A LA RECHERCHE D'UNE DIDACTIQUE MATHEMATIQUE EN ALGEBRE ADAPTEE - ÉTUDE COMPARATIVE DES MANUELS DE MATHS DE SUISSE ROMANDE ET D'IRAN AU NIVEAU 11H

Sayeh Hosseinian

Enseignante secondaire I en mathématiques

Ayant effectué une majeure partie de ma scolarité en Iran, où s'est éveillée ma passion pour les mathématiques, et enseignant depuis plusieurs années en Suisse, je me suis questionnée sur l'enseignement de l'algèbre entre ces deux institutions. Cet article présente ma rechercher sur l'analyse des manuels concernant les exercices d'algèbre de cycle 3 des écoles de Suisse romande en comparaison à celles d'Iran et analyse l'influence de cette construction sur l'apprentissage des élèves.

INTRODUCTION

Cet article provient de mon travail de mémoire soutenu en juin 2020 dans le cadre de mon master pédagogique secondaire 1 en mathématiques à la HEPVS. Je me suis astreinte à étudier et à comprendre les différences dans la manière d'enseigner en comparant les manuels officiels d'Iran et de Suisse romande de cycle 3. L'objectif était d'identifier, à l'aide de l'analyse praxéologique de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1985), les possibles spécificités des manuels des deux institutions et l'éventuel impact des manuels sur la construction des connaissances des élèves en mathématiques.

Cet intérêt provient de mon expérience d'enseignante en Suisse lors de laquelle j'ai été étonnée de la difficulté si importante des élèves face à l'algèbre dont je n'avais pas souvenir en Iran (ni dans mon statut d'étudiante ni en qualité d'enseignante). Cette curiosité, mêlée à ma passion pour l'algèbre, m'ont guidée à rechercher la manière dont sont construits les exercices d'algèbre au niveau 11H des écoles en Suisse romande en comparaison à celles d'Iran (équivalent de 9H)[1] et dans quelle mesure les différences et les limites entre les manuels – qui constituent les vecteurs institutionnels principaux du savoir à enseigner (Sirejacob, 2016, p.28) – pourraient avoir une influence sur l'apprentissage que les élèves font usuellement entre 12 et 15 ans.

A partir de la littérature, nous avons formulé les hypothèses suivantes :

(H1) Les manuels ne font pas travailler des équations pertinentes d'un point de vue didactique.

(H2) Les manuels iraniens introduisent plus tôt la résolution d'équation que les manuels suisses.

(H3) La différence de temporalité a une influence sur l'univers cognitif des apprenants.

Dans un premier temps, le cadre conceptuel pour l'analyse des manuels sera présenté, puis nous évoquerons la méthodologie employée en vue de corroborer ou réfuter nos hypothèses. Par la suite, le corpus d'analyse relatif aux tableaux d'observation des manuels sera introduit afin de procéder à leur analyse, nous permettant *ipso facto* une analyse comparative. Les limites de la portée de cette recherche seront considérées avant finalement de conclure sur les apports de cette dernière.

---

[1] Nous avons sélectionné les types de tâches du manuel de 11H suisse romand et ceux des manuels iraniens de 9H et 10H afin de les comparer par la praxéologie de TAD. En effet, dans le manuel iranien de 11H, les exercices de type « résolution d'équations » n'existent pas.

Concepts théoriques de l'étude

En préambule, considérons brièvement l'itinéraire de l'enseignement du calcul littéral à l'école secondaire. Autant en Suisse romande, en référence au plan d'étude romand (PER), qu'en Iran, le calcul littéral est introduit dans les manuels de 9H et se poursuit jusqu'en 11H. En 9H, les objectifs à atteindre ainsi que leur enseignement varient en fonction des niveaux propres à chaque canton. A noter que les chapitres considérés du manuel suisse romand sont sous forme d'exercices sans aucun contexte de modélisation (Ruiz-Munzón et al., 2020) contrairement au manuel iranien présentant à la fois des exercices et une démonstration du processus d'algébrisation. En revanche, dans les deux pays, le chapitre de l'algèbre est précédé par les opérations de base et le calcul arithmétique.

Épistémologie des équations

L'étude de Sirejacob (2016), à travers une analyse des programmes de 2008 et de manuels scolaires français, met en exergue de nombreuses problématiques actuelles liées à l'enseignement de l'algèbre. Selon l'auteur, le système d'enseignement ne met pas en place une organisation didactique explicite afin de prendre en charge les besoins d'apprentissage des élèves ; « un symbolisme incompris, des règles appliquées à l'aveugle, souvent fausses ou déformées, peu de sens donné à la lettre, et une incapacité à contrôler des transformations algébriques. » (Sirejacob, 2016, p.27). Dans cet article, cet auteur avertit sur le danger de l'enseignement sachant qu'il s'appuie sur des manuels qui « (…) ne se prononcent pas, viennent occulter cette identification des besoins » (Sirejacob, 2016, p.28). En ramenant cela à notre étude, il s'avère que les manuels considérés se lancent directement dans la résolution d'équations sans une définition formelle d'une équation comme si celle-ci était « supposée bien connue des étudiants – ou alors, jugée inaccessible. » (Sirejacob, 2016, p.28). Dans l'ouvrage *Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner : les équations au collège* (Sirejacob, 2016), l'équation est définie sur un certain ensemble, généralement les nombres réels pour l'enseignement au secondaire. La résoudre signifie la recherche de « tous les éléments appartenant à cet ensemble de définition vérifiant l'égalité considérée » (Sirejacob, 2016, p.28).

Les difficultés face à la résolution des équations peuvent alors s'expliquer selon certains auteurs par le fait que les exercices des manuels invitent les élèves à résoudre arithmétiquement l'équation (par essais et erreurs en mentionnant par exemple « résous ces équations mentalement ») sans créer le besoin d'utiliser des procédures et du vocabulaire algébriques. Toutefois, Coppé (2009) mentionne une double rupture épistémologique entre arithmétique et algèbre qui se caractérise par une opposition des caractéristiques de la résolution et une opposition des modes d'appréhension des écritures algébrique et numérique. Ainsi, alors que la démarche de résolution arithmétique consiste à rechercher puis calculer les inconnues dans un ordre convenable par des stratégies en rapport au contexte, la démarche de résolution algébrique consiste à représenter formellement le problème (relations entre les inconnues et les données) puis à utiliser des procédures de traitement formel pour trouver la solution.

Dans cette veine, Ruiz-Munzón (2020), en faveur d'une reconstruction des manuels mathématiques « en situant l'algèbre en articulation avec les autres domaines des mathématiques enseignées » (p.142) encourage l'introduction de l'algèbre élémentaire dès l'enseignement à l'école primaire afin « (…) de dépasser le phénomène de l'algébrisation abrupte des mathématiques scolaires et les difficultés que celui-ci pose à un grand nombre d'élèves dans un moment clé de leur cursus scolaire. » (Ruiz-Munzón, 2020, p.141).

C'est pourquoi il est selon nous pertinent d'étudier la répartition des tâches dans les manuels en considérant notamment la proportion de résolution arithmétique et algébrique.

Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques

Dans le cadre de cette étude, nous avons mobilisé la théorie de l'Approche anthropologique du rapport au savoir en didactique des mathématiques enrichi par le mathématicien Yves Chevallard. Ce dernier a non seulement théorisé des techniques d'enseignement en mathématiques riches, mais il a également mis en évidence la complexité des individus qui deviennent des *personnes* et la difficulté qu'elles provoquent sur le système d'enseignement, à travers plusieurs notions fondamentales (Chevallard, 1985) :

- L'objet (o) correspond à toute entité matérielle ou immatérielle qui existe pour au moins un individu ;
- Le rapport personnel d'un individu à un objet (R (x, o)) ;
- Un individu et ses systèmes de rapports personnels ;
- L'institution (I) en tant que dispositif social.

De cette thèse, il ressort qu'en vue de faire apprendre quelque chose à quelqu'un, il faut entrer dans son univers cognitif qui est un ensemble non-vide d'objets et de rapports personnels avec ces objets ; « on appelle alors univers cognitif de x l'ensemble $U(x)=\{(o,R(x,o))/R(x,o)\neq\emptyset\}$ » (Chevallard, 1985, p.1). Tous les objets font partie de cet ensemble, par exemple ma brosse à dents, de la même manière que la notion d'équation du second degré ou celle de père (Chevallard, 1985) et donc le rapport de la personne avec ces objets constitue son univers cognitif qui peut changer.

Transposant cette idée à notre étude, on peut imaginer l'élève comme une personne avec ses rapports personnels (non vides) différents et le concept d'équation ou de calcul littéral ; on peut considérer la relation du concept d'équation (o) avec l'élève (x), et le manuel comme position (I). Par conséquent, l'élève appréhende l'objet (o) à travers ses types de rapports rassemblés dans son univers cognitif (non vide). Ainsi, dans le cas où l'élève est confronté en classe pour la première fois à la représentation d'un nombre par la lettre « a » ou « x » - première rencontre -, il est possible qu'il clame l'existence inutile de cette lettre dans les mathématiques, bien que cela dépende de comment sont introduites les expressions algébriques par l'enseignant. Ce moment historique est exactement le moment pour créer la relation avec cet objet, lors duquel intentionnellement l'univers cognitif de l'élève est en train de changer et d'évoluer. Par l'analyse des manuels, nous allons déterminer à partir de quel moment le rapport entre l'élève et le calcul littéral a été créé via les manuels, tout en faisant des hypothèses sur son impact dans l'apprentissage de cette thématique par les élèves. Nous étudierons aussi l'évolution de ce rapport à travers les tâches rencontrées, ce qui nous amène au concept de praxéologie de la TAD comme outil pour caractériser ce rapport. Comme nous le remarquons dans la figure 1, inspirée de l'idée originale de Chevallard (Wozniak et al., s.d.), la deuxième rencontre avec le thème du calcul littéral ne compterait même pas comme une rencontre pour l'élève ; ce dernier serait un simple spectateur sans devenir acteur de l'œuvre, contrairement à l'enseignant pour qui la matière serait déjà assimilée et qui attendrait que l'élève fasse l'exercice directement.

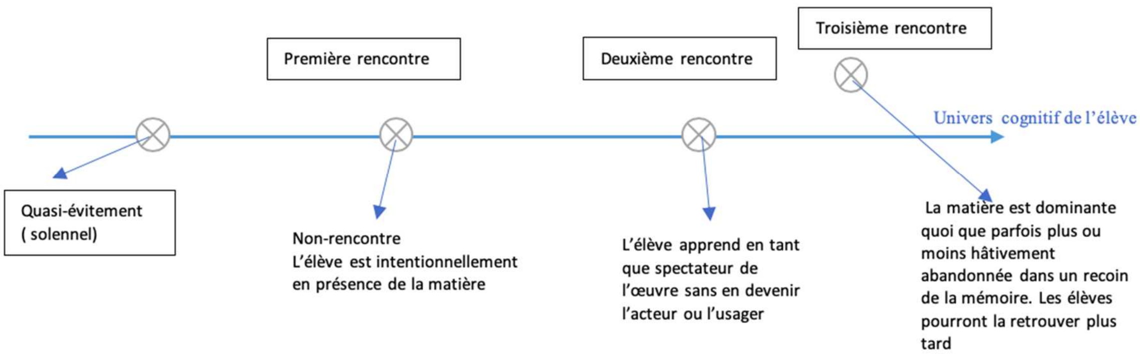

Fig. 1 : Évolution du rapport en l'élève et l'objet

MÉTHODOLOGIE ET CORPUS D'ANALYSE

Afin de corroborer ou de réfuter nos hypothèses, nous avons classé par type de tâches tous les exercices de résolution d'équations du premier degré à une inconnue du manuel suisse romand de mathématiques de 11H et les manuels iraniens de 9H et 10H, puisqu'équivalants aux types de tâches des manuels suisses romands de 11H. Ces exercices ont alors été classés selon leur organisation praxéologique en utilisant le modèle d'analyse de la TAD (concept praxéologique en annexe 3) et répertoriés dans un tableau d'observation (annexe 2) – un pour la Suisse romande et un pour l'Iran – permettant *de facto* leur comparaison.

Dans le cadre de notre méthodologie, nous considérons l'organisation praxéologique sous la forme suivante : O = [T/τ / θ/ Θ] où

T est un type de tâche : ici {résoudre une équation du premier degré à une inconnue }

τ est une technique (une manière de faire)

θ est la technologie qui justifie la technique

Θ est cette théorie qui fait exister la technologie (ici la théorie de l'algèbre)

Nous rédigeons nos analyses des exercices considérés dans les manuels des deux pays avec [T/τ / θ/Θ] en postulant sept différentes praxéologies (annexe 1). Dans le cadre de cet article, nous présentons les quatre praxéologies les plus significatives.

1) [$\boldsymbol{T}0$/ $\boldsymbol{\tau}0$/ $\boldsymbol{\theta}0$/ $\boldsymbol{\Theta}$] où

T_0 : résoudre une équation du premier (ou deuxième) degré à une inconnue

τ_0 : tâtonnement (essais successifs, erreurs) en remplaçant par une valeur particulière

θ_0 : la technologie est la définition de l'égalité

Θ la théorie de l'arithmétique ex : $3 + x = 15$ ex : $x^2 + 1 = 0$

2) [$\boldsymbol{T}1$/ $\boldsymbol{\tau}1$/ $\boldsymbol{\theta}1$/ $\boldsymbol{\Theta}$] où

T_1 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue de la forme de **ax = b** où le coefficient **a** est non nul

τ_1 : diviser de chaque côté de l'égalité par le coefficient **a**

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul les deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'arithmétique ex : $4x = 32$

3) [$\boldsymbol{T}2$/ $\boldsymbol{\tau}2$/ $\boldsymbol{\theta}1,2$/ $\boldsymbol{\Theta}$] où

T_2 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue de la forme **ax + b = c** où a et b sont non nuls

τ_2 : ajouter **-b** de chaque côté de l'égalité

τ_1 Si $(c - b) \neq 0$, alors technique de τ_1

0 Si $(c - b) = 0$, alors $x = 0$ est la seule solution

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul les deux membres de cette équation

θ_2 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on ajoute ou soustrait un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation

Θ la théorie de l'arithmétique ex : $4x - 7 = 3$

4) [$\boldsymbol{T}3$/ $\boldsymbol{\tau}3$/ $\boldsymbol{\theta}1,2$/ $\boldsymbol{\Theta}$] où

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue de la forme de **ax +b = cx + d** où a, b, c sont non nuls

τ_3 : Ajouter **-b** puis **-cx** puis diviser de chaque côté de l'égalité par (a - c)

τ_1 Si $(a - c) \neq 0$, et si $(d - b) \neq 0$ on se ramène à τ_1

ex : 3x+2=5x+3

∅ Si (a - c) = 0, et si (d – b) ≠ 0 alors il n'y a pas de solution

ex : 3x+2=3x+3

0 Si (a - c) ≠ 0 et si (d – b) = 0 alors x = 0 est la seule solution

ex : 3x+2=5x+2

∞ Si (a - c) = 0, et si (d – b) = 0 alors l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de x, il y a une infinité de solutions

ex : 3x+2=3x+2

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul les deux membres de cette équation et/ou

θ_2 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on ajoute ou soustrait un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'algèbre

A titre d'exemple, considérons l'exercice FA 256 a) 12x = 60 du manuel suisse romand. Nous l'avons classifié dans la configuration T_0 par tâtonnement dans le tableau d'observation car il présente la consigne suivante : « résous ces équations mentalement ». Bien que l'exercice en question se rapporte à l'organisation praxéologique $[\boldsymbol{T0}\ /\boldsymbol{\tau 0}/\ \boldsymbol{\theta 0}\ /\boldsymbol{\Theta}]$, il peut également être considéré comme $[\boldsymbol{T1}\ /\boldsymbol{\tau 1}/\ \boldsymbol{\theta 1}\ /\boldsymbol{\Theta}]$ puisqu'étant sous forme **ax = b.** Certains élèves peuvent résoudre l'équation en appliquant la technique $\boldsymbol{\tau 1}$, c'est-à-dire diviser de chaque côté de l'égalité par le coefficient **a** (ici, **60 divisé par 12)** pour résoudre l'équation. C'est pourquoi, dans le tableau d'observation, cet exercice s'inscrit dans deux configurations. Chaque exercice des deux manuels a été analysé selon ce processus, nous permettant par la suite de comparer les résultats représentés dans le tableau en annexe 2.

ANALYSE COMPARATIVE

Au regard des graphiques en Fig. 2 et 3 – générés à partir des tableaux d'observation (annexe 2), nous remarquons dans les deux contextes une forte propension des types de tâches T_0, T_1, T_2 (69% pour le manuel romand contre 77% pour les manuels iraniens). A noter que l'environnement technologico-théorique (Ruiz-Munzón, 2020) de ces exercices, majoritaires dans les manuels, est celui de l'arithmétique et non celui de l'algèbre. Par conséquent, l'absence d'exercices demandant une résolution algébrique (sous forme de T3, T4, T5) à ce niveau de scolarité va à l'encontre de ce que les chercheurs de différents pays, tels que Ruiz-Munzón (2020) et Sirejacob (2016), préconisent.

Par ailleurs, dans les deux cas, la partie la plus conséquente concerne le type de tâche T_0 et donc la technique du tâtonnement (47% pour l'Iran et 42% pour la Suisse romande), bien que ce ne soit pas toujours explicitement mentionné dans les consignes. En effet, dans certains exercices il est demandé de procéder « mentalement » qui peut laisser sous-entendre par tâtonnement (ex : Fa256 « résous ces équations mentalement ») alors que dans d'autres, l'énoncé ne mentionne pas le mot tâtonnement ou mentalement (ex : Fa254 « résous ces équations ») bien que l'élève puisse toutefois choisir cette technique (comme nous l'avons expliqué dans la méthodologie).

Une autre ressemblance concerne la sous-représentation du type de tâches T_5 et T_6 (qui correspondent aux techniques de résolution des équations du deuxième degré). Cela peut être expliqué par le fait que les élèves ne sont pas encore formés à cette technique qui sera vue ultérieurement – il s'agit donc d'une première rencontre pour l'élève avec les équations du deuxième degré pour lesquelles il peut procéder par tâtonnement/mentalement. Toutefois, sachant que les manuels iraniens considérés sont l'équivalent de la 9H, cela pourrait signifier qu'au niveau de la construction du savoir, les manuels iraniens insistent plus tôt sur les équations du degré 2.

Une autre différence concerne l'absence du type de tâche T_1 dans les manuels iraniens bien que dans le processus de résolution d'équations dans d'autres types de tâches, les élèves soient amenés à l'utiliser.

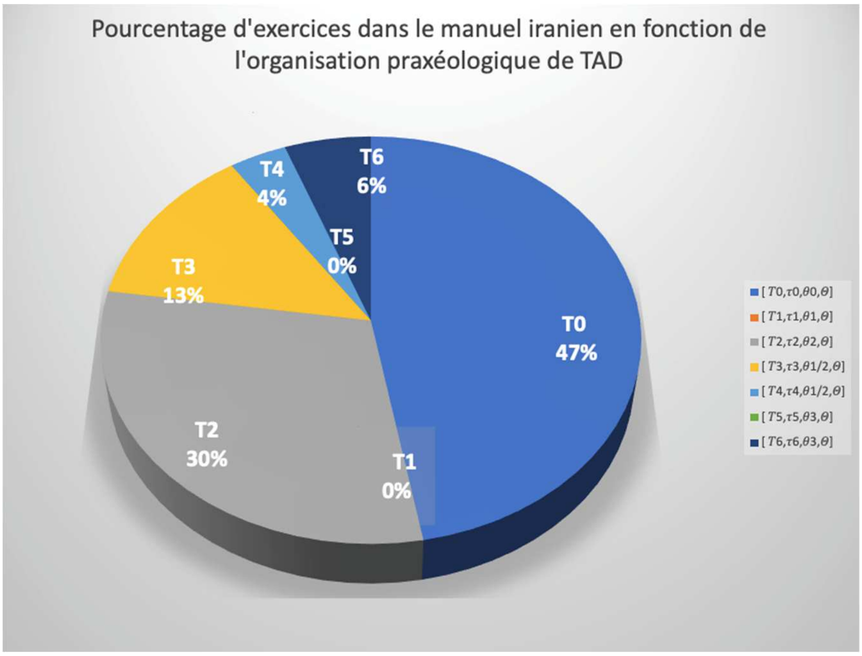

Fig. 2 : Pourcentage d'exercices dans le manuel iranien en fonction de l'organisation praxéologique de la TAD

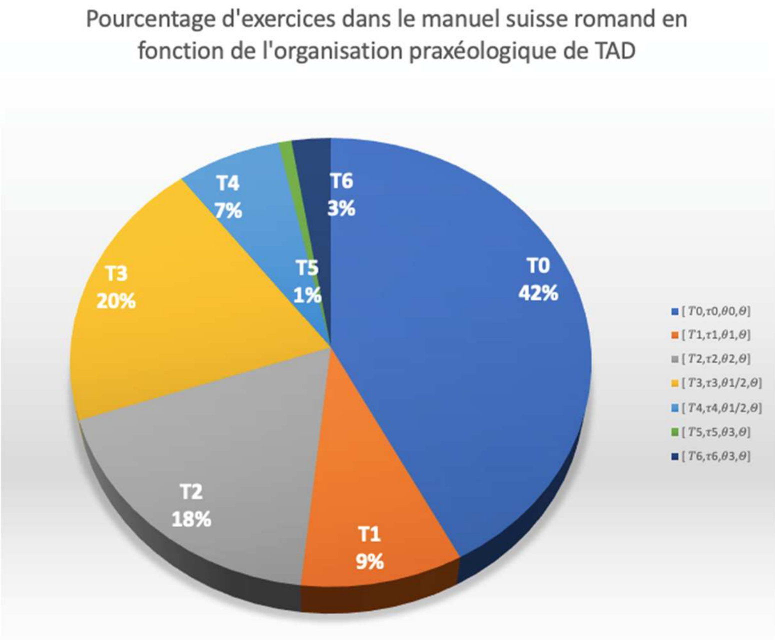

Fig. 3 : Pourcentage d'exercices dans le manuel suisse romand en fonction de l'organisation praxéologique de la TAD

En outre, il est intéressant de constater, à la vue des graphiques des fig. 4 et 5, les différences en termes de décalage. Alors que du côté du manuel suisse romand, les décalages sont constants entre le type de tâche et l'organisation praxéologique témoignant d'une mobilisation variée des techniques d'un exercice à l'autre, du côté des manuel iraniens, le net décalage concerne plus fortement le type de tâche T_0 alors que les autres colonnes conservent une certaine harmonie.

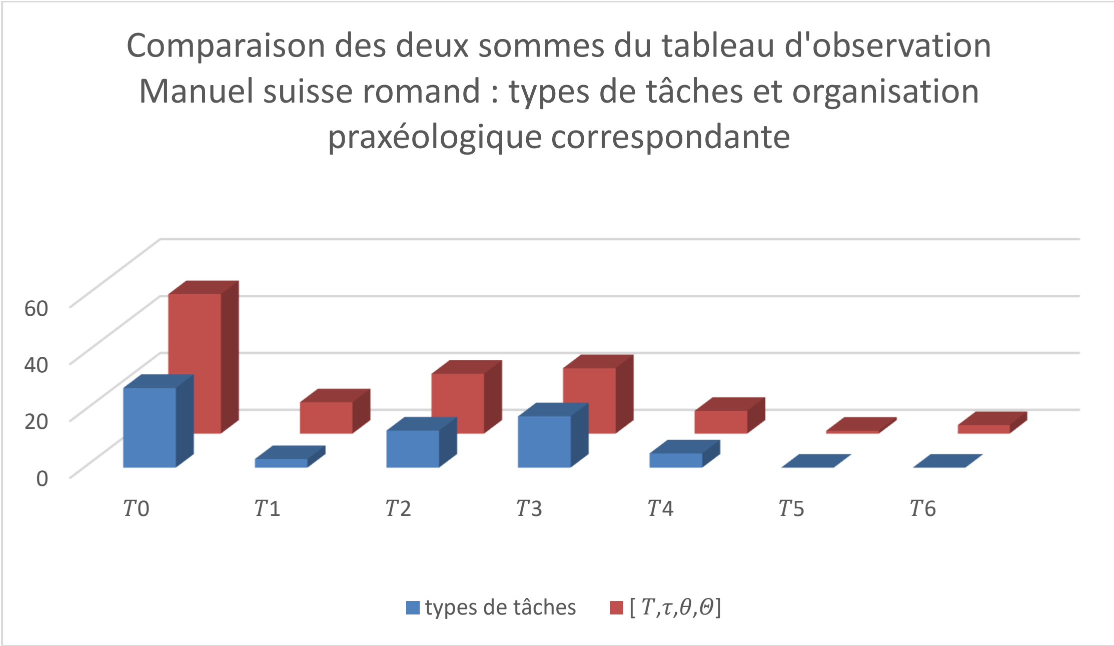

Fig. 4 : Comparaison des deux sommes du tableau d'observation Manuel suisse romand : types de tâches et organisation praxéologique correspondante

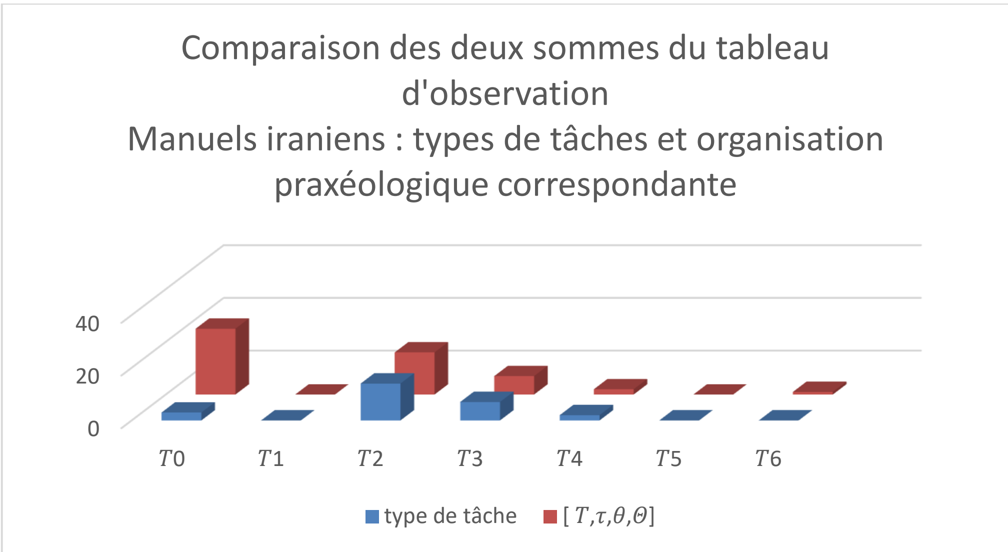

Fig. 5 : Comparaison des deux sommes du tableau d'observation

Au regard de cette analyse, il nous est loisible de corroborer l'hypothèse 1 mentionnant que les manuels ne font pas travailler des équations pertinentes d'un point de vue didactique. En effet, environ les trois quarts des exercices examinés font travailler les calculs arithmétiques et les essais-erreurs et ne sont pas propices à la résolution algébrique. Cela rejoint les constatations de Sirejacob (2016) qui met en exergue que les exercices des manuels ne créent pas chez les élèves le besoin d'utiliser et d'articuler des procédures et des expressions algébriques, ce qui engendre des difficultés dans leur cursus mathématique.

Bien que les deux manuels aient comme point commun cette absence de résolution algébrique dans leurs exercices, nous pouvons toutefois relever des différences entre l'enseignement de l'algèbre en Iran et en Romandie, à travers l'étude des présents ouvrages.

Nous remarquons que *les manuels iraniens introduisent plus tôt la résolution d'équation que les manuels suisses romands*, corroborant ainsi la deuxième hypothèse. En effet, les élèves utilisant les manuels iraniens ont eu leur première rencontre avec la résolution d'équations dès la 9H alors qu'en Suisse romande elle se déroule en 10H. Cette rencontre est caractérisée par des exercices qui ne nécessitent pas une diversité de techniques ; ces derniers peuvent très souvent être résolus arithmétiquement. En Iran, cette première rencontre, facilitée puisque se déroulant plus tôt, articule une bonne connaissance de la résolution arithmétique permettant de l'appréhender sans grande difficulté et de favoriser la transition vers l'algèbre. Ainsi, nous pourrions postuler que le manuel iranien travaille l'épaisseur de l'équipement praxéologique des élèves qu'ils développent au fur et à mesure, corroborant ainsi l'hypothèse 3, à savoir que *la différence de temporalité a une influence sur l'univers cognitif des apprenants*. Nous pouvons constater cette épaisseur de l'équipement praxéologique dans la diversité des exercices de type développement, réduction, factorisation et distributivité simple et complexe d'une expression littérale – déjà connus par les élèves depuis la 9H comme l'attestent ces manuels iraniens. Il y a en effet davantage d'exercices de ce type que de résolutions d'équations, à l'inverse du manuel suisse romand qui propose bon nombre d'exercices sous forme de « résous l'équation ». De ce fait, nous pourrions postuler qu'une personne (x) avec un bon équipement praxéologique serait ainsi équipée lorsqu'elle sera confrontée à un objet (o) encore inconnu – n'existant pas dans son univers cognitif U(x).

Analyse critique

Le sujet de notre recherche étant de prime abord très vaste, nous nous sommes restreinte au chapitre algèbre et plus précisément à la résolution d'équations du premier degré des manuels iraniens et du manuel suisse romand, en excluant certains exercices afin de rendre notre recherche réalisable. Il est donc important de considérer cette limite quant à l'inférence de nos résultats. En effet, nous n'avons pas pris en compte la résolution des équations à travers les graphiques, les fractions et la résolution de problèmes en lien avec les fonctions et l'algèbre. Concernant ce dernier point, nous étions face à une limite culturelle dans la comparaison d'un manuel à l'autre. Par exemple, certains problèmes qui font sens aux élèves romands (ex : distinguer la fonction linéaire et affine à travers l'achat des billets de cinémas individuels ou par abonnement) ne le font pas pour les élèves iraniens puisque pour des raisons politiques et sociales, l'abonnement n'existe pas et que certains élèves – notamment les filles – ne sont pas encouragés à se rendre au cinéma.

Une autre limite est que nous avons omis dans notre observation sont les différents niveaux qui existent en Suisse romande (VG ou VP, niveau 1 et niveau 2, etc.), considérant ainsi le manuel suisse romand sans faire de distinction et de manière générique. Concernant les manuels iraniens, nous ne pouvons statuer sur la présence d'éventuels niveaux, bien qu'il y a 20 ans lorsque nous y enseignions, il n'en existait pas.

Finalement, rappelons que cette étude se focalise sur les manuels alors que chaque enseignant est libre de proposer divers dispositifs pour l'apprentissage des élèves (fiches supplémentaires, activités, situations-problèmes, etc.). Nous n'avons donc pas appréhendé ici cette richesse et cette variété, car elle appartient à la partie immergée de l'iceberg du savoir.

Conclusion

Nous avons commencé ce présent travail avec plusieurs questionnements et interrogations naissant de notre curiosité à propos de la crainte et du découragement que nous rencontrons parfois chez certains élèves, dans le cadre de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. De cette interrogation sur les raisons de ce désintérêt, nous avons pris comme cadre d'étude les différences et les limites entre les deux manuels de mathématiques en considérant la répartition des équations degré 1 dans le chapitre d'algèbre de 11H.

En procédant par l'analyse praxéologique de la TAD (Chevallard, 1998) et l'étude épistémologique des équations, nous avons eu l'opportunité de constater les différences et les similitudes au niveau des manuels, en analysant les organisations praxéologiques, permettant ainsi de porter un regard sur ce dispositif d'enseignement officiel dans deux pays différents. Il est apparu que la répartition des tâches était dans une certaine mesure similaire d'un manuel à l'autre et que la résolution arithmétique occupait une place prépondérante, à défaut de la résolution algébrique. Des différences ont également été relevées ; alors que le manuel suisse romand encourage le passage d'une technique à une autre dans la résolution des équations, le manuel iranien propose des équations plus simples nécessitant rarement un croisement des techniques.

Cette analyse comparative nous a amené à repérer différents choix didactiques de la part des auteurs des manuels, puisque les manuels iraniens sont plus propices au développement de l'épaisseur de l'équipement praxéologique. En effet, ils incitent l'élève (x) à développer un équipement praxéologique important autour d'un type de tâches afin d'être équipé lorsqu'il sera confronté à un objet (o) encore inconnu – n'existant pas dans son univers cognitif U(x).

Cette étude nous conduit finalement à réfléchir à la construction du savoir des élèves et par voie de conséquence à la *reconstruction* de l'enseignement. En effet, la didactique est enseignée, faire savoir (Chevallard, 1998) ; elle est une scène que l'enseignant propose pour que les élèves réussissent leur rôle d'apprenant. Comment pallier à cette rupture arithmétique/algébrique ? Quels types d'exercices sélectionnés et combien (rappelons qu'il y a 68 exercices de type « résolution d'équations » pour la Suisse romande contre 28 pour l'Iran) ? Ces différentes questions invitent à la réflexion d'une reconstruction idoine de notre enseignement passant par une réforme des manuels qui tient compte des besoins des apprenants (partie immergée de l'iceberg) en vue d'assurer des fondements solides aux savoirs des élèves (partie émergée de l'iceberg).

BIBLIOGRAPHIE

Amiri, H. et al. (2018). *Riazzi 8e : Chapitre 4 algèbre et équation.* Sherkat chap va nashr ketabhay darsi iran « sahami khas ».

Chevallard, Y. (1985). *Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques.*

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Texte issu de la conférence plénière donnée à Marseille.*

Coppé, S. & Grugeon, B. (2009). Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ? *Colloque de la CORFEM*, France. Repèrè à https: //halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00959612.

Corminboeuf, I. & al. (2013). *Mathématiques 9-10-11 : livre 11e. Chapitre Fonctions et algèbre.* LEP Éditions Loisirs et Pédagogie SA.

Eslahpazir, B. & al.(2013). *Riazzi 7e : Chapitre 3 algèbre et équation.* Sherkat chap va nashr ketabhay darsi iran « sahami khas ».

Le Blog De L'UIA, Université de Poitiers. (2016). El-Khawarizmi, le fondateur de l'Algèbre et des Algorithmes. Repéré à http://ll.univ-poitiers.fr/llappli/wordpress/el-khawarizmi-le-fondateur-de-lalgebre-et-des-algorithme/#:~:text=Al%2DKhawarizmi%2C&text=Son%20apport%20en%20math%C3%A9matiques%20fut,%C3%A9quations%20en%20classant%20celles%2Dci.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2020). Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22(1),* 123-144.

Sirejacob, S. (2016). Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner : les équations au collège. *Petitx. 102,* 27-55. Repéré à https://publimath.univ irem.fr/numerisation/PX/IGR16017/IGR16017.pdf.

Wozniak, F., Bosch, M. & Artaud, M. (s.d.). *La théorie anthropologique du didactique.* Consulté en ligne le 15.06.2020 sur https://ardm.eu/qui-sommes-nous-who-are-we-quienes-somos/yves-chevallard/.

Liens de manuels iraniens

Tous les manuels : http://chap.sch.ir/books/8004

Manuel maths 7ème équivalant de 9H suisse : http://chap.sch.ir/sites/default/files/lbooks/1399-1400/555/028-041-C705_0.pdf

Manuel maths 8ème : http://chap.sch.ir/sites/default/files/lbooks/1399-1400/558/051-068-C805_0.pdf

Manuel maths 9ème : http://chap.sch.ir/sites/default/files/lbooks/1399-1400/556/078-085-C905_0.pdf

ANNEXE 1 - 7 PRAXÉOLOGIES

1) [$\boldsymbol{T}0$ / $\boldsymbol{\tau}0$/ $\boldsymbol{\theta}0$ / $\boldsymbol{\Theta}$]   où

T_0 : résoudre une équation du premier (ou deuxième) degré à une inconnue

τ_0 : tâtonnement en remplaçant la valeur particulière

θ_0 : la technologie est la définition d'une égalité

Θ : la théorie de l'arithmétique ex : $3 + x = 15$ ex : $x^2 + 1 = 0$

2) [$\boldsymbol{T}1$ / $\boldsymbol{\tau}1$/ $\boldsymbol{\theta}1$ / $\boldsymbol{\Theta}$]   où

T_1 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue sous forme de **ax = b** où le coefficient **a** est non nul

τ_1 : diviser de chaque côté de l'égalité par le coefficient de **a**

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul aux deux membres de cette équation

Θ la théorie de l'arithmétique ex : $4x = 32$

3) [$\boldsymbol{T}2$ / $\boldsymbol{\tau}2$/ $\boldsymbol{\theta}1,2$/ $\boldsymbol{\Theta}$]   où

T_2 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue sous forme **ax + b = c** où a et b sont non nuls

τ_2 : ajouter **-b** de chaque côté de l'égalité

τ_1Si (c - b) $\neq 0$ puis technique de τ_1

0Si (c - b) $=0$ donc $x = 0$ est la seule solution

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul aux deux membres de cette équation

θ_2 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on ajoute ou soustrait un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'arithmétique ex : $4x -7 = 3$

4) [$\boldsymbol{T}3$ / $\boldsymbol{\tau}3$/ $\boldsymbol{\theta}1,2$/ $\boldsymbol{\Theta}$]   où

T_3 : résoudre une équation du premier degré à une inconnue sous forme de **ax +b = cx + d** où a, b, c sont non nuls

τ_3 : Ajouter **-b** puis **-cx** puis diviser de chaque côté de l'égalité par (a - c)

τ_1Si (a - c) $\neq 0$, alors si (d – b) $\neq 0$ on se ramène à τ_1 ex : 3x+2=5x+3

∅ Si (a - c) = 0, alors si (d – b) $\neq 0$ pas de solution ex : 3x+2=3x+3

0Si (a - c) $\neq 0$ alors si (d – b) = 0 donc x = 0 est la seule solution ex : 3x+2=5x+2

∞Si (a - c) = 0, alors si (d – b) = 0 donc c'est vrai pour toutes les valeurs de x où il y a une infinité de solution ex : 3x+2=3x+2

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul aux deux membres de cette équation et/ou

θ_2 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on ajoute ou soustrait un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'algèbre

5) [$\boldsymbol{T}4$ / $\boldsymbol{\tau}4$ / $\boldsymbol{\theta}1, 2$/ $\boldsymbol{\Theta}$] où

T_4 : résoudre une équation sous forme de **ax +b = cx** où a, b et c sont non nuls

τ_4 : Ajouter **-cx** puis **-b** à chaque côté de l'égalité

τ_1 Si (a - c) ≠0 donc on se ramène à τ_1. ex : 3x +2 = 2x

∅ Si (a - c) = 0 donc pas de solution. ex : 3x+2 = 3x

θ_1 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on multiplie ou divise par un même nombre non nul aux deux membres de cette équation

θ_2 : la technologie est la conservation de l'égalité quand on ajoute ou soustrait un même nombre, un même monôme ou un même polynôme aux deux membres de cette équation

Θ : la théorie de l'algèbre

6) [$\boldsymbol{T}5$ / $\boldsymbol{\tau}5$ / $\boldsymbol{\theta}3$/ $\boldsymbol{\Theta}$] où

T_5 : résoudre une équation *produit nul, ex :* (3x +2)(x – 5) = 0

τ_5 : pour résoudre une équation *produit nul*,

on écrit A×B=0 ⇔ A=0 ou B=0. On résout ensuite chacune des équations A=0 et B=0 séparément. Les solutions obtenues en résolvant ces deux équations sont celles de l'équation initiale par exemple τ_2

Ex : (3x +2)(x – 5) = *0* ⇔ (3x +2) = *0 ou* (x – 5) = *0*

Ex : x (x – 1) = 0 ⇔ x = 0 ou x – 1 = 0

θ_3 : la technologie est la propriété d'équation produit nul

Θ : la théorie de l'algèbre

7) [$\boldsymbol{T}6$ / $\boldsymbol{\tau}6$ / $\boldsymbol{\theta}3$/ $\boldsymbol{\Theta}$] où

T_6 : résoudre une équation du second degré sous forme d'une équation « produit nul »

τ_6 : pour résoudre une équation dégrée deux qui peut ramener à un type d'équation produit nul (il est parfois nécessaire de factoriser ou simplifier avant d'obtenir une telle équation) puis en résolvant deux équations du premier degré

Ex : x^2 – x = 0 factorise x => x (x – 1) = 0 et en se ramène en τ_5

θ_3 : la technologie est la propriété d'équation produit nul

Θ : la théorie de l'algèbre

N.B : la résolution d'équation sous forme de ax = cx n'est pas considérée puisque figure qu'une seule fois dans l'ensemble des exercices des deux manuels.

Annexe 2 – Tableaux d'observation

Tableau du manuel 11H suisse

	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	$[T_1/\tau_1/\theta_1]$	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	$[T_5/\tau_5/\theta_3]$	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	**Somme**
T_0	FA256a FA256b FA256c FA256d FA256e FA256f FA256g FA256h FA256i FA256j FA256k FA256l FA256m FA256n FA256o FA256p FA275a FA275b FA275c FA275d FA275e FA275f FA275g FA275h FA275i FA275j FA275k FA275l	FA256a FA256b FA256f FA275c FA275e FA275f FA275j FA275l	FA256d FA256i FA256j FA256k FA256l FA256m FA256o FA256p	FA256g∞ FA256h FA256n Ø FA275b∞ FA275g	FA256c FA256e FA275a	FA275i	FA275d FA275h τ_5 FA275k τ_5	28
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	$[T_1/\tau_1/\theta_1]$	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	$[T_5/\tau_5/\theta_3]$	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	Somme
typeT_1	FA254a FA254i FA255a	FA254a FA254i FA255a						3
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	$[T_1/\tau_1/\theta_1]$	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	$[T_5/\tau_5/\theta_3]$	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	Somme
typeT_2	FA254b FA254f FA254j FA255c FA255e FA255f FA255h FA275e FA275f FA268i FA268j FA276a FA282b		FA254b τ_1 FA254f τ_1 FA254j τ_1 FA255b τ_1 FA255c FA255e τ_1 FA255f τ_1 FA255h τ_1 FA268i FA268j 0 FA276a FA276d FA282b					13

	$[T_0 / \tau_0 / \theta_0]$	$[T_1 / \tau_1 / \theta_1]$	$[T_2 / \tau_2 / \theta_2]$	$[T_3 / \tau_3 / \theta_{1,2}]$	$[T_4 / \tau_4 / \theta_{1,2}]$	$[T_5 / \tau_5 / \theta_3]$	$[T_6 / \tau_6 / \theta_3]$	Somme
typeT_3	FA255d FA255g			FA254c τ_1 FA254d τ_1 FA255d ∞ FA255g ø FA255j τ_1 FA268b τ_1 FA268c τ_1 FA268d τ_1 FA268e ∞ FA268f τ_1 FA268g τ_1 FA276b FA276c FA282a τ_1 FA282c τ_1 FA282d ø FA282e 0 FA282f τ_1				18

	$[T_0 / \tau_0 / \theta_0]$	$[T_1 / \tau_1 / \theta_1]$	$[T_2 / \tau_2 / \theta_2]$	$[T_3 / \tau_3 / \theta_{1,2}]$	$[T_4 / \tau_4 / \theta_{1,2}]$	$[T_5 / \tau_5 / \theta_3]$	$[T_6 / \tau_6 / \theta_3]$	Somme
typeT_4	FA268a FA255i				FA268a τ_1 FA268h ø FA254e τ_1 FA254h τ_1 FA255i τ_1			5
	$[T_0 / \tau_0 / \theta_0]$	$[T_1 / \tau_1 / \theta_1]$	$[T_2 / \tau_2 / \theta_2]$	$[T_3 / \tau_3 / \theta_{1,2}]$	$[T_4 / \tau_4 / \theta_{1,2}]$	$[T_5 / \tau_5 / \theta_3]$	$[T_6 / \tau_6 / \theta_3]$	Somme
typeT_5								
	$[T_0 / \tau_0 / \theta_0]$	$[T_1 / \tau_1 / \theta_1]$	$[T_2 / \tau_2 / \theta_2]$	$[T_3 / \tau_3 / \theta_{1,2}]$	$[T_4 / \tau_4 / \theta_{1,2}]$	$[T_5 / \tau_5 / \theta_3]$	$[T_6 / \tau_6 / \theta_3]$	Somme
typeT_6								
T	FA254g			FA254g 0				1
Somme	49 72.06%	11 16.18%	21 30.88%	23 33.82%	8 11.76%	1 1.47%	3 4.41%	68

Tableau des manuels de 9H et 10H iraniens

	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$	T_5	$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	Somme
T_0	9C3P37Ta 9C3P37Tb 9C3P37Tc		9C3P37Ta 9C3P37Tb				9C3P37Tc	3
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_1								0
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_2	9C3P38Ta 9C3P38Tb 9C3P38Te 9C3P38Tf 9C3P39Ea 9C3P39Eb 9C3P39Ec 9C3P39Ed 9C3P39Ee 9C3P39Ef 9C3P40E2 10C4P65Ta 10C4P65Tb 10C4P65Tf		9C3P38Ta τ_1 9C3P38Tb τ_1 9C3P38Te 9C3P38Tf τ_1 9C3P39Ea τ_1 9C3P39Eb τ_1 9C3P39Ec τ_1 9C3P39Ed τ_1 9C3P39Ee τ_1 9C3P39Ef τ_1 9C3P40E2 10C4P65Ta τ_1 10C4P65Tb τ_1 10C4P65Tf τ_1					14
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_3	10C4P65A3a 10C4P65A3b 10C4P65Tc 10C4P65Td 10C4P65Te 10C4P68Eb			10C4P65A3a 10C4P65A3b 10C4P65A3c 10C4P65Tc τ_1 10C4P65Td τ_1 10C4P65Te τ_1 10C4P68Eb0				7
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_4	9C3P39Eg 9C3P39Eh				9C3P39Eg 9C3P39Eh τ_1			2
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_5								0
	$[T_0/\tau_0/\theta_0]$	T_1/τ_1	$[T_2/\tau_2/\theta_2]$	$[T_3/\tau_3/\theta_{1,2}]$	$[T_4/\tau_4/\theta_{1,2}]$		$[T_6/\tau_6/\theta_3]$	
typeT_6								0
T								
Somme	25 89.3%	0	16 57.14%	7 25%	2 7.14%		1 3.57%	

Annexe 3 - Le concept de praxéologie

La TAD permet de modéliser toute forme d'activité humaine à l'aide du concept de praxéologie, cette dernière comprenant les notions suivantes :

- Type de tâches (T) : il s'agit d'une mise en pratique dans un contexte concernant un objet relativement précis comme par exemple calculer la valeur d'une fonction (Chevallard, 1998). Ces types de tâches ne sont pas innés mais sans cesse reconstruits et c'est ce qui en fait un objet de didactique.
- Technique (τ) : la technique est une manière d'accomplir et de réaliser des tâches T. Chaque type de tâche T donnée contient une telle manière de faire (technique) et la praxéologie relative au type de tâche T contient donc une technique τ relative à T (Chevallard, 1998). Chevallard (1998) nomme un « bloc » $[T/\tau]$ bloc pratico-technique qui correspond couramment au savoir-faire. En dépit d'une pluralité de techniques possibles, les Institutions (I), en retiendront une minorité comme seule manière de faire et par conséquent, toutes autres techniques alternatives, bien que fonctionnelles, sont considérées comme artificielles. Une technique présentée comme seule manière de faire à un élève à un moment donné est comme « figée », dans le sens qu'il est difficile par la suite de lui proposer une technique alternative.
- Technologie (θ) : cette notion renvoie à un discours et à une explication sur la technique qui la rend intelligible. En effet, la technologie justifie la technique en assurant que tel type de tâches peut être réalisé par cette technique τ (Chevallard, 1998). Généralement, les technologies sont sous forme de définition, propriété, théorème (à l'instar du théorème de Thalès ou de Pythagore), etc.
- Théorie (Θ) : la théorie fait exister la technologie. Il s'agit d'un niveau supérieur de justification qui « (...) reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique. » (Chevallard, 1998, p.4). Ainsi, la technologie et la théorie se présentent elles aussi sous forme de bloc, que Chevallard (s.d.) nomme « bloc » $[\theta/\ \Theta]$ technologico-théorique qui correspond au savoir dans le sens courant du terme.
- Savoir-faire et savoirs : le savoir correspond au bloc « technologie » et « théorie » $[\theta\ /\ \Theta]$, nommé technologico-théorique tandis que le savoir-faire renvoie au bloc « type de tâche » et « technique » $[T/\tau]$, appelé bloc pratico-technique (Chevallard, 1998). La structure praxéologique la plus simple qui est nommée praxéologie ponctuelle se compose des deux blocs précédents et est présentée sous cette forme $[T/\tau/\theta/\Theta]$.