyperbolic functions are not covered in the syllabus, additional research had to be done. The answer was found on Wolfram Web Resource[3], it was that

$$\frac{\partial}{\partial x} \cosh x = \sinh x$$

Fig. 15 : La dérivée du cosinus hyperbolique (extrait du dossier de l'élève)

Nous pouvons à nouveau observer une dialectique entre médias et milieux et constater que l'élève admet avec succès ces nouvelles informations dans son milieu et en manifeste une bonne compréhension. Il est capable d'appliquer la règle sur la dérivation des fonctions composées et trouver la dérivée dont il a besoin (Fig. 16)

However, in this case there is also a parameter a present, thus the derivative that is going to be used is the following,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-a \cosh \frac{x}{a}\right) = \sinh \frac{x}{a}$$

Fig. 16 : Application de la dérivée du cosinus hyperbolique (extrait du dossier de l'élève)

L'élève utilise ensuite la formule pour la longueur de courbe étudiée et admise dans son milieu et calcule l'intégrale (Fig. 17)

After obtaining the first derivative of the function, the formula for the arc length can be used, which is presented below,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + sinh^2\left(\frac{a}{x}\right)}\, dx$$

In this particular case, substitution would the most appropriate method of integrating, thus, the first step would be the substitution,

$$u = \frac{x}{a}, \text{therefore, du} = \frac{1}{\text{a}}dx$$

Since parameter a is a constant, it can be factored out, which makes the integral look like this:

$$a\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{sinh^2(u) + 1}\, du$$

The following hyperbolic identity, $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$, can be rearranged to $\sqrt{sinh^2(u) + 1} = \sqrt{cosh^2(u)}$, which can be substituted into the integrand, which means that the integral now takes this form,

$$= a\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{cosh^2(u)}\, du = a\int_{\alpha}^{\beta} \cosh(u)\ du$$

The integral of $\cosh(u)$ is $\sinh\,(u)$ so,

$$[a\ \times \sinh(u)]_{\alpha}^{\beta}$$

Which after substitution becomes the following,

$$= \left[a\ \times \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{\alpha}^{\beta}$$

Fig. 17 : Calcul de l'intégrale (extrait du dossier de l'élève)

Il reste enfin à déterminer les limites de l'intégrale pour calculer la longueur de la courbe entre deux points. En lisant cette partie du dossier (Fig. 18), on peut constater que l'élève est de plus en plus à l'aise avec la manipulation des fonctions hyperboliques et leurs réciproques.

Now, it is crucial to determine the bounds of the integral, which signify the points where the square begins and ends its roll. As it was previously discussed, the gradient of the tangent at those two points has to equal to −1 at beginning and 1 at the end. Since the bounds are going to change depending on the parameter a, it is, thus, important to define those points in terms of the parameter.

The first step would be finding the first derivative of the function, which is now known to be $\sinh\frac{x}{a}$. Then, it should be set to equal to either ± 1, as shown below,

$$\sinh\frac{x}{a} = \pm 1$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{arcsinh}(\pm 1)$$

$$x = a \times \operatorname{arcsinh}(\pm 1)$$

Fig. 18 : Calcul des limites de l'intégrale (extrait du dossier de l'élève)

Après avoir réussi à déterminer les limites de l'intégrale il suffit de substituer, simplifier et voilà, la conjecture est démontrée (Fig.19).

So these two values are the bounds for the following integral, the lower being $a \times arcsinh(-1)$ and upper being $a \times arcsinh(1)$. Now, they can just be put into the following integral as seen below,

$$l = \left[a \times \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{a \times \operatorname{arcsinh}(-1)}^{a \times \operatorname{arcsinh}(1)}$$

$$l = \left[a \times \sinh\left(\frac{a \times arcsinh(1)}{a}\right)\right] - \left[a \times \sinh\left(\frac{a \times arcsinh(-1)}{a}\right)\right]$$

$$l = [a \times \sinh(\operatorname{arcsinh}(1)] - [a \times \sinh(\operatorname{arcsinh}(-1)]$$

$$l = [a] - [-a]$$

$$l = 2a$$

Fig. 19 : Le calcul final (extrait du dossier de l'élève)

Certes, cette partie analytique demande une bonne maîtrise du calcul littéral et d'être à l'aise avec les manipulations algébriques. Cependant, connaître la bonne technique pour calculer cette intégrale n'aurait pas été suffisant pour résoudre ce problème. Et à la limite, la technique pourrait même être prise en charge par des systèmes de calcul formel[12].

12 https://fr.wikipedia.org/wiki/Syst%C3%A8me_de_calcul_formel.

Conclusion

Cet élève a réussi à produire une exploration de qualité et il est donc légitime de se demander ce qui se cache derrière cette réussite. Premièrement, pour un élève du collège il serait impossible de réaliser ce travail sans les médias et sans GeoGebra (ou un autre logiciel équivalent) que l'élève maîtrise. L'outil théorique de la dialectique médias-milieux utilisé pour analyser ce travail suggère que la qualité de l'exploration dépend de la qualité de cette dialectique. Il reste cependant important d'étudier davantage les conditions dans lesquelles cette dialectique se déroule et qui déterminent sa qualité. Il est néanmoins clair que la bonne qualité de la dialectique médias-milieux dans l'exploration qu'on vient d'analyser a joué un rôle primordial dans la réussite de celle-ci. Afin de mieux comprendre et décrire les conditions pour qu'une bonne dialectique puisse avoir lieu, il faudrait analyser davantage le type de médias auxquels les élèves ont accès, la manière dont ces informations sont traitées par les élèves et le rôle des connaissances antérieures dans le processus de rejet ou d'acceptation d'une information provenant des médias. En fin de compte, cette analyse montre que la situation de la « roue carrée » a le potentiel d'être exploitée au collège, non seulement comme prétexte pour faire faire des exercices classiques comme proposé par Ouailal *et al.* (2018), mais d'engager réellement les élèves dans une véritable activité mathématique. Pour cela, il ne faut pas avoir peur des médias et des logiciels, au contraire on peut les laisser prendre en charge certaines lacunes dans le savoir-faire analytique afin de favoriser la réflexion critique et donner du sens aux mathématiques. Un des leitmotivs du Baccalauréat International à sa création était : « apprendre à apprendre, telle est désormais la première fonction de l'école » (Office du Baccalauréat International, 1973, p. 24), parce que la masse de connaissances rendait l'enseignement encyclopédique inopérant. Laissons alors encore une dernière fois la parole à cet élève pour nous dire ce qu'il a appris en faisant ce travail :

> In this exploration, I was able to apply my knowledge of calculus to a problem that was very compelling for me and use a powerful program, such as GeoGebra, to successfully model a given situation. Furthermore, I was able to go beyond covered material by using a formula to find an arc length of the function as well to explore mysterious hyperbolic function, which were also not covered in class.

Fig. 20 : Ce que l'élève a appris (extrait du dossier de l'élève)

Références

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : La dialectique des média et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (Éds.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques*. IREM.

Dewey, J. (1938). *Logic : The theory of inquiry*. Henry Holt and company.

Maaß, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching : A synthesis. *ZDM*, *45*(6), 779-795. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0528-0

Office du Baccalauréat International. (1973). *Le Baccalauréat International*. OBI.

Ouailal, S., Boussaa, N., & Achtaich, N. (2018). Une situation-problème motivante autour de la fonction exponentielle. *Revue de mathématiques pour l'école*, *229*.

Para, V., & Otero, M. R. (2018). Study and Research path : Indicators of the development of the dialectics. *Pré-actes CITAD6*, 241-253. https://citad6.sciencesconf.org/data/pages/Pre_proceedings_citad_7.pdf

Schön, D. A. (1992). The Theory of Inquiry : Dewey's Legacy to Education. *Curriculum Inquiry*, *22*(2), 119-139. https://doi.org/10.2307/1180029