LEÇONS DE LA CLASSE DE MATHEMATIQUES – LES FRACTIONS EQUIVALENTES

Jérôme Proulx

Laboratoire Épistémologie et Activité Mathématique - Université du Québec à Montréal

En tant que didacticien des mathématiques, je suis amené par mes travaux de recherche à être en classe et à travailler avec des élèves autant du primaire, du secondaire que de l'université. Lors de ces visites et de ces travaux, les élèves m'offrent souvent ce que j'appelle des perles mathématiques, à travers divers raisonnements, erreurs, questions, stratégies et solutions. C'est à partir de ces productions mathématiques que je propose de tirer des réflexions, voire quelques leçons, autant mathématiques que didactiques, dans le but de comprendre ce que les élèves nous enseignent parfois par leurs activités mathématiques. Ce court article réflexif se situe dans la foulée des deux premiers publiés antérieurement dans la revue (voir Proulx, 2018, 2019).

Dans une conférence prononcée à Montréal en 1988, Guy Brousseau soulevait l'importance de l'oubli chez l'élève, qui permet en particulier aux enseignants des années suivantes de ré-enseigner certaines idées mathématiques de façon plus adaptée au niveau scolaire ou aux problèmes à résoudre. Tous les enseignants ont déjà vécu une situation similaire, où ils savent très bien que les élèves ont vu et travaillé certaines mathématiques l'année précédente, bien qu'ils paraissent souvent les avoir oubliées quelques mois plus tard … et qu'ils semblent devoir (tout) refaire !

Cette situation caricaturale – une sorte de jour de la marmotte didactique ! – s'est produite récemment alors que je travaillais dans une classe de mathématiques de secondaire 1 (12-13 ans). En particulier, dans cette classe, certains élèves avaient travaillé avec moi l'année précédente, à raison d'une fois aux deux semaines, alors qu'ils étaient en 6e année du primaire (11-12 ans). Lors de l'année passée en classe de 6e année, les enseignantes m'avaient demandé de travailler diverses tâches de fractions avec leurs élèves, un sujet difficile pour eux. Lors de ce travail sur les fractions, les élèves m'ont amené, à travers leurs solutions et idées, sur le terrain des fractions équivalentes, telles que 3/10 est équivalent à 6/20 qui est aussi équivalent à 9/30 et ainsi de suite (et parfois même à 1,5/5), ou encore ½ = 50/100 = 5/10 = 3/6 (et parfois même à 3,5/7).

Ces élèves avaient plusieurs façons d'établir ces équivalences. Par exemple, ils les représentaient par des dessins de pizzas ou de palettes de chocolat, en les découpant en morceaux et parties. Les Fig. 1 et Fig. 2, tirées de leurs travaux, témoignent de leurs façons imagées d'établir des équivalences, ici entre 2/10 et 1/5 et entre 3/10 et 6/20 :

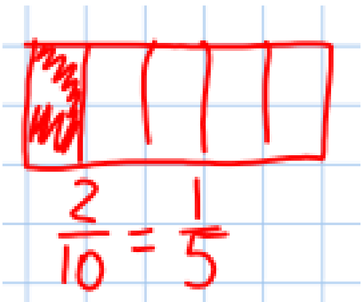

Fig. 1 : Production 1

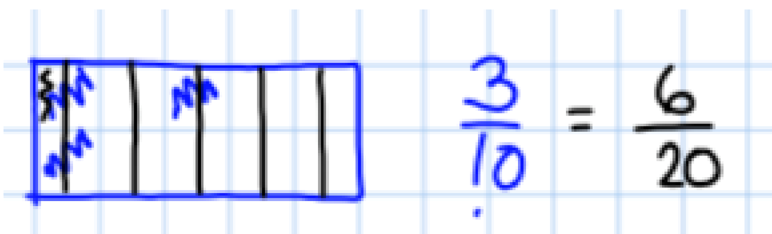

Fig. 2 : Production 2

Ce travail sur les fractions équivalentes faisait intervenir le type de raisonnement suivant sur les parties et le (re-)découpage de celles-ci : pour prendre la même quantité, puisque les morceaux sont deux fois plus petits, il faut en prendre deux fois plus ; s'ils sont trois fois plus gros, il faut en prendre trois fois moins, etc. Les raisonnements s'opéraient alors sur les représentations dessinées, pour comprendre ce qu'il se passe au niveau du symbolisme avec l'écriture fractionnaire (3/10, 1/5, …). Rien de bien surprenant dans ce type de travail, assez habituel à l'école primaire. Est-ce que tous les élèves réussissaient à raisonner de la sorte et à comprendre les liens entre l'écriture, la fraction, les parties, etc. ? Bien sûr que non, mais un travail en ce sens était exigé de tous, qui s'essayaient tant bien que mal, traçaient et découpaient des rectangles et des cercles, recoupaient et combinaient des parties, etc. Ils travaillaient fort !

L'année suivante, toutefois, je travaillais dans une toute autre école en secondaire 1. Et, quelle ne fut pas ma surprise de revoir dans ces nouvelles classes de Secondaire 1 quelques-uns des élèves de la classe de 6e année primaire de l'année précédente. Encore une fois, l'enseignant avec qui je travaillais m'a proposé de faire des fractions avec eux, dans le but de les représenter, les additionner, les comparer, etc. Dès le début de notre travail, les élèves ont rapidement ramené sur le plancher, ou plutôt sur le tableau, l'univers des fractions équivalentes !

Toutefois, il y avait une différence de taille. En effet, dès les premières incursions sur ces questions de fractions équivalentes, j'ai eu la bizarre impression de travailler sur un tout autre concept que l'année précédente, de travailler avec une autre sorte de « bête » mathématique. Cette fois-ci, quelques mois plus tard, les fractions équivalentes étaient devenues de nature entièrement numérique. Les équivalences se réalisaient à coup de multiplications. Les élèves affirmaient « tu fais fois 3, fois 3 » ou encore « tu multiplies en haut et en bas par le même nombre » pour produire leurs fractions équivalentes et aussi justifier leurs équivalences : ½ devient 3/6 en multipliant par trois en haut et en bas, 1/3 devient 2/6 en multipliant par deux en haut et en bas, 6/9 devient 2/3 en divisant par trois et par trois, etc. Le discours me semblait fortement transformé, beaucoup plus de l'ordre d'une technique opératoire que d'un raisonnement sur le tout et ses parties. Et le tableau, lui, se trouvait rempli de ces calculs (Fig. 3).

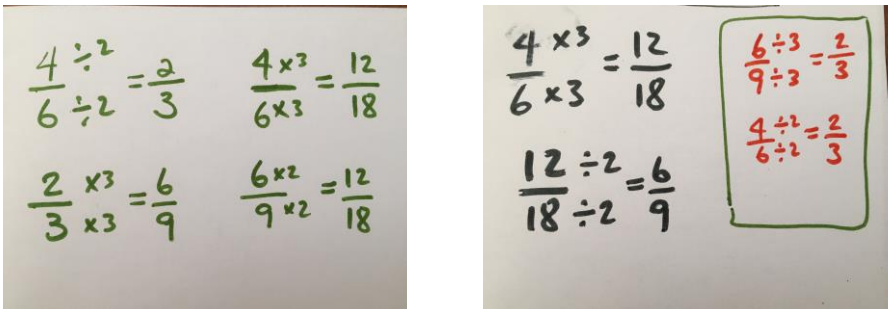

Fig. 3 : Tableau de la classe

Cette technique de multiplication est habituelle au secondaire. Par contre, ce qui (m')impressionnait dans tout ceci était que la trentaine d'élèves de la classe – et je suis même porté à affirmer « tous » les élèves de la classe – ne se trompaient pas! À tout moment, dès qu'ils en avaient besoin, les élèves produisaient des fractions équivalentes avec cette technique : sur leurs feuilles, au tableau ou encore à l'oral. Aucun élève n'a multiplié « en haut » par deux et « en bas » par trois, par exemple, car ils semblaient tous comprendre que ceci ne leur permettrait pas d'obtenir une fraction équivalente : il faut « faire pareil » au numérateur et au dénominateur, me disaient-ils.

Une autre surprise m'attendait. Alors que certains à un moment affirmaient que 1/6 était équivalent à 2/12 et à 3/18, je leur ai demandé s'ils pouvaient me montrer par un dessin ou autre, c'est-à-dire par autre chose que des calculs arithmétiques, pourquoi ces fractions étaient équivalentes. Et là, à ce moment, chacun face à sa feuille de travail, une majorité d'élèves ont bloqué, incapables de produire autre chose que des opérations arithmétiques pour justifier lesdites équivalences. Ces blocages perduraient durant la période de travail allouée, même si leur enseignant et différents adultes observateurs présents en classe essayaient d'aider certains élèves individuellement avec des interventions du type : « essaie avec un rectangle »,

« dessine-toi des cercles, des pizzas », « peux-tu représenter 1/6 par un dessin ? ». Avec ces aides et déclencheurs des adultes, un certain nombre d'élèves a évidemment réussi à faire quelques représentations imagées et nous en avons discuté au tableau à l'avant de la classe. Mais, plusieurs élèves sont demeurés bloqués ou encore remplissaient leur feuille, malgré la consigne, de nombres et de multiplications pour établir les équivalences ; et levaient la main pour nous montrer qu'ils y étaient arrivés ! Au final, bien que les élèves eussent réussi très bien (peut-être même trop bien !) à générer et expliquer les équivalences par leurs multiplications, ils n'arrivaient pas à justifier autrement que par cette technique le pourquoi de l'équivalence. La technique elle-même agissait ici comme justificatif.

Que tirer de tout ceci ?

Cette situation m'a beaucoup intrigué, surtout que je connaissais bon nombre des élèves bloqués, ayant travaillé avec eux sur ces mêmes idées quelques mois auparavant au primaire. Une première réalisation est que lorsque ces élèves, maintenant au secondaire, utilisent la technique de multiplier ou de diviser « en haut et en bas » par le même nombre, ils réussissent à produire des fractions équivalentes : ils ne se trompent pas (ou sinon très rarement). Cette situation, sans contredit, renforce chez eux l'intérêt et la force de cette technique : elle leur permet d'obtenir des réponses exactes qui seront affirmées bonnes par l'enseignant, par les autres élèves, voire par leur note d'examen. Tout ceci n'est pas à négliger pour l'élève. La réussite de la technique renforce son utilisation.

Il est tentant ici de dire « oui, mais c'est inacceptable, car ils ne comprennent pas ce qu'ils font ! ». C'est probablement vrai pour plusieurs d'entre eux. C'est même ce que leur enseignant a déploré lorsque nous en avons discuté ensemble suite à la séance. Par contre, ceci explique peu la situation et ce qu'il s'est produit.

En effet, lorsque le travail fait avec les élèves sur les deux années (6e primaire et Secondaire 1) est comparé, un aspect devient saillant. Ces élèves travaillaient très fort en 6e année pour générer et donner un sens mathématique aux fractions équivalentes. C'est par contre souvent suite à un lourd et complexe labeur, où ils coupaient, recoupaient, combinaient, comparaient des parties souvent différentes (et souvent avec des dessins approximatifs), invalidaient ou confirmaient, etc., qu'ils arrivaient à établir ces équivalences. En d'autres mots, bien que le travail sur les représentations imagées et les explications/verbalisations en termes de parts (petites, doublées, équivalentes, etc.) était axé sur certaines justifications mathématiques, ce n'était évidemment pas simple pour tous les élèves de raisonner ainsi. Bien sûr à ce moment-là, les élèves travaillaient à donner un sens et réfléchissaient au niveau conceptuel sur les fractions équivalentes. Et, bien sûr, tout ce travail était riche mathématiquement et les raisonnements et représentations déployés fort intéressants. Mais, en même temps, tout ce travail était « chargé » pour ces élèves et il ne se traduisait pas nécessairement ou automatiquement en compréhensions et réussites. À l'opposé, maintenant en Secondaire 1, et ayant accès à une technique simple et efficace, ces mêmes élèves réalisent très rapidement qu'ils sont capables de produire des fractions équivalentes ; et peut-être sans trimer aussi dur à travers un exercice laborieux qui ne leur garantit pas toujours de bons résultats.

Plusieurs diront qu'ils préfèrent que les élèves donnent du sens et raisonnent, même s'ils se trompent au final. Ceci se comprend et c'est ce que leur enseignant me disait. Affirmer ceci c'est en même temps oublier l'impact du sentiment d'efficacité chez les élèves que cette technique procure. Ces élèves peuvent maintenant bien réussir ce qui leur est demandé et rapidement, voire presqu'à tout coup, en utilisant justement cette technique. Et il est important de se rappeler qu'il est ici question de fractions, une bête noire en mathématiques pour plusieurs ! Difficile dans ce contexte pour d'autres outils et façons de faire, tels les raisonnements oraux sur les parties ou les représentations dessinées, de faire le poids...

Il y a là en effet une très belle tension, qui fait osciller entre la réussite à trouver des fractions équivalentes versus la tentative de donner du sens mathématique à ces fractions (d'autres ont déjà écrit autour d'idées similaires, dont Charles-Pézard, Butlen & Masselot, 2012). Il semble assez complexe de naviguer entre « donner du sens » et « réussir » à l'intérieur d'une dynamique scolaire où il est demandé aux élèves de produire des solutions rapidement et efficacement, sans erreurs, à un certain moment de leur parcours scolaire. De là, la tension…déchirante. Cette situation fait ressortir toute la complexité et la richesse de l'enseignement des mathématiques, ce qui rappelle l'affirmation forte de Anna Zofia Krygowska sur les retombées de la richesse de la réflexion didactique pour l'enseignement des mathématiques :

> […] je savais très bien enseigner les fractions avant d'avoir fait mes études […] maintenant je ne sais pas du tout comment je dois faire cet enseignement et c'est là le résultat de la didactique des mathématiques. Je ne sais pas en ce sens que je suis obligé de choisir, parmi les différentes solutions possibles, celle qui est la plus adaptée à ma classe; maintenant que je connais ces possibilités, je me sensé obligé de changer mes conceptions au cours de l'interaction enseignant-élève, j'ai des doutes, je vois les difficultés des élèves auxquelles je n'avais pas pensé auparavant. C'est l'embarras des richesses qui est maintenant la raison de mes inquiétudes, de mes doutes. (Krygowska, 1973 ; citée dans Bednarz, 2000, p. 77)

Déjà d'être sensibilisé à cette situation aide à mieux comprendre certaines réactions des élèves et façons d'agir en mathématiques : entre vivre des difficultés et vivre des réussites sur le coup, le choix n'est pas toujours difficile. Et c'est d'une certaine façon à ce choix déchirant que les élèves m'ont confronté, alors que je leur demandais de donner un sens à ces fractions équivalentes et de les justifier par autre chose qu'un calcul multiplicatif.

Il y a quelque chose qui possiblement s'est transformé durant ce passage entre le primaire et le secondaire, pour ces élèves. Ou, encore, il y a quelque chose de nouveau qui leur est devenu accessible l'année suivante, dès le Secondaire 1, avec cette technique efficace. En ce sens, cette situation appelle à quelque chose de plus profond qu'un simple oubli mathématique d'une année à l'autre. Elle appelle à une réflexion importante relative à la tension entre la réussite et la compréhension mathématique, un enjeu de taille dans l'enseignement des mathématiques. Et c'est à cette situation, quelque peu sans solution tranchée, que ces mêmes élèves – ces anciens élèves du primaire avec qui je travaillais maintenant au secondaire – m'ont sensibilisé.

Et ça, c'est toute une leçon !

Note

Une explication complémentaire m'est venue de l'enseignant de Secondaire 1. Il m'a expliqué que pour certains élèves les dessins sont associés à l'école primaire et donc représentent des façons de faire de « bébés ». Maintenant rendus au secondaire, ces élèves n'ont plus ou ne veulent plus utiliser ces façons de faire. Ils veulent et il leur est demandé de faire des mathématiques de « grands » avec des outils de « grands » ; et le dessin n'est pas un de ces outils pour eux, donc il n'a pas sa place. Ce phénomène de « pression sociale » a déjà été documenté, par Gray et Tall (1994) par exemple, au sujet de techniques de comptage avec les doigts où certains élèves refusent de les utiliser parce qu'ils se considèrent trop vieux pour ces méthodes dites enfantines, bien qu'ils n'aient pas de façons alternatives d'y arriver ou se trompent (Baruk, 1985, aborde aussi cet exemple avec aplomb). En transitant du primaire au secondaire, ou encore entre les années scolaires, les élèves laissent certaines choses derrière eux. Dans le cas de ces élèves de Secondaire 1, les dessins et autres représentations (et peut-être même le matériel didactique) semblent pour certains faire partie de ces choses oubliées…

RÉFÉRENCES

Baruk, S. (1985). *L'âge du capitaine : de l'erreur en mathématiques*. Seuil : France.

Bednarz, N. (2000). Formation continue des enseignants en mathématiques: Une nécessaire prise en compte du contexte. In P. Blouin & L. Gattuso (Eds.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (pp. 63-78). Montréal, Canada: Éditions Modulo.

Brousseau, G. (1988, janvier). *Fragilité de la connaissance et fragilité du savoir*. Conférence donnée au CIRADE [VHS/couleur/2 cassettes]. Montréal, Canada: UQÀM/CIRADE.

Charles-Pézard, M., Butlen, D., & Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques? Quelle formation?* Grenoble, France: La pensée sauvage.

Gray, E.M., & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 116-140.

Krygowska, A.Z. (1973). Le rôle de la didactique de la mathématique dans les études du futur enseignant. Conférence donnée au Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal.

Proulx, J. (2018). Leçons de la classe de mathématiques – le symbolisme. *Revue de mathématiques pour l'école (RMé)*, *230*, 4-6.

Proulx, J. (2019). Leçons de la classe de mathématiques – les tables de multiplications. *Revue de mathématiques pour l'école (RMé)*, *232*, 31-33.