RMé 236

236

RMé

REVUE DE MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE

NOVEMBRE 2021

ISSN : 2571-516X

# SOMMAIRE

Chères lectrices, chers lecteurs,

Le comité éditorial est heureux de vous proposer ce numéro 236 de la revue RMé. Ce numéro marque un tournant dans la politique éditoriale de la revue puisque, suivant le mouvement des politiques éditoriales scientifiques, les articles de recherche seront maintenant publiés en Open Acces grâce au projet SOAP2 (Shared Open Access Publishing Platform[1]) financé par swissuniversities. Vous trouverez des informations sur les implications de vos propositions sur notre site internet.

Ce numéro est composé de 4 articles. Dans le premier article, intitulé "Les interventions de l'enseignante : une dimension essentielle pour la résolution d'un problème mathématique ?", Nora Ceroni et Cindy Rei Moreira étudient les interventions d'une enseignante de 2-3H lors de la mise en place d'une activité de résolution de problèmes issue des moyens d'enseignement romands. Elles analysent ces interventions afin de mettre en lumière leur impact sur l'agir des élèves.

Dans l'article intitulé "Des données probantes au service de l'enseignement différencié des mathématiques" Noémie Lacombe, Anne-Françoise de Chambrier et Thierry Dias effectuent une revue des recherches existantes dans l'enseignement des mathématiques pour les élèves en difficulté. Grâce à cette revue de littérature, les auteurs souhaitent fournir aux enseignant·e·s un aperçu des outils pour l'enseignement des mathématiques pour les élèves en difficulté. Ils détaillent sept pistes d'intervention : l'enseignement explicite, les feedbacks, l'enseignement de stratégies, la verbalisation par l'élève de son raisonnement, l'inclusion d'exemples, de représentations visuelles et matérielles dans les tâches et le tutorat par les pairs.

Stéphane Clivaz, Masanobu Sakamoto et Shirley Tan dans leur article intitulé "Comment une addition peut-elle devenir une soustraction ? Le rôle du schéma en barres dans une leçon de mathématiques japonaise" présentent tout d'abord la spécificité de telles leçons. Les auteures s'appuient sur une analyse a priori de la leçon et sur l'analyse de procédures d'élèves pour montrer que l'utilisation des représentations graphiques en association avec des extraits vidéos et des retranscriptions d'élèves amènent des pistes intéressantes pour la formation des enseignant·e·s et notamment sous forme de lesson study.

Enfin, l'article de Estelle Dunand et Maïssa Reider intitulé "réalisation d'une tâche logique en 4H" s'intéresse aux procédures des élèves autour d'un problème de déduction logique type énigme. Cet article vise à identifier la manière dont les élèves de 4H organisent les informations dans une démarche de déduction logique tout au long de la résolution du problème. Au la suite de cette analyse de procédures les auteures cherchent à évaluer l'efficacité des variables et des stratégies en termes d'apprentissage sur la classe.

Nous vous souhaitons une agréable lecture.

Julie Candy, pour le comité éditorial

---

[1] https://soap2.ch/

# Les interventions de l'enseignante : une dimension essentielle pour la resolution d'un probleme mathematique ?

Nora Ceroni, Cindy Rei Moreira

Étudiantes, Université de Genève

Mots-clés : intervention, étayage, analyse de pratique, résolution de problème

Cette étude met en avant l'importance des interventions d'une enseignante, lors d'une séance de mathématiques portant sur la résolution d'un problème. Pour mettre cet élément en valeur, nous avons enregistré les interactions entre une enseignante et ses élèves de 2H-3H lors de la résolution d'un problème mathématique. Nous avons ainsi identifié les conséquences de ces interactions sur l'agir des élèves.

## Introduction

Cet article vise à rendre compte des effets des différentes postures de l'enseignante sur l'agir des élèves, lors de la résolution d'un problème mathématique. Pour répondre à cette problématique, nous avons mis en place une activité de résolution de problème dans une classe de 2H-3H du canton de Genève. Nous avons ainsi pu récolter des données analysées selon deux théories distinctes. De ce fait, nous utilisons la théorie des interactions de Kiwan et Roditi (2019) que nous complétons par les six catégories de l'étayage de Bruner (1983).

Notre dessein est donc de situer la pratique d'une enseignante, afin d'observer les conséquences de celle-ci sur l'agir des élèves. Autrement dit, nous souhaitons examiner ce que mettent en place les élèves à la suite des interventions de l'enseignante.

Nous commencerons par détailler la mise en place de l'activité dans la classe. Nous continuerons en explicitant les données récoltées et leur analyse. Finalement, nous présenterons les résultats de la recherche, c'est-à-dire les conséquences sur l'agir des élèves.

## Mise en place de l'activité

L'activité, les ballons, que nous avons choisi de conduire dans cette classe est tirée des moyens d'enseignement romands (disponible sur ESPER[1]). Elle est initialement destinée à des 3H. Dans sa forme originale (Fig. 1), elle se réalise individuellement. La fiche présente un homme (nommé Bruno) en possession de six ballons. Autour de ce personnage volent treize ballons (la collection de référence) caractérisés chacun par une forme (cœur, étoile, ovale, lune) et une couleur (rouge, vert, bleu, jaune). Parmi ces ballons, certains sont représentés deux fois. La consigne est la suivante : « Bruno veut acheter tous les ballons de la collection, il lui manque six ballons. Entoure ceux qui lui manquent. Attention ! Il n'a pas 2 ballons pareils ».

L'élève doit donc mettre en place une stratégie de correspondance terme à terme : il doit comparer deux collections (la collection du personnage, aux ballons qui volent autour de lui) et entourer les éléments, dans la collection de ballons volants, qui manquent à Bruno. L'élève doit parvenir à différencier les éléments des deux collections. Pour ce faire, il choisit donc un élément de la première collection (les ballons volants) et le compare, en observant la forme et la couleur, aux éléments de la seconde (les ballons dans la main de

[1] https://www.ciip-esper.ch/#/

Bruno). Si l'élément choisi se trouve dans la seconde collection, alors l'élève le barre et passe au suivant. S'il ne s'y trouve pas, il l'entoure ; il s'agit d'un des ballons dont Bruno a besoin. L'élève passe ainsi en revue chaque élément de la première collection en le comparant à ceux de la seconde.

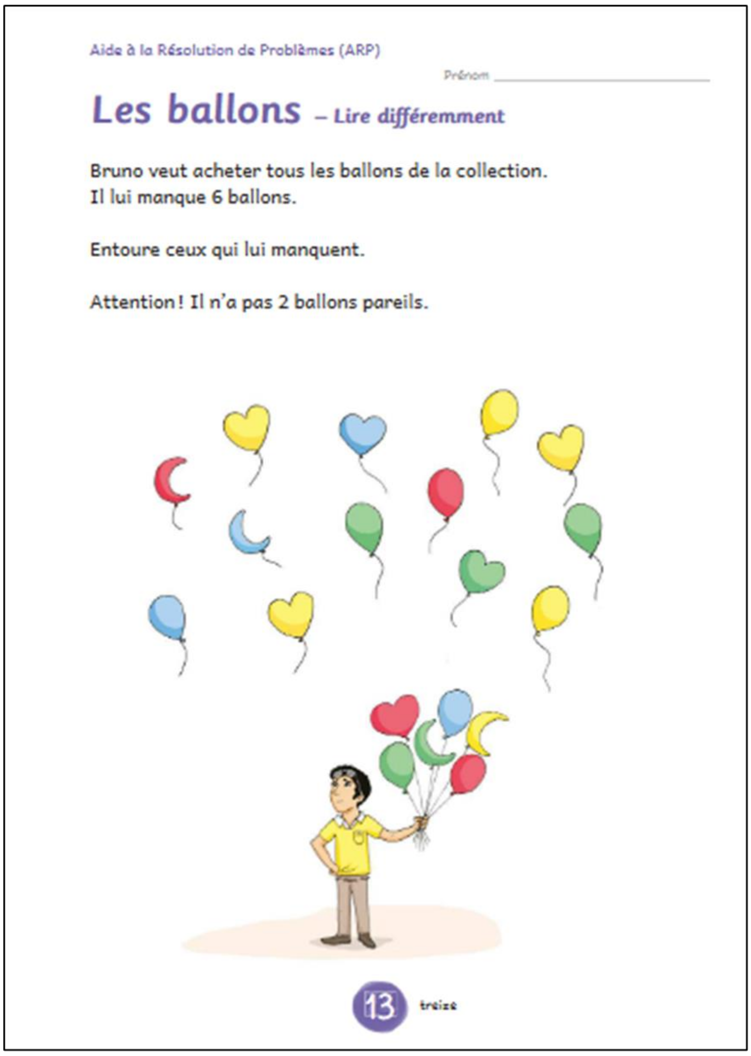



Fig. 1 : Activité initiale tirée des moyens d'enseignement romands (ESPER)

Pour la mise en place de cette activité, nous avons changé des valeurs de variables didactiques. Premièrement, la modalité sociale de travail n'est plus la même ; l'élève ne résout pas l'activité seul, mais travaille au sein d'un groupe de quatre apprenants. De plus, la disponibilité des collections a évolué. Contrairement à l'activité initiale, chaque élève n'a pas en sa possession toutes les informations pour résoudre le problème seul. Ainsi, chacun d'entre eux à une sous-collection de ballons différente représentée sur une fiche :

- Un élève de 3H a en sa possession Bruno et ses ballons (un ovale vert, un ovale bleu, un ovale rouge, une lune verte, une lune jaune, un cœur rouge).
- Un élève de 3H a six ballons de formes et couleurs différentes (un ovale vert, un ovale bleu, un ovale rouge, une lune bleue, une lune rouge, un cœur jaune).
- Un élève de 2H a six ballons jaunes de formes différentes (deux ovales jaunes, deux lunes jaunes, deux cœurs jaunes).
- Un élève de 2H a six ballons en forme de cœur de couleurs différentes (deux cœurs verts, deux cœurs bleus, un cœur rouge, un cœur jaune).

Les élèves doivent formuler des observations concernant les informations qu'ils possèdent afin de permettre au groupe de résoudre la tâche. Le nombre de critères pour trier les ballons, autrement dit les éléments de la collection, varie selon le degré de scolarité des élèves. Ainsi, pour correspondre aux attentes du Plan d'études romand, les élèves de 2H ont en leur possession une collection dont les éléments peuvent être différenciés par un seul critère : la forme ou la couleur. Les élèves de 3H, quant à eux, font face à une collection dont les éléments se différencient au travers de deux critères (la forme et la couleur).

En modifiant les variables décrites ci-dessus, notre but est d'observer la façon dont les interactions sociales entre pairs conduisent à l'élaboration de nouvelles connaissances. Autrement dit, à travers cette organisation de l'activité, nous souhaitons que les élèves aient recours à la communication pour reconstituer la collection complète de ballons.

Pour débuter l'activité dont les variables ont été modifiées, la consigne imaginée, qui doit être présentée par l'enseignante, spécifie que les élèves ne doivent pas se montrer leur feuille et que leur tâche est de trouver le nombre de ballons manquant à Bruno et de quels ballons il s'agit. Elle explicite également que trois des élèves du groupe possèdent les informations recherchées (les ballons manquants) sur leur fiche et que le quatrième élève a en sa possession Bruno et les ballons qu'il a déjà dans sa collection. En outre, il est également précisé que Bruno veut dans sa collection des ballons différents. Ainsi, chaque membre du groupe doit pouvoir s'exprimer, afin que les élèves puissent résoudre le problème. La stratégie visée n'est alors plus de faire une correspondance terme à terme, mais de mettre en place, de manière individuelle, une stratégie d'énumération (Briand, 2000). En effet, les élèves doivent énoncer les caractéristiques de leurs ballons à l'élève en charge des ballons de Bruno. Néanmoins, ils doivent être attentifs à ne pas décrire deux fois le même ballon ou deux ballons similaires placés à des endroits différents sur la fiche. Ainsi, il est primordial que les élèves organisent leur progression sur leur feuille afin de parvenir à une énumération correcte. Finalement, comme souligné précédemment, la communication et la collaboration font partie intégrante de la stratégie visée. L'énumération individuelle des éléments présents sur la fiche des élèves doit être effectuée de manière efficiente, afin de servir le groupe. Pour ce faire, les élèves doivent trouver un moyen de s'écouter et de prendre en considération les informations révélées sans les oublier.

À travers cette mise en place de l'activité, nous souhaitions observer les interactions entre l'enseignante et les élèves au cours d'un problème à résoudre de manière collective. Ainsi, nous avons enregistré deux groupes d'élèves durant l'activité. Nous avons donc pu retranscrire puis analyser les interactions effectives entre les élèves et l'enseignante.

## DÉROULEMENT EFFECTIF DE L'ACTIVITÉ

Pour lancer l'activité, l'enseignante réunit les élèves sur les petits bancs à l'avant de la classe et leur explicite les consignes. Elle présente la situation du problème : Bruno a en sa possession des ballons et il veut absolument compléter sa collection en achetant de nouveaux ballons, mais ils doivent être tous différents. Elle insiste notamment sur le fait que les élèves doivent se mettre dans la peau de petits chercheurs et trouver des indices. De plus, elle est très claire sur les contraintes de l'activité et répète plusieurs fois que les élèves ne doivent en aucun cas se montrer leur feuille, que chaque feuille appartient à un seul élève. Elle leur distribue alors les fiches en insistant sur le rôle de chacun : « tu as Bruno, tu connais les ballons qu'il a déjà dans sa collection » ou « tu es responsable d'un stand de ballons, tu possèdes des indices pour aider Bruno à trouver les ballons qui lui manquent ».

Les groupes sont alors positionnés à différents endroits de la classe. Chaque groupe est composé de quatre élèves. L'enseignante leur demande de ne poser aucune question jusqu'à ce que le minuteur sonne (cinq minutes). Les élèves commencent donc l'activité, mais rencontrent de nombreuses difficultés. Après les avoir laissés essayer, l'enseignante prend conscience que la complexité de l'exercice rend la communication fastidieuse, elle décide donc d'intervenir et d'étayer la réflexion des différents groupes.

En écoutant les enregistrements et en effectuant les retranscriptions, nous remarquons que la présence de l'enseignante permet l'avancée des élèves dans l'activité et a un impact important sur l'élaboration de leurs stratégies : elle les guide, les aide à faire ressortir les éléments pertinents. Nous pouvons ainsi observer comment se caractérise la pratique de l'enseignante, quels moyens elle privilégie pour orienter ses élèves.

### Analyse des interactions

La retranscription des interactions survenues pendant la leçon permet de les analyser plus finement. Cette analyse *a posteriori* conduit à l'élaboration de deux tableaux récapitulatifs (Fig. 2 et Fig. 3) permettant de différencier et de classer les différents types d'interventions et ainsi de catégoriser la pratique de l'enseignante.

## Analyse des interactions pendant la leçon de mathématiques selon la théorie de Kiwan et Roditi (2019)

Intéressons-nous premièrement à l'apport de la théorie de Kiwan et Roditi (2019) concernant la caractérisation de la pratique de cette enseignante. Dans le contexte de la classe, l'activité de l'enseignante et celle de l'élève se succèdent inlassablement. Celle de l'enseignante a pour but principal l'apprentissage des élèves, mais également le maintien de leur attention grâce à des interactions. L'activité de l'enseignante consiste donc en la production d'une situation pour l'apprenant. L'activité de l'élève quant à elle, dépend de la situation établie par l'enseignante. Autrement dit, l'enseignante met en place une activité (de mathématiques par exemple), qui engendre une situation d'apprentissage pour les élèves. Cette situation qui suscite des interactions de la part des apprenants est considérée comme l'activité des élèves. Les activités qui ont lieu dans une classe engendrent une double régulation de la part de l'enseignante, car celles-ci ont « des effets sur la situation et sur le sujet qui [agit] » (Kiwan & Roditi, 2019, p.2). Cette double régulation de l'enseignante peut avoir lieu à deux niveaux différents : le premier concerne son activité (enseigner) et le second les effets de celle-ci pour les élèves (faire apprendre). Ce second niveau est donc apte à l'apparition d'interactions entre les apprenants et l'enseignante. En se basant sur ce niveau de la double régulation, les auteurs définissent une catégorisation didactique étudiant « la proximité entre les interventions de l'enseignant[e] et les productions des élèves » (Kiwan & Roditi, 2019, p.3). Cette catégorisation se base sur un couple d'information-action. Dans ce contexte, la prise d'information se fait au travers des activités des apprenants et « l'action est celle de l'enseignant[e] sur la situation de l'élève […] ou sur l'élève lui-même » (Kiwan & Roditi, 2019, p.2). Ainsi,

> L'information - pour l'enseignant[e] - est la production de l'élève qui peut être un résultat R, une procédure P ou une connaissance C. L'action - de l'enseignant[e] - suite à l'interprétation de cette information peut concerner un résultat, une procédure ou une connaissance de l'élève. (Kiwan & Roditi, 2019, p.4)

Chaque type d'interactions (il en existe neuf au total), peut être classé dans un tableau permettant de repérer chez une enseignante des tendances et donc de catégoriser des types de pratiques différents ou alors des variations dans la pratique d'une même enseignante. Nous avons décidé d'ajouter une catégorie concernant l'information : la consigne. En effet, il nous parait nécessaire de distinguer la consigne de la connaissance. La consigne est une connaissance choisie et fournie dans le but de lancer l'élève dans une activité de résolution, alors que la connaissance de l'élève peut être issue d'inférences (cela signifie donc qu'il est déjà dans l'activité de résolution) ou de savoirs plus généraux, non spécifiques à l'activité de mathématiques. Il est également nécessaire de noter que les interventions peuvent être qualifiées d'horizontales (en rouge dans le tableau, Fig. 2) : l'information et l'action concernent un même élément (CC, RR, PP, Cs.Cs.) ou de verticales (en noir dans le tableau, Fig. 2) : l'information et l'action concernent deux éléments différents (CR, CP, CCs., RC, RP, RCs., …).

Le premier tableau (Fig. 2) rend compte du fait que 55,5% des interventions de l'enseignante peuvent se définir comme étant des interactions de type vertical. Autrement dit, lorsque l'enseignante part d'un certain niveau (des connaissances, des procédures, des résultats ou de la consigne) elle agit sur un autre. Le tableau montre également que 77,7% des interventions partent des procédures des élèves ou débouchent sur celles-ci. Nous allons donc présenter trois des interactions qui ont eu lieu dans le deuxième groupe d'élèves, représentatives du type d'interactions que favorise l'enseignante. Ces interactions sont celles répertoriées dans le tableau (Fig. 2, groupe 2).

Interaction n°1

Avant l'arrivée de l'enseignante, les élèves partagent les informations de leur fiche sans prendre en considération tout le groupe. Ainsi, seuls deux élèves s'écoutent réellement. La procédure qu'ils utilisent ne peut donc pas être concluante.

**Enseignante :** *Il faut parler à tout le groupe sinon ça marche pas. Tu parles à tout le monde, tu regardes tout le monde, tu regardes tout ton groupe là. Élève 4 va vous dire ce que Bruno a dans sa main.*

**Élève 4 :** *Ok, j'ai un ballon rouge avec un cœur et encore un ballon rouge rond, et un ballon jaune en forme de lune et un vert rond et un rouge rond et ballon rond … bleu.*

La procédure que les élèves suivent n'est pas ou peu efficace. L'enseignante intervient sur celle-ci, afin d'en suggérer une nouvelle pouvant les mener au résultat. L'enseignante agit donc au niveau de la procédure des élèves pour les réorienter vers une plus efficiente (PP).

Interaction n°2

Avant l'interaction, les élèves comptent leurs ballons et font des constatations sur les informations en leur possession (formes, couleurs), mais leurs interactions ne leur permettent pas d'avancer dans la résolution du problème.

**Enseignante :** *Bruno, il a sa collection dans sa main chez élève 4 et en fait il va aller chercher des ballons, chez toi, chez toi et chez toi pour compléter la collection. Simplement, parfois, tu (en s'adressant à l'élève 4) vas devoir demander quels ballons ils ont peut-être.*

**Élève 4 :** *T'as quels ballons ?*

**Élève 1 :** *La lune jaune le ballon, le cœur qui est jaune, le rond qui est jaune et la lune qui est jaune et puis le cœur qui est jaune.*

**Élève 4 :** *C'est tout jaune.*

**Enseignante :** *Aaah c'est tout jaune, t'as compris ? Et toi, tu dois regarder ta collection, est-ce qu'il y a quelque chose que tu peux compléter ? Que Bruno il a pas.*

Dans cette interaction, nous constatons que l'enseignante repart des connaissances des élèves, ce qu'ils savent déjà (quelqu'un a Bruno, les autres ont des informations devant aider Bruno à compléter sa collection de ballons). À partir de là, elle les oriente donc sur une procédure : l'élève qui a Bruno doit questionner ses camarades pour obtenir des informations supplémentaires. Il s'agit donc d'une interaction de type vertical, partant des connaissances des élèves, pour les mener vers une procédure (CP).

Interaction n°3

Juste avant l'intervention de l'enseignante, les élèves échangent sur les informations qu'ils ont en leur possession (formes et couleurs des ballons). Cependant, ils ne mettent rien en œuvre pour se rappeler de ce qu'ils apprennent au travers de leurs échanges. Ainsi, leur procédure, sans l'intervention de l'enseignante, n'aurait pas mené au résultat.

**Enseignante :** *Qu'est-ce qu'on pourrait faire pour s'en souvenir là ? Qu'est-ce que vous pouvez faire pour vous en souvenir ?*

*(...)*

**Enseignante :** *Toi tu l'as, c'est ça que tu veux dire. Comment on peut faire pour qu'il s'en rappelle ? Vous pourriez faire quoi ?*

*(...)*

**Enseignante :** *Si c'était un billet pour commander qu'est-ce que vous pourriez faire dessus ?*

**Élève 2 :** *Mmmh un billet, on pourrait faire…*

**Enseignante :** *Comment tu fais pour te rappeler de quelque chose toi ?*

**Élève 2 :** *Bah moi, bah moi …. Bah moi des fois, je redis à tout le monde.*

**Enseignante :** *Aah tu redis à quelqu'un, d'accord. Est-ce qu'il y a quelqu'un qui pourrait noter quelque chose ou faire quelque chose ? On pourrait écrire des choses ou pas ?*

**Élève 2 :** *Ouiii !*

L'enseignante questionne à de multiples reprises les élèves concernant la procédure qu'ils ont mise en place (elle admet qu'ils échangent des informations de manière structurée, cependant elle les questionne sur les processus de mémorisation : comment faire pour s'en rappeler, pour ne pas oublier). Au travers de ses multiples interrogations, elle les engage à faire évoluer leur procédure, afin qu'ils se souviennent des informations qu'ils partagent. Ainsi, il s'agit d'une interaction horizontale. L'enseignante part de la procédure des élèves pour les mener vers une procédure plus efficace (PP).

| Interactions (Selon la théorie de Kiwan et Roditi, 2019) | Actions | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Groupe 1 | | | Groupe 2 | | | Collectif | | |
| Informations | R | C | P | R | C | P | R | C | P |
| R | | | | | 1 | | | | |
| C | | 1 | | | | 1 | | | |
| P | 1 | | 1 | | | 2 | 1 | | |
| Cs | | | | | | | | | 1 |

Fig. 2 : Analyse des interactions, théorie de Kiwan et Roditi (2019)

Ces quelques observations permettent de rendre compte du fait que les procédures sont au centre de cette leçon de mathématiques. L'enseignante s'appuie, à la fois, fortement sur les procédures mises en place initialement par les élèves, mais également, sur les procédures attendues pour permettre aux élèves de tendre progressivement vers la résolution de la tâche à réaliser.

## Analyse des interactions pendant la leçon de mathématiques selon les six fonctions de l'étayage de Bruner (1983)

Le deuxième tableau (Fig. 3) regroupe les interactions de l'enseignante selon les six fonctions de l'étayage de Bruner (1983). Il permet de mettre en lumière les desseins visés par l'enseignante lors de ses interactions avec les élèves. Dans son texte (1983), Bruner explicite dans quel contexte apparaissent ces fonctions : le tutorat. Selon lui, une telle situation se définit par l'interaction entre un expert et un novice ; le premier guidant le second au cours d'une tâche nécessitant un degré d'habitudes qui ne lui est pas encore accessible. Par ces interactions, le novice développe alors une zone de proche développement. Autrement dit, « c'est ce que l'apprenant peut réaliser tout d'abord avec l'aide d'un ou de plusieurs tuteurs, comme prélude à l'intériorisation et à l'appropriation personnelle » (Terwagne, 2002, p.67). Dans ce cadre particulier de tutorat, qui s'assimile à la situation entre un ou des élève(s) et une enseignante, cette dernière peut interagir au travers de six fonctions : l'enrôlement dans la tâche, la réduction des degrés de liberté, le maintien de l'orientation, la signalisation des caractéristiques déterminantes, le contrôle de la frustration et la démonstration. Nous allons donc à présent observer quels types d'interactions ont été utilisés par l'enseignante et leurs effets sur l'agir des élèves.

L'enseignante réduit à quatre reprises les degrés de liberté. Après avoir pris conscience du fait que les élèves ne parviennent pas à mettre en place la stratégie visée et que l'activité semble poser énormément de problèmes, elle prend la décision de réduire les degrés de liberté en diminuant le nombre d'actes requis pour résoudre la tâche, en vue d'éviter une surcharge cognitive. Nous pouvons observer cela au travers de la troisième interaction du deuxième groupe retranscrite ci-dessus. Au cours de celle-ci, l'enseignante demande explicitement de noter, d'écrire, de dessiner les ballons dont les élèves ont besoin (afin qu'ils ne les oublient pas). Autrement dit, elle prend en charge des éléments de la résolution de la tâche pour éviter une surcharge cognitive. Nous remarquons ici l'importance des procédures dans les actions de l'enseignante. Effectivement, elle part de la procédure (échanger des informations oralement à tour de rôle) et réduit les degrés de liberté des élèves, en les orientant vers l'action de noter. Ainsi, le groupe fait évoluer sa procédure en y incluant la trace écrite.

Tout au long de l'activité, les élèves des deux groupes sont donc guidés par cet étayage. Leur agir est impacté en conséquence. Ils mettent alors en place deux procédures distinctes suite à ce type d'interventions : la distribution de la parole (un élève parle à la fois) qui leur permet donc de comprendre le fonctionnement de la modalité sociale de travail, et la trace écrite dans le but de se souvenir des informations récoltées et donc de permettre la mémoire. Ce dernier élément est mis en place par les élèves du deuxième groupe après la troisième intervention de l'enseignante.

| Volontés de l'enseignante<br>(Selon les six fonctions de Bruner (1983) | Groupe 1 | Groupe 2 | Collectif | Total |
|---|---|---|---|---|
| Enrôlement dans la tâche | / | / | 1x | 1x |
| Réduction des degrés de liberté | 1x | 3x | / | 4x |
| Maintien de l'orientation | 2x | 1x | / | 3x |
| Signalisation des caractéristiques déterminantes | 1x | 2x | 1x | 4x |
| Contrôle de la frustration | / | / | / | / |
| Démonstration | / | / | / | / |

Fig. 3 : Analyse des interactions, fonctions de l'étayage de Bruner (1983)

L'enseignante intervient à quatre reprises pour signaler les caractéristiques déterminantes de la tâche, à savoir les couleurs et les formes des ballons. Au cours de la première interaction du deuxième groupe, l'enseignante utilise deux des fonctions de l'étayage décrites par Bruner (1983), dont la signalisation des caractéristiques déterminantes de la tâche. En effet, lorsque l'enseignante demande à l'élève ayant Bruno de préciser les ballons qui figurent sur sa feuille, elle met l'accent sur le fait que, ce qui doit être pris en compte dans ce problème, ce sont les formes et les couleurs des ballons. Ainsi, elle permet aux élèves de se rendre compte des informations données par l'énoncé ou trouvées par le groupe. A la suite de ce genre d'interventions, les élèves doivent faire preuve de réflexivité par rapport à leur avancée dans la résolution de l'activité : quelles informations ont-ils déjà à disposition ? Leur stratégie leur permet-elle de trouver de nouvelles informations les menant à la résolution du problème ? Nous remarquons donc l'importance des procédures pour l'enseignante. En effet, une nouvelle fois, elle part d'une des procédures des élèves et en signalant les caractéristiques déterminantes de la tâche, elle leur permet de faire preuve de réflexivité et ainsi de faire évoluer leur procédure.

Il est également pertinent de noter que l'enseignante intervient à trois reprises pour maintenir l'orientation des élèves dans la résolution de la tâche. Elle le fait lorsque les élèves s'égarent et ne s'intéressent plus à la tâche ou encore lorsqu'ils présentent un résultat final erroné, qui ne correspond à ce qu'ils ont noté sur leur feuille. Dans ces cas précis, elle attire l'attention des élèves sur leur procédure ou sur les informations qu'ils sont déjà parvenus à trouver. Par conséquent, l'agir des élèves est impacté. Les élèves restent motivés concernant la tâche grâce à l'intervention de l'enseignante.

L'enseignante ne fait à aucun moment appel, ni au contrôle de la frustration, ni à la démonstration. La démonstration est une fonction d'étayage qui nécessite d'être envisagée avec une certaine prudence, dans la mesure où une enseignante qui présente des modèles de solution à un élève peut avoir tendance à « faire à la place de » l'élève. Nous comprenons que l'enseignante souhaite, par ses interactions, questionner les élèves, privilégier la remise en question, plutôt que la démonstration, ce qui appuie la contextualisation de sa pratique qui est centrée autour des procédures.

## Résultats

En analysant les interactions des deux groupes selon la théorie de Kiwan et Roditi (2019), nous nous apercevons que la pratique de cette enseignante se centre autour des procédures. En effet, comme constaté précédemment, 77,7% des interventions partent ou débouchent sur des procédures. En outre, nous avons également analysé les interventions de l'enseignante selon les six fonctions de l'étayage de Bruner (1983). Il parait alors pertinent de préciser que ces deux analyses sont étroitement liées.

Effectivement, l'enseignante intervient quatre fois au travers de la réduction des degrés de liberté. Ces interventions permettent aux élèves de faire évoluer leur procédure. Ainsi, ils mettent en place une répartition de la parole (les membres du groupe s'expriment à tour de rôle) ou une trace écrite, afin de se souvenir des informations récoltées. Ce type d'interventions, réduisant les degrés de liberté, aboutit donc à une prise de conscience du fonctionnement de la modalité sociale de travail ou de la mémoire.

En outre, l'enseignante intervient quatre fois au travers de la signalisation des caractéristiques déterminantes. Par cet étayage, elle montre aux élèves les éléments importants à prendre en compte pour la réalisation de la tâche. Ainsi, ceux-ci font preuve de réflexivité par rapport à leur propre procédure et à son efficacité.

Finalement, l'enseignante intervient trois fois afin de maintenir l'orientation des élèves dans la tâche. Autrement dit, elle les encourage dans leur procédure, si celle-ci semble être efficace ou leur propose des pistes pour la faire évoluer afin qu'elle devienne efficiente. Elle permet ainsi aux élèves de rester motivés au cours de l'activité.

Pour conclure, au travers de ces résultats, nous remarquons que les interventions de l'enseignante, centrées autour des procédures, ont des conséquences sur l'agir des élèves et plus particulièrement, dans le cadre de cette activité, sur quatre catégories distinctes : le fonctionnement de la modalité sociale de travail, la mémoire, la réflexivité et la motivation des élèves.

## Conclusion

Avec cette recherche, nous mettons en évidence le type de pratique d'une enseignante, selon la théorie de Kiwan et Roditi (2019). Ainsi, nous remarquons que celle-ci centre ses interventions autour des procédures des élèves et celles à mettre en place. Nous avons également classé ces interventions selon les six catégories de l'étayage de Bruner (1983). Grâce à cette double analyse, nous en déduisons que les interventions de cette enseignante, centrées autour des procédures, impactent l'agir des élèves selon quatre catégories distinctes : le fonctionnement de la modalité sociale de travail, la mémoire, la réflexivité et la motivation des élèves.

À partir de ces résultats, nous pensons à des prolongements possibles. Premièrement, il pourrait être pertinent d'analyser la pratique de plusieurs enseignantes (selon les deux théories utilisées) et d'observer si les catégories de l'agir des élèves se modifient ou si elles restent semblables. Nous pourrions alors distinguer les différents types de pratiques et leurs effets sur les élèves.

Secondement, nous avons ici observé la pratique et les interactions de l'enseignante avec des groupes d'élèves hétérogènes (élèves de 2H et élèves de 3H). Il nous semblerait également pertinent d'observer les interventions de cette enseignante avec des groupes d'élèves homogènes. La pratique de l'enseignante se centre-t-elle toujours sur les procédures si nous l'analysons avec la théorie de Kiwan et Roditi (2019) ? L'enseignante intervient-elle avec la même occurrence dans les catégories de l'étayage de Bruner (1983) ?

Quels impacts ont ces changements sur l'agir des élèves ? Ces questions nous permettraient de comparer la pratique d'une enseignante face à des groupes d'élèves homogènes et face à des groupes d'élèves hétérogènes.

Finalement, étant étudiantes en Sciences de l'éducation, afin de devenir enseignantes, nous pourrions analyser notre propre pratique. Nous pourrions ainsi observer les tendances de notre enseignement et les effets de celles-ci sur l'agir des élèves. Il pourrait également être pertinent d'anticiper le type d'interactions à mener, afin de favoriser une réaction précise de la part des élèves en fonction du type de tâche et de son dessein au niveau des apprentissages.

## BIBLIOGRAPHIE

Briand, J. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, 66,* 7-22.

Bruner, J.-S. (1983). *Le développement de l'enfant : Savoir faire, savoir dire.* Paris : Puf.

Kiwan-Zacka, M. & Roditi, E. (2019). Régulations et pratiques enseignantes. Dans M. Aboud (dir.), *Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1015-1023). Paris : IREM de Paris.

Terwagne, S. (2002). Chapitre 3. L'organisation de la classe au service d'un enseignement interactif de la lecture/écriture. Dans T. Nault (dir.), *La gestion de la classe* (pp. 63-83). Louvain-la-Neuve, Belgique : De Boeck Supérieur. https://doi.org/10.3917/dbu.fijal.2002.01.0063"

# DES DONNEES PROBANTES AU SERVICE DE L'ENSEIGNEMENT DIFFERENCIE DES MATHEMATIQUES

Noémie Lacombe et Anne-Françoise de Chambrier, Thierry Dias

Université de Fribourg, Département de Pédagogie Spécialisée et Haute Ecole Pédagogique du Canton de Vaud

Mots clés : interventions en mathématiques, difficultés d'apprentissage, dyscalculie, revue de littérature, données probantes

Ces vingt dernières années, l'augmentation significative des recherches dans l'enseignement des mathématiques et particulièrement auprès d'élèves en difficultés a permis l'émergence de plusieurs revues systématiques et méta-analyses recensant les interventions efficaces. Cependant à ce jour, peu d'articles en proposent un aperçu pour un lectorat francophone. L'objectif du présent article est donc d'effectuer une revue des revues existantes afin de fournir aux enseignant·e·s un aperçu des démarches et des outils efficaces en matière d'enseignement des mathématiques pour les élèves en difficultés. Sept pistes d'intervention sont détaillées : l'enseignement explicite, les feedbacks, l'enseignement de stratégies, la verbalisation par l'élève de son raisonnement, l'inclusion d'exemples, de représentations visuelles et matérielles dans les tâches et le tutorat par les pairs.

## INTRODUCTION

La maîtrise des concepts mathématiques fondamentaux est cruciale pour la qualité de vie et la participation sociale des individus. Elle leur permet de gérer les situations de la vie quotidienne et de résoudre des problèmes dans des contextes réels. Les compétences mathématiques que les enfants acquièrent influencent non seulement leur réussite scolaire mais aussi leur future intégration socioprofessionnelle. Il a par exemple été démontré que les compétences en mathématiques mesurées en début d'école primaire sont le plus fort prédicteur de la réussite scolaire ultérieure (Duncan et al., 2007) et qu'elles sont positivement associées au statut socio-économique des individus à 42 ans (Ritchie & Bates, 2013). Certaines études vont même jusqu'à montrer des corrélations entre la rencontre de difficultés dans l'apprentissage des mathématiques et une basse estime de soi, des risques de difficultés dans la recherche d'emploi ou des difficultés économiques (Every Child a Chance Trust, 2009).

Ces deux dernières décennies, le domaine de l'enseignement des mathématiques et celui de l'aide aux élèves rencontrant des difficultés d'apprentissage ont beaucoup évolué. Plusieurs commissions d'experts se sont attachées à établir des recommandations didactiques et pédagogiques visant à hausser le niveau moyen des élèves dans ce domaine (Cnesco, 2015 ; Dias, 2019 ; NCTM, 2006 ; NMAP, 2008 ; NRC, 2009 ; Villani & Torossian, 2018) et différentes méta-analyses ou revues ont été conduites au sujet des pratiques pédagogiques les plus à même d'améliorer les performances des élèves y rencontrant des difficultés (i.e., Baker, Gersten & Lee, 2002 ; Chodura et al., 2015 ; Gersten, Chard et al., 2009). Ces travaux témoignent d'un intérêt grandissant pour le courant dit de l'enseignement fondé sur des preuves (*evidenced-based education*), et ce spécialement à l'intention des élèves « pour qui l'école doit faire une différence », c'est-à-dire pour les élèves à risque d'échec scolaire (Bissonnette et al., 2020, p.2).

L'enseignement fondé sur des preuves fait référence à des pratiques pédagogiques dont l'efficacité a été démontrée par des procédés scientifiques spécifiques, dits méthodes expérimentale ou quasi-expérimentale (Slavin, 2020). Celles-ci consistent à comparer les apprentissages réalisés par différents groupes d'élèves, généralement un groupe expérimental (bénéficiant de la pratique pédagogique à l'étude) et un groupe contrôle (poursuivant souvent les pratiques habituelles). Les compétences des élèves doivent y être évaluées de manière objective par des instruments de mesure valides, prenant généralement la forme de tests standardisés. Afin de pouvoir comparer ce qui est comparable, les élèves des deux groupes doivent être initialement équivalents sur les variables les plus pertinentes et la pratique pédagogique dispensée dans le groupe expérimental doit être suffisamment similaire envers tous les élèves composant ce groupe. Si dans ces conditions il s'avère que les progrès du groupe expérimental sont statistiquement plus importants que ceux du groupe contrôle, alors la pratique en question est considérée comme prometteuse. Si ce résultat est répliqué à travers d'autres études et que l'effet de la pratique en question ressort comme significatif dans une méta-analyse, alors la pratique est considérée comme fondée sur des preuves.

Dans le monde anglophone, plusieurs modèles ou organismes plébiscitent le recours à des méthodes d'enseignement ayant fait leurs preuves. De nombreuses études scientifiques sont consacrées à l'évaluation des effets de programmes sur les apprentissages des élèves, et des organismes répertorient ceux qui sont validés scientifiquement. Des exemples de ce genre d'initiatives sont le modèle dit de *Réponse à l'Intervention* (Fuchs & Fuchs, 2006) ou le *Système de Soutien à Paliers Multiples* (Burns, et al., 2016 ; Desrochers & Guay, 2020). Bien implémentés en Amérique du Nord, ils ont pour fondements mêmes l'utilisation de pratiques pédagogiques efficaces ainsi que l'évaluation objective des progrès des élèves, ce dans le but de dispenser rapidement à ceux qui en ont besoin des interventions plus intensives et ciblées. Des organismes comme la *What Works Clearing House* ou la *Best Evidence Encyclopedia* aux États-Unis, ou la *Education Endowment Foundation* au Royaume-Uni, répertorient par ailleurs les programmes et interventions pédagogiques fondés sur des données probantes.

Si ce type de travaux sont désormais incontournables, il convient toutefois de relever quelques-unes de leurs limites. Premièrement, les apprentissages sur lesquels se penchent ce type de travaux sont par définition ceux qui peuvent être mesurés de manière objective et standardisée. Ceci est généralement davantage le cas pour des connaissances déclaratives ou procédurales (compétences en arithmétique ou en numération, exactitude en résolution de problème, …) que pour d'autres compétences qu'il importe également de développer chez les élèves (raisonnement, créativité, plaisir…) (Vincent, 2018). Deuxièmement, si les pratiques pédagogiques dispensées dans ce type de travaux doivent être relativement protocolaires à des fins de comparaison scientifique, elles méritent souvent d'être plus souples ou plus adaptées au cas par cas lorsqu'il s'agit de les mettre en œuvre dans un contexte naturel de classe (Paré & Prud'Homme, 2014). Enfin, il faut également être conscient que parfois, des pratiques ne sont pas fondées sur des preuves simplement parce que leur efficacité n'a pas (encore) été testée de façon (quasi)expérimentale. Les connaissances au sujet des pratiques pédagogiques fondées sur des preuves doivent donc toujours être rapportées aux avancées scientifiques contextuelles.

Étant donné que les enseignant·e·s régulier·ère·s ont souvent dans leurs classes des élèves rencontrant des difficultés en mathématiques, le présent article vise à mettre à leur disposition l'état actuel des connaissances en matière de pratiques d'enseignement à privilégier pour faire progresser efficacement ces élèves. Cette étude fait suite à la récente élaboration d'une brochure d'information sur la dyscalculie et sur les mesures de différenciation pédagogique à destination des enseignant·e·s (CSPS, 2020) et vise à prolonger les pistes pouvant leur être utiles.

## MÉTHODE

Afin d'avoir une vue exhaustive et récente des données probantes issues de la recherche, une recherche d'articles a été effectuée dans les bases de données suivantes : Ovidsp (ERIC, Psychinfo, Medline), Web of Science et Google-scholar. L'équation de recherche suivante a été utilisée : mathematics OR mathematics achievement OR mathematics education AND primary school AND learning difficulties OR dyscalculia OR number difficulty OR low achievement OR at risk, OR MLD OR mathematical learning disorder/disability AND Intervention OR training OR treatment OR Instruction AND meta-analysis OR literature review. Les articles publiés jusqu'en mai 2021 ont été pris en compte.

Cette équation a permis d'identifier 12 articles sur Web of Science, 47 sur Ovidsp et 10 à partir de Google-scholar (en consultant aussi les articles cités par certains articles trouvés). Les 10 revues de littérature ou méta-analyses (critère 1) portant sur les interventions en mathématiques (critère 2) auprès d'élèves en difficultés[1] (critère 3) de l'école primaire (les revues contenant des études menées à la fois à l'école primaire et à l'école secondaire ont été retenues) (critère 4) et disponibles en anglais ou en français (critère 5) ont été conservées (*cf.* détail présenté dans la Figure 1). Les 10 articles retenus ont ensuite été codés à l'aide d'une grille répertoriant le nombre d'études recensées après l'application des critères d'inclusion et d'exclusion des revues, le nombre total de participant·e·s et leur degré scolaire, les interventions mesurées ainsi que les principaux résultats. L'ensemble des interventions répertoriées sont citées dans la figure 2.

Tous les articles sélectionnés sont soit des revues systématiques de littérature, répertoriant de manière rigoureuse les études empiriques répondant à la question de l'efficacité des interventions pour les élèves en difficultés mathématiques, soit des méta-analyses, synthétisant de manière statistique les résultats des études répertoriées en calculant les tailles d'effet des interventions mesurées.

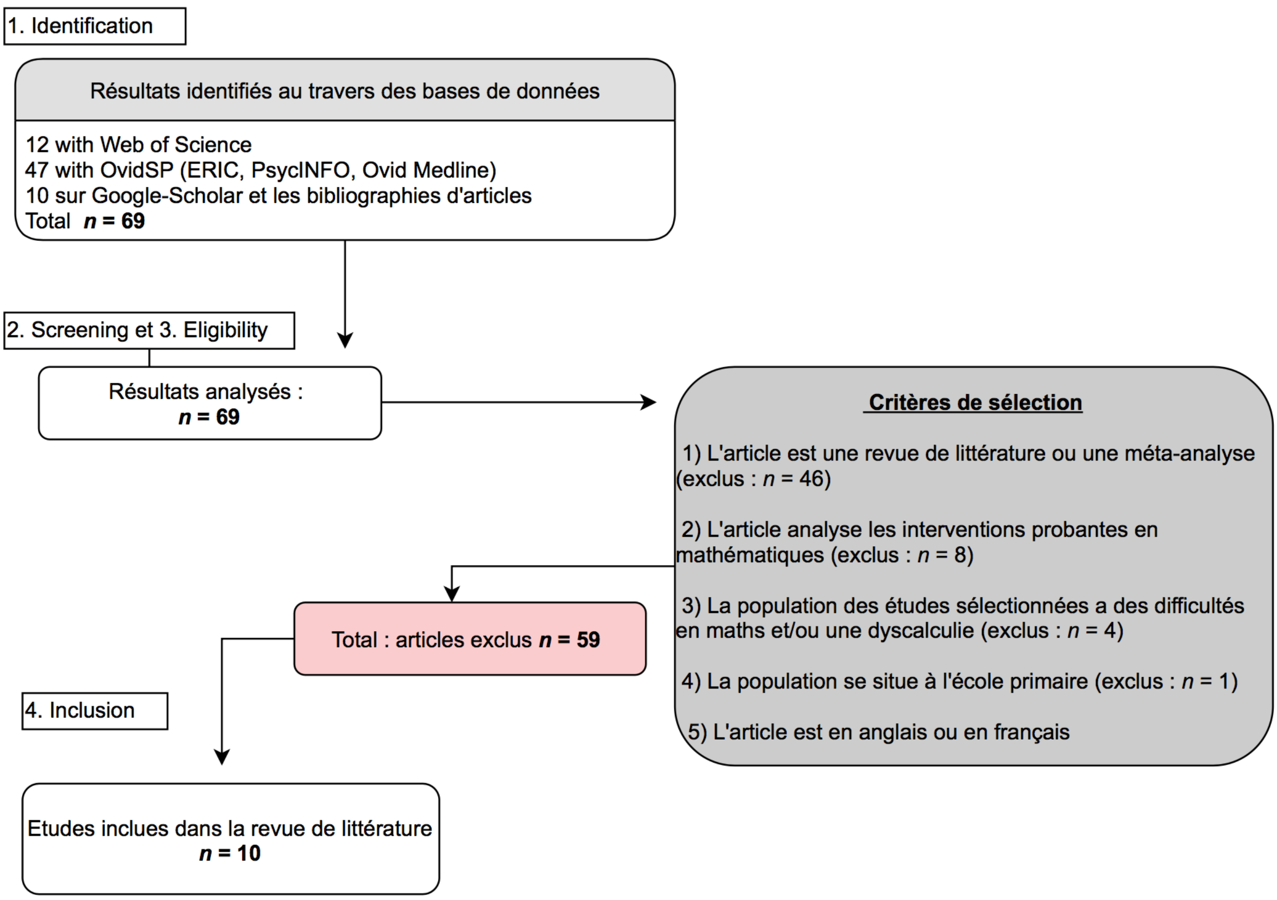



Fig. 1 : Processus de sélection des revues de littérature ou méta-analyses portant sur des interventions probantes en mathématiques chez les élèves en difficultés du primaire

[1] Par difficultés, on entend ici des retards d'apprentissage plus ou moins importants en dépit d'une intelligence dans la norme, incluant tant des élèves "peu performants" (low achievers) que dyscalculiques/présentant un trouble spécifique d'apprentissage en mathématiques (dyscalculia/mathematical learning disorder/disability).

## RÉSULTATS : PISTES PÉDAGOGIQUES BASÉES SUR DES DONNÉES PROBANTES POUR INTERVENIR AUPRÈS DES ÉLÈVES EN DIFFICULTÉS

Pour plus de lisibilité, cette partie est divisée en sous-parties d'après les résultats de la méta-analyse de Gersten, Chard et al. (2009). Les catégories de cette méta-analyse ont été choisies parce qu'elles fournissent une liste d'interventions complète et détaillée, mais aussi parce qu'elles sont applicables en classe quel que soit le thème mathématique abordé. A partir des résultats de 42 études ayant mesuré des interventions en mathématiques auprès d'élèves en difficultés, ces auteurs proposent sept catégories d'intervention efficaces : (1) l'enseignement explicite, (2) les feedbacks, (3) l'enseignement de stratégies (utilisation d'heuristiques), (4) l'utilisation de représentation visuelles et matérielles, (5) la verbalisation par l'élève de son raisonnement mathématique, (6) la proposition d'une gamme d'exemples et (7) le tutorat par les pairs. Ces sept catégories sont donc explicitées dans le présent article (les deux premières ont été regroupées) et enrichies avec les données des revues et des méta-analyses plus récentes. Des exemples pratiques de mise en application des interventions probantes sont également proposés. Ces exemples sont soit directement issus des études répertoriées dans les revues ou méta-analyses considérées, soit correspondent à des pistes équivalentes recommandées existant en français.

Dans cette revue de littérature, le terme "intervention" fait spécifiquement référence aux pratiques pédagogiques particulières dispensées au groupe expérimental pendant un temps donné et dont les effets sont mesurés de manière objective par rapport aux progrès réalisés par les élèves du groupe contrôle. En classe, plutôt que de devoir attester expérimentalement de l'efficacité de pratiques pédagogiques circonscrites, l'enseignant·e peut faire bénéficier tous ses élèves de différentes pratiques identifiées par la recherche comme étant efficaces, ce pour plusieurs domaines mathématiques simultanément. Il jouit ainsi d'une liberté beaucoup plus grande que celle offerte dans les protocoles de recherche.

Le tableau ci-dessous présente les études sélectionnées dans la revue de littérature.

| Auteurs | Année<br>N Etudes | Description des Interventions mesurées | Effect size[2] |
|---|---|---|---|
| Baker, Gersten & Lee (2002) | 1971-1999<br>15 études<br>Revue | 1) Enseignement explicite<br>2) Feedback<br>3) Tutorat par les pairs<br>4) Evaluation par les pairs<br>5) Recours aux parents pour soutenir l'enseignement | |
| Kroesbergen & Van Luit (2003) | 1985-2000<br>58 études<br>Méta-analyse | 1) Enseignement direct (explicite) « direct instruction »<br>2) Auto-enseignement «self instruction»<br>3) Enseignement assisté «assisted performance» | 1.13<br>1.77<br>0.52 |
| Kunsch et al. (2007) | 1978-2006<br>17 études<br>Méta-analyse | 1) Tutorat par les pairs | *M*: 0.47 de -0.01 à 0.79 |

[2] En recherche, la taille d'effet est souvent mesurée par le *d* de Cohen. Cet indice indique un effet faible autour de 0.2, moyen autour de 0.5, élevé autour de 0.8 et très élevé autour de 1.20. Il est présent uniquement dans les méta-analyses

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gersten, Chard et al. (2009) | 1971-2007<br>42 études<br><br>Méta-analyse | 1) Enseignement explicite<br>2) Enseignement par heuristique (stratégies)<br>3) Verbalisation par l'élève<br>4) Exemple<br>5) Représentations visuelles et matérielles<br>6) Feedback<br>7a) Tutorat par les pairs (plus âgés)<br>7b) Tutorat par les pairs (de même âge) | 1.22<br>1.56<br>1.04<br>0.82<br>0.47<br>0.23<br>1.02<br>0.14 |
| Gersten, Beckmann et al. (2009) | Rapport des revues | Propose 8 recommandations en terme d'intervention dont :<br>2) Enseignement explicite / Verbalisation / Feedback<br>3) Enseignement de stratégies<br>4) Utilisation de représentations visuelles et matérielles | |
| Zheng, Flynn & Lee Swanson (2012) | 1986-2009<br>15 études<br><br>Revue | 18 critères de codage dont :<br>5) Enseignement explicite<br>10) Verbalisation, questionnement de l'élève<br>11) Feedback (renforcement positif)<br>15) Enseignement de stratégies<br>16) Recours aux parents pour soutenir l'enseignement<br>18) Technologie (ordinateur) | |
| Chodura, Kuhn & Holling (2015) | … - 2013<br>35 études<br>Méta-analyse | 1) Enseignement direct (explicite) « direct instruction »<br>2) Enseignement par stratégies « strategy instructions »<br>3) Enseignement assisté « assisted performance » | de -0.34 à 0.99<br>de 0.31 à 2.36<br>de -0.17 à 5.09 |
| Monei & Athena (2017) | 2004-2014<br>11 études<br>Revue | 1) Enseignement par stratégies<br>2) Utilisation de l'ordinateur (enseignement assisté)<br>3) Interventions neuropsychologiques | - |
| Stevens, Rodgers & Powell (2017) | 1990-2015<br>25 études<br>Méta-analyse | 1) Intervention de l'enseignant·e<br>2) Intervention de l'ordinateur<br>3) Intervention des chercheurs<br>a) Enseignement explicite<br>b) Enseignement de stratégies | *M* : 0.49 |
| Krawec & Steinberg (2019) | 2000-2019<br>5 études<br>Revue | a) Approche pédagogique fondée sur l'investigation (inquiry-based instruction) | |

Note : M = moyenne

Fig. 2 : Présentation des études sélectionnées

## Enseignement explicite et feedbacks

Dans plusieurs méta-analyses, un enseignement explicite ressort comme un type d'enseignement à privilégier avec des élèves rencontrant des difficultés (Baker, Gersten, & Lee, 2002 ; Gersten, Chard et al., 2009 ; Monei & Athena, 2017). L'effet moyen de ce type d'enseignement est très important ($d$ = 1.22) dans la méta-analyse de Gersten, Chard et al. (2009). L'enseignement explicite – parfois qualifié aussi de direct, systématique ou structuré – se caractérise par une forme d'enseignement dans laquelle les compétences à faire acquérir aux élèves sont fortement guidées par l'enseignant·e. Celui·celle-ci montre aux élèves une nouvelle habileté ou stratégie à acquérir, puis les invite à la mobiliser de manière guidée, pour ensuite les laisser la pratiquer de manière autonome. La progression dans les apprentissages est organisée par étapes séquencées et intégrées de complexité progressive. Les prérequis de tel apprentissage sont introduits avant celui-ci, qui constitue lui-même le prérequis d'un apprentissage ultérieur, et ainsi de suite. Cette démarche d'enseignement est généralement présentée comme opposée à la théorie de l'apprentissage socio-constructiviste, dans laquelle le guidage de l'enseignant·e tend à être minimal et les situations au départ des apprentissages d'emblée complexes (Bissonnette et al., 2010).

Une autre caractéristique phare de l'enseignement explicite réside dans les feedbacks (rétroactions) qui sont fournis aux élèves de manière systématique. Les feedbacks sont un retour sur une performance ou un effort lié ou non à un objectif spécifique. Ils peuvent être donnés par l'enseignant·e, par un pair ou par un logiciel informatique. Ils revêtent une importance particulière, constituant à eux seuls une catégorie de pratiques probantes dans la méta-analyse de Gersten, Chard et al. (2009) ($d$ = 0.23). Les feedbacks donnent une indication à l'élève sur le caractère correct ou non de ses productions ou sur son investissement, permettant ainsi de le·la renforcer positivement, de le·la responsabiliser et de l'aider à rester engagé dans l'apprentissage (Gersten, Chard et al., 2009).

Dans la littérature, il existe de nombreux exemples d'interventions ayant visé à enseigner explicitement des compétences mathématiques et s'étant avérées efficaces. L'étude de Koponen et al. (2018) a par exemple porté sur l'enseignement de stratégies arithmétiques lors de la résolution d'additions simples auprès d'élèves de la 4H à la 6H ayant de faibles compétences en calculs. Les enseignant·e·s entraînent les élèves à découvrir, à comprendre et à automatiser de nouvelles stratégies arithmétiques selon un protocole pré-établi[3]. Durant les séances, les enseignant·e·s modèlent les stratégies, mettent clairement en évidence les liens numériques entre les calculs, encouragent les élèves à identifier différentes stratégies possibles et à choisir celles qui leur conviennent le mieux. Il·elle·s leur donnent également de nombreuses occasions d'automatiser et de réviser les stratégies acquises.

Notons que dans la méta-analyse de Kroesbergen et Van Luit (2003), si l'enseignement explicite s'est avéré particulièrement efficace pour des habiletés de base de ce type ($d$ = 0.91), son prolongement qu'est l'enseignement d'une démarche d'auto-questionnement a montré un bénéfice plus élevé pour la résolution de problèmes ($d$ = 1.45). Celle-ci consiste à modeler la tâche en contexte et à fournir aux élèves des indices verbaux formulés sous forme d'indications et de questions, de manière à les aider à se rappeler ce qu'ils doivent faire et à développer des stratégies cognitives et métacognitives.

## Enseignement de stratégies (utilisation d'heuristiques)

L'utilisation d'heuristiques par l'enseignant·e apparaît, dans la méta-analyse de Gersten, Chard et al. (2009), comme l'intervention la plus efficace ($d$ = 1.56). L'utilisation d'heuristique consiste à proposer à l'élève une méthode ou une stratégie pour résoudre un problème ou pour comprendre un concept. Cette intervention a pour but de fournir aux élèves des outils et des techniques qu'ils peuvent ensuite utiliser

[3] Il s'agit du programme d'intervention SELKIS (Koponen et al., 2011). Sont d'abord entraînés les calculs de type $n$ + 1 et $n$ + 2 et le principe de commutativité, puis les calculs de type 5 + 1/2/3/4/5 et la décomposition des nombres de 6 à 9, ensuite les compléments de 10 et leurs dérivés, etc.

pour comprendre et apprendre de nouveaux contenus (Monei & Athena, 2017). Relevons que ces techniques d'enseignement sont souvent citées dans les travaux de didactique des mathématiques notamment suite à la publication de l'ouvrage référent *How to solve it* de Polya (1945). Dans le cadre de la résolution de problèmes, nous pouvons citer ici quelques éléments relatifs à ces heuristiques: proposer une liste d'étapes de résolution, donner une méthode pour organiser les informations selon leur degré d'importance, ou encore mettre en évidence les mots importants d'une consigne.

Bien que proche l'une de l'autre, l'intervention heuristique se distingue de l'enseignement explicite par le caractère généralisable de la stratégie donnée, tandis que dans l'enseignement explicite la méthode est contextuelle et liée à un problème en particulier (Gersten, Chard et al., 2009). L'enseignement des heuristiques vise également à exposer l'élève à plusieurs manières de résoudre une tâche en incluant un discours, une réflexion et une rétroaction explicite liée à l'utilisation et à la performance de la stratégie choisie (Gersten, Chard et al., 2009; Monei & Athena, 2017). Monei et Athena (2017) mettent en évidence que dans les 11 études retenues pour leur revue systématique, l'utilisation d'heuristiques auprès des élèves dyscalculiques est appropriée, efficace et centrée sur l'élève. Chodura et al. (2015) confirment ces constatations dans leur méta-analyse, tout en montrant que la taille d'effet de ce type d'intervention va de 0.31 à 2.36. Germain Colombiès et Lafay (2021) relèvent que l'intérêt particulier de l'enseignement de stratégies est d'améliorer les performances des élèves en automatisant une stratégie choisie, ce qui permet de soulager la mémoire de travail et de rendre la planification de la tâche plus fluide et plus organisée. Elles observent également dans les études sélectionnées une augmentation de la motivation des élèves les plus en difficulté.

Au niveau des différents domaines mathématiques, l'enseignement de stratégies semble particulièrement efficace pour la résolution de problèmes, pour l'apprentissage du calcul et l'acquisition du concept de nombre. Dans leur revue de littérature, Monei et Athena (2017) montrent par exemple qu'un entraînement individualisé de stratégies de calcul mental et écrit permet une amélioration significative des performances chez les élèves. Dans la méta-analyse de Chodura et al. (2015), l'enseignement des stratégies relatives aux compétences arithmétiques de base semble particulièrement efficace chez les élèves en difficultés. Finalement, dans leur rapport de recommandations (NCEE), Gersten, Beckman et al. (2009) proposent d'enseigner les stratégies permettant d'identifier différents types de problèmes afin de renforcer la compréhension de ceux-ci et de déterminer une méthode de résolution adaptée à leur structure sous-jacente (Fig. 3).

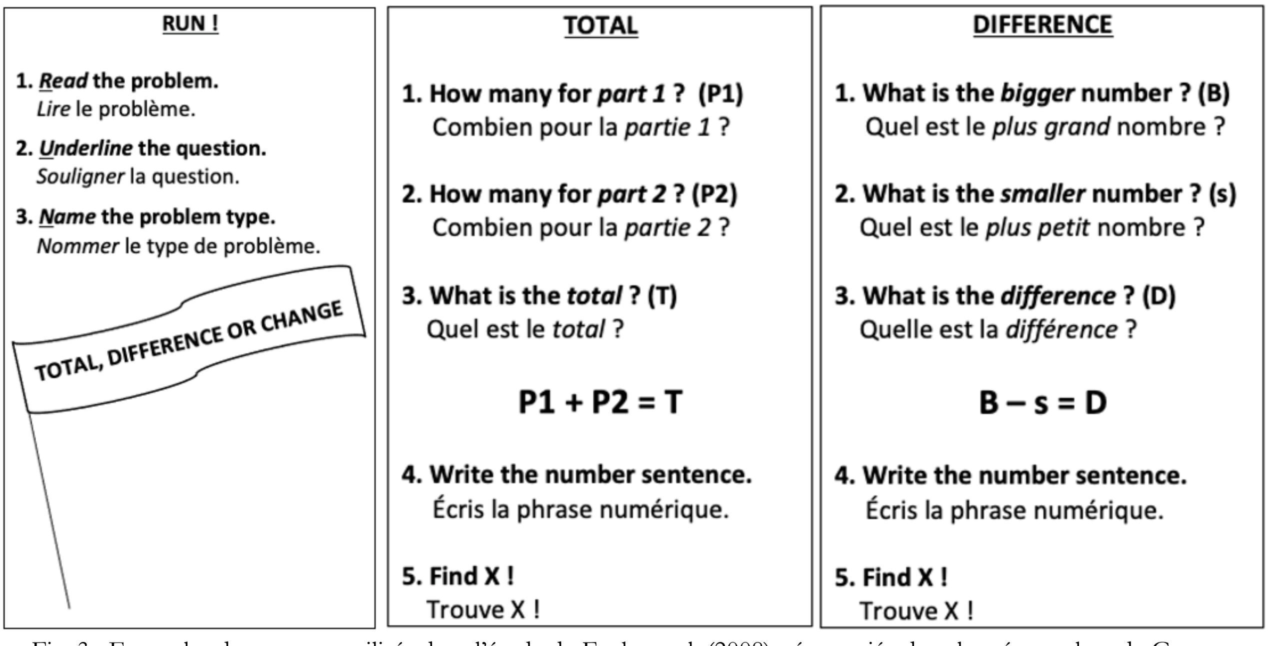



Fig. 3 : Exemples de supports utilisés dans l'étude de Fuchs et al. (2008), répertoriée dans la méta-analyse de Gersten, Beckman et al. (2009), pour enseigner aux élèves à reconnaître trois types de problèmes ainsi que des méthodes de résolution adaptées

## Utilisation de représentations visuelles et matérielles

Dans la méta-analyse de Gersten, Chard et al. (2009), les représentations visuelles et matérielles (par exemple lors de la résolution de problèmes) sont présentées comme des outils à la fois pour communiquer, mais aussi pour penser. Elles permettent aux concepts mathématiques d'être rendus visibles, extériorisés et partagés. Elles aident à clarifier les idées de manière à soutenir le raisonnement et à développer la compréhension. Germain Colombiès et Lafay (2021) montrent dans leur revue systématique que toutes les études qui testent l'utilisation de représentations visuelles obtiennent un effet immédiat sur la réussite en résolution de problèmes. L'amélioration des performances des élèves continue même après l'intervention car l'utilisation de schémas facilite la généralisation. De plus, pour ces auteurs, l'utilisation de représentations visuelles améliore directement la compréhension conceptuelle des élèves. Pour Gersten, Beckman et al. (2009), la capacité à exprimer des idées mathématiques grâce à des représentations visuelles et matérielles, tout comme la capacité à convertir ensuite ces représentations en symboles, sont essentielles à la réussite en mathématique. L'une des conditions de réussite de cette intervention repose donc sur l'explicitation du lien entre les représentations visuelles ou matérielles et les représentations symboliques utilisées en mathématiques. Dans leur rapport de recommandations (NCEE), Gersten, Beckman et al. (2009) donnent comme exemple le recours à la ligne numérique ainsi que l'utilisation de tableaux, de graphiques, de dessins et de matériel concret (par exemple pour la représentation de la base 10). La Fig. 4 est l'un des exemples proposé dans leur synthèse qui illustre le passage entre du matériel concret, des représentations visuelles puis des symboles abstraits pour la résolution d'une équation simple.

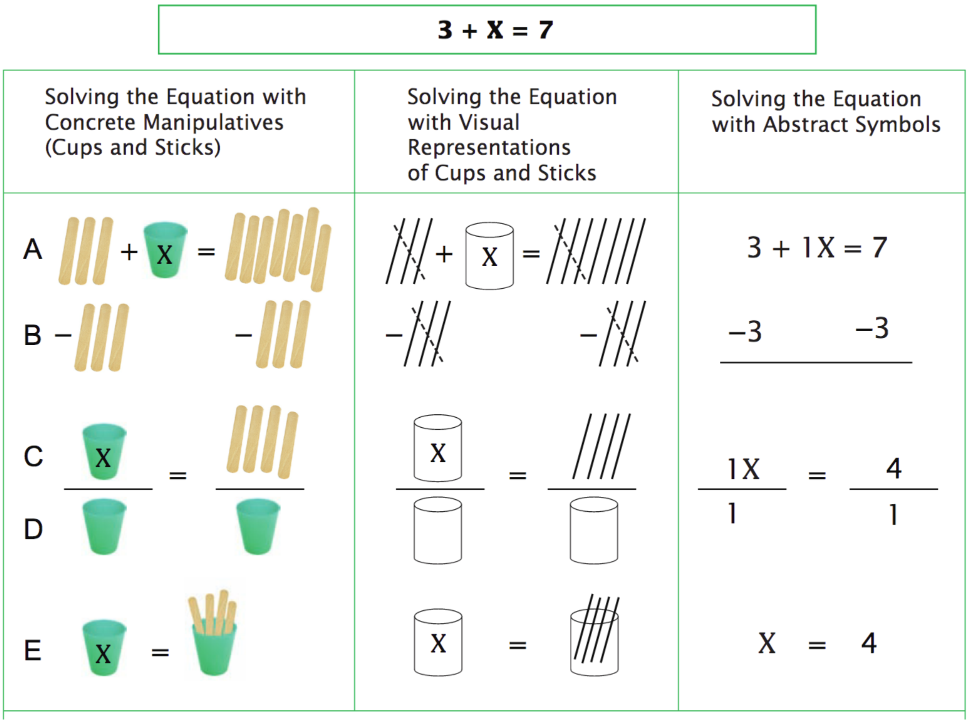



Fig. 4 : Passage d'une représentation matérielle à une représentation symbolique (Gersten, Beckman et al. 2009)

Les exemples suivants proviennent de ressources existant en français qui recourent également à des représentations matérielles et visuelles :

a) Des problèmes en images : Beugin et Winkopp (1950) ont par exemple créé des cartes illustrant des problèmes sous la forme d'images, avec très peu de texte. L'élève doit principalement observer et prendre des indices visuels pour ensuite réaliser des opérations (Fig. 4).

b) La méthode Archimaths[4] (Bolsius et al., 2019) propose quant à elle, lors de chaque début de période, un défi sous forme visuelle (BD, images, …) qui propose une diversité de représentations susceptibles d'aider les élèves à comprendre le problème (Fig. 5). Cela permet également de mettre en scène et en lien différents éléments de connaissance qui seront travaillés par la suite.

c) La méthode heuristique[5] (Pinel, 2019), reprenant pour partie l'approche CPA (*Concrete-Pictural-Abstract*, Leong et al., 2015), propose un travail à partir du concret, puis du pictural (représentation en images) puis un passage à l'abstraction pour aborder les concepts mathématiques.

d) Enfin, dans la méthode M@thsenvie[6] les activités proposées (de la 1H à la fin de l'école obligatoire) proposent différents supports visuels et matériels (p. ex. photos, vidéos) contenant des éléments mathématiques que l'élève devra extraire pour résoudre le problème.

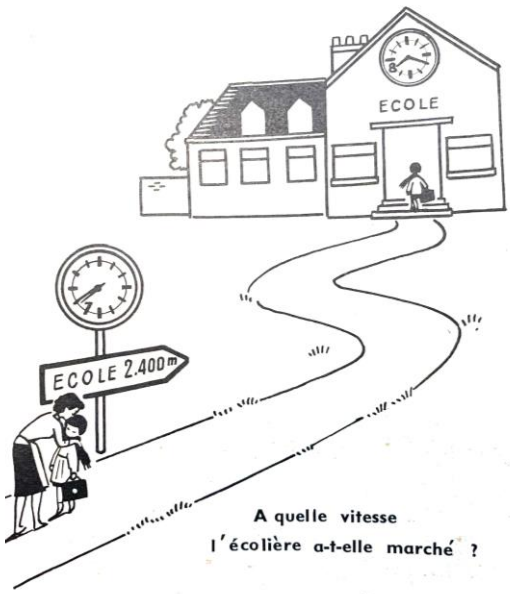



Fig. 5 : Les problèmes en images (Beugin & Winkopp, 1950)


Fig 6 : Exemple de "défis" en images ouvrant un chapitre dans la méthode "Archimaths" (CP) - (Bolsius *et al.*, 2019, p.8)

[4] http://archimaths.site.magnard.fr

[5] https://methodeheuristique.com

[6] www.mathsenvie.fr

## Verbalisations par les élèves de leur raisonnement mathématique

Gersten, Chard et al. (2009) relèvent que l'encouragement à la verbalisation permet aux élèves de choisir une représentation appropriée à la question posée ou au concept travaillé notamment grâce à la possibilité de discuter avec des camarades ou avec l'enseignant·e. De nombreuses recherches ont montré que les interventions qui encouragent et facilitent la verbalisation sont efficaces chez les élèves en difficultés ($d$ = 1.04 chez Gersten, Chard et al., 2009) et cela dans plusieurs disciplines comme l'histoire, les sciences, la lecture et les mathématiques (Baker, Gersten, & Lee, 2002). Dans ce processus du recours à la mise en mots, l'enseignant·e laisse les élèves s'exprimer, crée le climat qui leur permet de débattre, choisit les bons moments pour questionner et corriger avant de guider progressivement les élèves vers une institutionnalisation du savoir (Gersten, Chard et al., 2009). Dans la revue de littérature de Zheng et al. (2012), engager les élèves dans un dialogue sur la tâche et poser des questions sont également signalés comme des interventions efficaces.

Un autre type d'intervention, dans laquelle la verbalisation de l'élève est au centre de la démarche est l'"inquiry-based instruction", une approche pédagogique fondée sur l'investigation (Krawec & Steinberg, 2019). Celle-ci est définie comme une intervention dans laquelle les élèves doivent observer des phénomènes, poser des questions, chercher des moyens pour répondre à leurs questions (par exemple en dessinant, en calculant, etc.) puis évaluer leurs solutions et les communiquer aux autres de manière efficace. Des recherches ont montré que ce type d'approche améliore non seulement les compétences des élèves (Bottge, 1999 ; Bottge, Rueda, Serlin et al., 2007) mais aussi leur engagement et leur motivation (Bottge, Rueda, LaRoque et al., 2007).

Pour étayer la verbalisation des élèves en difficulté, l'enseignant·e peut organiser des étapes progressives dans la séquence afin de laisser d'abord les élèves dire ce qu'il·elle·s souhaitent sans correction systématique, puis les encourager à valider et prouver leur propos par la pratique du débat. Il faut noter ici que cette phase du débat doit se faire dans des conditions appropriées afin que les élèves les plus en difficulté puissent en profiter (Dias, 2020). Il s'agit pour l'enseignant, par exemple, de choisir les protagonistes qui vont interagir, de diminuer la taille des groupes qui échangent, ou encore de proposer son aide pour prendre en notes les éléments importants du débat. Finalement, l'enseignant·e peut choisir les aspects qu'il·elle souhaite institutionnaliser.

## Proposer une gamme d'exemples

De nombreuses recherches sur l'enseignement efficace des mathématiques ont montré l'importance des séquences d'exemples afin d'enseigner des concepts aux élèves (Witzel et al., 2003 ; Xin et al., 2005). Ces exemples peuvent être une séquence allant du concret à l'abstrait ou du facile au difficile. Dans la méta-analyse de Gersten, Chard et al. (2009), neuf études ont montré qu'il s'agissait d'une intervention efficace (d = 0.82). Dans leurs recherches, Butler et al., (2003) ainsi que Witzel et al. (2003) rapportent que les élèves, y compris au secondaire, ont besoin d'exemples concrets (ici pour les fractions ou les équations algébriques) avant de passer aux représentations visuelles pour finir par les notations mathématiques abstraites.

Dans l'étude de Fuchs et al. (2004), les auteurs proposent aux élèves de travailler quatre types de problèmes différents en quatre cycles de trois semaines. Durant la première semaine, deux problèmes de même type (par exemple une liste de course) sont présentés et discutés avec les élèves, puis à nouveau deux problèmes durant la deuxième semaine, et finalement deux leçons de transfert sont proposées pendant la troisième semaine. Cette approche proposant de travailler explicitement les stratégies de résolution de problèmes et de travailler à partir d'exemples de problèmes similaires se révèle être très efficace ($d$ = 1.14) chez les élèves en difficultés.

Une autre manière de donner des exemples est de montrer un problème ou un algorithme déjà résolu aux élèves et de leur demander ensuite de le commenter, de le comprendre ou de le comparer avec un autre exemple. Dans la méthode Archimaths (Bolsius et al., 2019), les auteurs proposent plusieurs tutoriels vidéos[7] de ces algorithmes déjà résolus.

## Tutorat par les pairs

Le tutorat par les pairs – appelé également enseignement par les pairs ou enseignement réciproque – fait référence à une assistance individuelle à l'intention d'un·e élève en difficultés fournie par un·e élève plus avancé·e. De manière traditionnelle, ce tutorat est plutôt assuré par un·e élève d'un degré scolaire plus élevé, mais il peut également être dispensé par un·e élève de la même classe. Si l'intention est bien de faire bénéficier un·e élève en difficulté de la plus grande facilité d'un·e camarade, il importe de demander aux élèves de jouer tour à tour le rôle de tuteur. Par exemple, dans une activité de résolution de problèmes, on demandera généralement à l'élève le·la plus performant·e de résoudre le premier problème et à l'élève en difficulté de fournir un feedback à un·e camarade, pour ensuite inverser les rôles lors du problème suivant. Précisons que ces modalités d'apprentissage entre pairs interviennent généralement après que l'enseignant·e ait enseigné la compétence visée à ses élèves. Dans la méta-analyse de Gersten, Chard et al. (2009), les deux seules études ayant mesuré l'effet du tutorat par des pairs plus âgés ont mis en évidence une taille d'effet très significative et importante (d = 1.02) alors que les six études ayant mesuré l'effet du tutorat fourni par des élèves de la même classe ont révélé un effet non-significatif de cette composante de l'enseignement. Dans leur revue ayant porté sur des élèves de l'école primaire et secondaire, Kunsch et al. (2007) ont conclu que le tutorat par les pairs était modérément efficace (d = 0.47) et que les élèves en difficultés importantes semblaient nécessiter des mesures d'aide plus intensives prodiguées directement par l'enseignant·e.

## Conclusion

L'objectif du présent article est de synthétiser les connaissances issues des méta-analyses et des revues de littérature ayant permis, ces dernières années, d'identifier les pratiques pédagogiques les plus propices à faire progresser les élèves rencontrant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Cette synthèse montre que ces élèves bénéficient particulièrement de l'utilisation d'heuristiques, d'un enseignement explicite ainsi que d'un enseignement d'une démarche d'auto-questionnement. Utiliser des représentations visuelles et matérielles, inciter les élèves à verbaliser leur raisonnement mathématique, proposer plusieurs exemples, donner régulièrement des feedbacks aux élèves et recourir à du tutorat avec des pairs plus âgés sont également des stratégies pédagogiques à privilégier avec les élèves en difficultés. Notons qu'il y a un certain chevauchement entre ces différentes stratégies pédagogiques. Par exemple, l'enseignement explicite recourt souvent à une démonstration de stratégies à faire acquérir aux élèves, l'utilisation d'heuristiques se fait fréquemment à travers des représentations visuelles, et l'utilisation d'une gamme d'exemples passe régulièrement par l'utilisation d'heuristiques ou par des représentations visuelles. Dans les méta-analyses, ces différentes stratégies d'enseignement sont d'ailleurs souvent codées dans plusieurs catégories à la fois. Ces pistes pédagogiques pourront donc être utilisées simultanément par les enseignant·e·s, et ce avec plusieurs de leurs élèves. En termes de recherche, des études (quasi)expérimentales et des méta-analyses visant à faire un état des lieux récent sur l'efficacité d'un large ensemble de pratiques pédagogiques seraient de mise. Il serait notamment utile de ré-effectuer une méta-analyse sur la base des dernières études réalisées en reprenant les catégories de Gersten, Chard et al. (2009) et en y ajoutant d'autres stratégies pédagogiques, comme l'utilisation de logiciels informatiques de qualité et l'enseignement de stratégies (méta)cognitives.

[7] https://vimeopro.com/user36345481/memos-archimaths-ce2/video/410545103

BIBLIOGRAPHIE[8]

*Baker, S., Gersten, R. & Lee, D. S. (2002). A synthesis of empirical research on teaching mathematics to low-achieving students. *Elementary School Journal, 103*, 51–73.

Beugin, D. & Winkopp, P. (1950). *Les problèmes par l'image.* Editions Studia.

Bissonnette, S., Gauthier, C. & Bocquillon, M. (2020). Pour révolutionner la formation à l'enseignement : proposer des interventions fondées sur des données probantes. *Education in Perspective, 11*, 1-9.

Bissonnette, S., Richard, M., Gauthier, C. & Bouchard, C. (2010). Quelles sont les stratégies d'enseignement efficaces favorisant les apprentissages fondamentaux auprès des élèves en difficulté de niveau élémentaire? Résultats d'une méga-analyse. *Revue de recherche appliquée sur l'apprentissage, 3*(1), 1-35.

Bottge, B. A. (1999). Effects of contextualized math instruction on problem solving of average and below-average achieving students. *Journal of Special Education, 33,* 81–92.

Bottge, B. A., Rueda, E., LaRoque, P. T., Serlin, R. C. & Kwon, J. (2007). Integrating reform-oriented math instruction in special education settings. *Learning Disabilities Research & Practice, 22,* 96–109.

Bottge, B. A., Rueda, E., Serlin, R. C., Hung, Y-H. & Kwon, J. M. (2007). Shrinking achieve-ment dierences with anchored math problems: *Challenges and possibilities.e Journal of Special Education, 41,* 31–49.

Burns, M. K., Jimerson, S. R., VanDerHeyden, A. M. & Deno, S. L. (2016). Toward a unified response-to-intervention model: multi-tiered systems of support, Dans S. R., Jimerson, M. K. Burns, & A. M., VanDerHeyden (dir.). *Handbook of response to intervention. The science and practice of multi-tiered systems of support.* New York: Springer.

Butler, F. M., Miller, S. P., Crehan, K., Babbitt, B. & Pierce, T. (2003). Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(2), 99–111.

*Chodura, S., Kuhn, J.-T. & Holling. H. (2015). Interventions for Children with Mathematical Difficulties. A Meta-analysis. *Zeitschrift für Psychologie, 223*(2), 129-144.

Cnesco (2015). *Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire*. Repéré à : http://www.cnesco.fr/fr/numeration/

Centre Suisse de Pédagogie Spécialisée. (2020). *Dyscalculie (trouble spécifique d'apprentissage en mathématiques) à l'école régulière.* Repéré à : https://www.ciip.ch/files/2/Fiche_info_Dyscalculie_version_longue.pdf

Desrochers, A. & Guay, M.-H. (2020). L'évolution de la réponse à l'intervention : d'un modèle d'identification des élèves en difficulté à un système de soutien à paliers multiples. *Enfance en difficulté, 7,* 5–25.

Dias, T. (dir., 2019). *Évaluation de l'enseignement des mathématiques dans le canton de Vaud.* Repéré à https://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/uerms/BROCHURE%20mission%20math_interactif.pdf

Dias, T. (2020). La verbalisation en classe de mathématiques: mission impossible ? *Au fil des maths, 538,* 6-16.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., . . . Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology, 43,* 1428-1446.

Every Child a Chance Trust. (2009). The long-term costs of numeracy difficulties. Repéré à http://www.everychildachancetrust.org/counts/index.cfm.

Bolsius, C, Dias, T., Feid, D. & Dumet, D. (2019). *Archimaths CP – Fichier de l'élève.* Magnard, Paris.

Fuchs, D., & Fuchs, L. S. (2006). Introduction to RTI: What, why and how valid is it? *Reading Research Quarterly 41*(1), 93–9.

Fuchs L. S., Fuchs, D. & Prentice, K. (2004). Responsiveness to mathematical problem-solving instruction: comparing students at risk of mathematics disability with and without risk of reading disability. *Journal of Learning Disabilities, 37*(4), 293-306.

[8] Les références bibliographiques contenant un * correspondent aux articles sélectionnés dans cette revue.

Fuchs, L. S., Seethaler, P. M., Powell, S. R., Fuchs, D., Hamlett, C. L. & Fletcher, J. M. (2008). Effects of Preventative Tutoring on the Mathematical Problem Solving of Third-Grade Students With Math and Reading Difficulties. *Exceptional Children, 74*(2), 155–173.

Germain Colombiès, C. & Lafay, A. (2021). Effet des interventions en résolution de problèmes à énoncé verbal chez les adolescents ayant un trouble des apprentissages ou des difficultés en mathématiques: Revue de littérature systématique. *Psychologie canadienne, 62*(3), 267-282.

*Gersten, R., Chard, D., J., Jayanthi, M., Baker, S., K., Morphy, P. & Flojo, J. (2009). Mathematics Instruction for Students With Learning Disabilities: A Meta-Analysis of Instructional Components. *Review of Educational Research, 79*(3), 1202–1242.

Gersten, R., Beckmann, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R. & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools* (NCEE 2009-4060). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Repéré à http://ies. ed.gov/ncee/wwc/publications/practiceguides/

Jitendra, A. K., Griffin, C. C., Haria, P., Leh, J., Adams, A. & Kaduvettoor, A. (2007). A Comparison of Single and Multiple Strategy Instruction on Third-Grade Sudents' Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology, 99*(1), 115-127.

Koponen, T., Mononen, R., Kumpulainen, T. & Puura, P. (2011). SELKIS-Yhteenlaskua Ymmärtämään. Yhteenlaskutaidon Harjoitusohjelma. [Improving Addition Skills: SELKIS Intervention Program]. Jyväskylä: Niilo Mäki Institute and Haukkarannan koulu.

Koponen, T. K., Sorvo, R., Dowker, A., Räikkönen, E., Viholainen, H., Aro, M. & Aro, T. (2018). Does Multi-Component Strategy Training Improve Calculation Fluency Among Poor Performing Elementary School Children? *Frontiers in Psychology, 9*, 1187. doi: 10.3389/fpsyg.2018.01187.

*Krawec, J. & Steinberg, M. (2019). Inquiry-based instruction in mathematics for students with learning disabilities: A review of the literature. *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal, 24*(2), 27–35.

*Kroesbergen, E. H. & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs: A meta-analysis. *Remedial and Special Education, 24*(2), 97-114.

*Kunsch, C. A., Jitendra, A. K. & Sood, S. (2007). The effects of peer-mediated instruction in mathematics for students with learning problems: A research synthesis. *Learning Disabilities Research and Practice, 22*(1), 1-12.

Leong, Y. H., Ho, W. K. & Cheng, L. P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator, 16*(1), 1-18.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving.* Cambridge University Press.

*Monei, T. & Athena, P. (2017). A systematic review of interventions for children presenting with dyscalculia in primary schools. *Educational Psychology in Practice, 33*(3), 277-293.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence.* Repéré à http://www.nctm.org/standards/focalpoints.aspx?id=282.

National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington, DC: U.S. Department of Education.

National Research Council (2009). *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity. Washington,* DC: National Academies Press.

National Reading Panel (2000). *Teaching to read: An evidence-based assessment of the scientific research literature on reading and its implications for reading instruction*, Washington, DC: National Institutes of Health.

Paré, M. & Prud'Homme, L. (2014). La différenciation dans une perspective inclusive : intégrer les connaissances issues de la recherche pour favoriser la progression des élèves dans un groupe hétérogène. *Revue Suisse de Pédagogie Spécialisée, 2,* 31–36.

Pinel, N. & Le Corf, L. (2019). *La méthode heuristique de mathématiques. Enseigner les mathématiques autrement à l'école.* Nathan : Paris.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It; a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.

Ritchie, S. J. & Bates, T. C. (2013). Enduring links from childhood mathematics and reading achievement to adult socioeconomic status. *Psychological Science, 24,* 1301-1308.

Slavin, R. (2020). How evidence-based reform will transform research and practice in education. *Educational Psychologist, 55*(1), 21–31.

*Stevens, E. A., Rodgers, M. A. & Powell, S. R. (2018). Mathematics Interventions for Upper Elementary and Secondary Students: A Meta-Analysis of Research. *Remedial and Special Education, 39*(6), 327–340.

Villani, C. & Torossian, C. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. Repéré à : https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242.

Vincent, F. (2018). Nuancer les données probantes en éducation: le cas de l'enseignement de l'écrit. *Formation et profession, 26*(2), 103–105.

Witzel, B., Mercer, C. D. & Miller, M., D. (2003). Teaching Algebra to Students with Learning Difficulties: An Investigation of an Explicit Instruction Model. *Learning Disabilities Research and Practice 18*(2), 121-131.

Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice drills. *Learning Disability Quarterly, 29*, 269–289.

Xin, Y. P., Jitendra, A. K. & Deatline-Buchman, A. (2005). Effects of mathematical word problem-solving instruction on middle school students with learning problems. *Journal of Special Education, 39,* 181–192.

*Zheng, X., Flynn, L. J. & Lee, S. (2012). Experimental Intervention Studies on Word Problem Solving and Math Disabilities A Selective Analysis of the Literature. *Learning Disability Quarterly, 36*(2), 97-111.

# COMMENT UNE ADDITION PEUT-ELLE DEVENIR UNE SOUSTRACTION ? LE ROLE DU SCHEMA EN BARRES DANS UNE LEÇON DE MATHEMATIQUES JAPONAISE

**Stéphane Clivaz et Masanobu Sakamoto, Shirley Tan**

**HEP Vaud, Lausanne, Suisse et Université de Nagoya, Japon**

Mots-clés : schéma en barres, résolution de problèmes, Japon, analyse de leçon basée sur des transcriptions

Cet article décrit une leçon de mathématiques japonaise consacrée à la résolution d'un problème additif. L'analyse de la leçon est contrastée avec une analyse *a priori* se focalisant sur la représentation du problème sous forme de schéma en barres. Cette analyse permet de dégager les représentations du problème et leur utilisation par les élèves et l'enseignant et d'envisager quelques perspectives pour les enseignant·e·s francophones.

## INTRODUCTION

Cet article décrit et analyse une leçon de mathématiques japonaise consacrée à la résolution d'un problème additif. L'analyse de cette leçon a été effectuée à l'université de Nagoya par trois chercheurs d'origines diverses, portant des regards différents sur une même leçon. Le croisement des trois regards donne à chacune des trois analyses un nouveau relief. C'est en particulier le cas de cet article qui se focalise sur les aspects de didactique des mathématiques tout en étant influencé par la méthodologie d'analyse de leçon basée sur des transcriptions (Transcript Based Lesson Analysis, TBLA, Matoba, 2017), développée à l'université de Nagoya. Cette méthodologie est une extension du cycle japonais de lesson study (Clivaz, 2015). Elle est réalisée par des chercheurs universitaires et consiste en une analyse collaborative détaillée de la transcription d'une leçon, pouvant parfois enrichir une seconde discussion post-leçon ultérieure avec les enseignants ou pouvant amener des résultats complémentaires à cette discussion. Ces résultats sont ensuite utilisés dans les cycles suivants et peuvent être publiés comme articles de recherche.

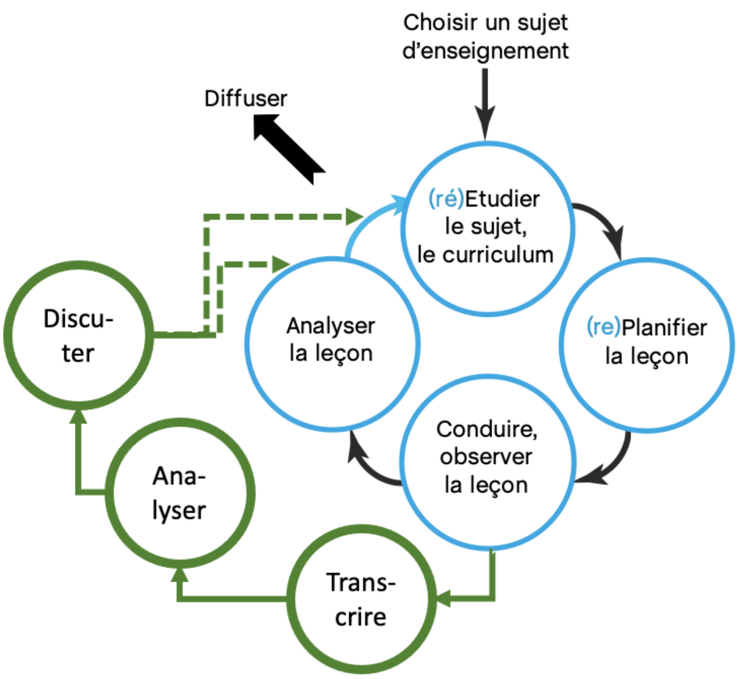



Fig. 1 : Le cycle lesson study réalisé par les enseignants (en bleu) et le cycle TBLA réalisé par les chercheurs (en vert)

Comme c'est le cas ici, cette méthodologie est aussi parfois utilisée pour analyser des leçons ordinaires. Le résultat des analyses peut alors être communiqué à l'enseignant·e ayant réalisé la leçon et à ses collègues.

Dans une première partie, nous décrirons brièvement les circonstances de la leçon, les données recueillies et leur analyse. La deuxième partie proposera une analyse *a priori* du problème au centre de la leçon, en se focalisant sur la représentation de ce problème sous forme de schéma en barres. La leçon effectivement réalisée sera analysée *a posteriori* dans une troisième partie, en comparaison avec l'analyse *a priori*. En conclusion, nous discuterons les perspectives ouvertes par cette analyse, tant pour les enseignant·e·s francophones que pour les enseignant·e·s japonais·e·s.

## UNE LEÇON JAPONAISE (PRESQUE) ORDINAIRE

Les leçons de mathématiques dans les écoles primaires japonaises sont impressionnantes pour un observateur occidental. Réunissant jusqu'à 40 élèves, elles sont centrées sur la résolution d'un problème et elles ont fait l'objet de nombreuses analyses en français ou en anglais (voir par exemple Batteau, 2019; Clivaz et Miyakawa, 2020). Les chercheurs de l'équipe de « méthodes d'éducation » de l'université de Nagoya ont fait le choix d'effectuer une visite annuelle dans une petite école rurale située dans les montagnes de la préfecture d'Aichi et d'en analyser plusieurs leçons, notamment pour profiter du fait que ces leçons réunissent souvent un très petit nombre d'élèves, ce qui n'est pas considéré comme une limite à la recherche mais comme une condition particulière permettant une analyse plus détaillée. La leçon décrite ici fait partie de ce corpus de leçon. C'est une leçon ordinaire de grade 2[1], n'ayant bénéficié d'aucune préparation particulière, donnée par un enseignant généraliste ayant environ vingt ans d'expérience, Eisaku[2], à quatre élèves : deux filles, Ayako et Hikari et deux garçons, Chihiro et Daiki.

Le problème au centre de la leçon était le suivant[3] :

> Au début, il y avait 24 enfants qui jouaient.
>
> Puis leurs amis sont venus.
>
> Il y a maintenant 35 enfants en tout.
>
> Combien de personnes sont venues ?

La leçon, d'une durée de 53 minutes, a été filmée par deux caméras fixes (une en fond de classe, face au tableau noir, une sur le côté filmant les élèves de trois quarts face). La leçon a été intégralement transcrite en japonais et la transcription a été traduite en anglais. Le deuxième et le troisième auteur de cet article ont réalisé l'analyse de la leçon sur la base de la transcription japonaise (voir aussi Sakamoto et al., 2021; Tan et al., 2021). Le premier auteur a utilisé un logiciel d'analyse qualitative de données, Transana (Woods, 2002-2021), lui permettant de visualiser de manière synchronisée les deux vidéos et les deux transcriptions et de coder chaque tour de parole en fonction du locuteur, et, comme nous allons le décrire maintenant, de la représentation utilisée.

## QUELS CHEMINS VERS LA SOLUTION ?

Afin d'analyser le déroulement de la leçon du point de vue des types des représentations possibles et des démarches de résolution possibles, nous avons réalisé une analyse *a priori* de ces représentations et de ces démarches. Autrement dit, nous avons essayé de déterminer toutes les manières possibles de représenter

---

[1] 4H.

[2] Tous les prénoms sont des pseudonymes.

[3] Problème tiré de Shimizu, S. (2014). *わくわく算数２上 [Les maths, c'est chouette, 2è année]*. Keirinkan. Toutes les traductions entre le japonais et l'anglais ou entre le japonais et le français ont été réalisées en deux étapes : une première traduction automatique à l'aide du logiciel DeepL (www.deepl.com) et une révision complète de chaque traduction par la troisième auteure.

le problème et toutes les démarches de résolution possibles, afin de pouvoir analyser celles effectivement présentes dans la leçon.

Dans la leçon observée, le problème est très rapidement illustré au tableau noir par l'enseignant sous la forme d'un schéma en barres. Toutefois, d'autres représentations apparaissent rapidement. Nous faisons donc le choix, dans cette analyse *a priori*, d'analyser d'abord les solutions possibles à l'aide du schéma en barres et ensuite d'élargir cette analyse aux autres représentations possibles.

## Comment résoudre le problème ?

Le problème peut être illustré par un schéma en barres (Fig. 2). Ce type de diagramme est très couramment utilisé dans de nombreux pays, notamment à Singapour (Clivaz et Dindyal, sous presse) ou au Japon (Murata, 2008). En contexte francophone, il a été mis en lumière par l'usage important qui en est fait par la série de manuels français la *Méthode de Singapour* (voir par exemple Cuenod, 2018), et se rapproche également des schémas range-tout (voir par exemple Auquière et al., 2018). Il reste toutefois assez peu utilisé en Suisse romande ou en France. Ce type de schéma permet notamment de représenter graphiquement les relations entre les quantités présentes dans un problème. Dans le cas du problème des enfants, on peut dessiner d'abord une barre pour représenter les 24 enfants (en rose dans la Fig. 2), y accoler une barre de longueur inconnue et donc arbitraire pour représenter les enfants arrivés ensuite (en bleu dans la Fig. 2) et indiquer que la longueur totale de la barre représente le nombre total d'enfants présents (en vert dans la Fig. 2).

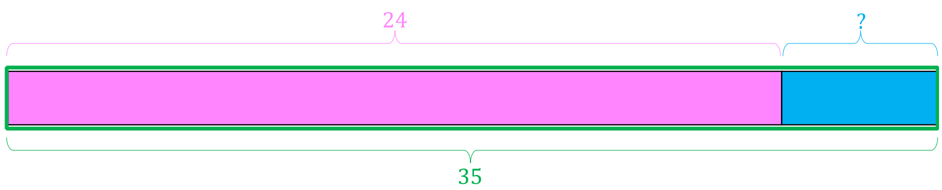



Fig. 2 : Schéma en barres

Si le tracé du schéma en barres suit l'ordre chronologique de l'histoire qu'énonce le problème, le résultat une fois dessiné est indépendant de la chronologie (Murata, 2008, p. 399-400). Cette « photo instantanée » permet deux types de raisonnement pour trouver la valeur représentée par la barre bleue.

Le premier (Fig. 3 gauche) est de se dire que la partie rose du diagramme en barres est de 24. La partie verte (totale) est de 35. Combien vaut la partie bleue ? Ce raisonnement est très proche de l'énoncé initial du problème et réintroduit son aspect chronologique. Il correspond à l'écriture arithmétique additive $24 + \ldots = 35$ ou à l'expression « 24 pour aller à 35 ».

Le second (Fig. 3 droite) est de se dire que la partie verte (totale) est de 35. Pour savoir combien vaut la partie bleue, il suffit d'enlever la partie rose de 24. Ce raisonnement introduit un nouvel aspect temporel, différent de celui du problème initial. Il correspond à l'écriture arithmétique soustractive $35 - 24 = \ldots$.

Un aspect intéressant de l'utilisation du diagramme en barres dans ces deux types de raisonnements est que chaque barre peut représenter un nombre (par exemple 24) ou une quantité d'objets (par exemple 24 enfants), ou encore permettre un aller-retour entre nombres abstraits et nombres d'objets.

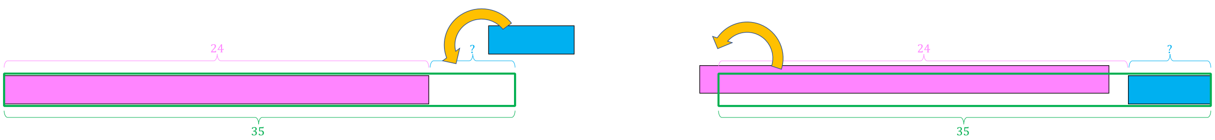
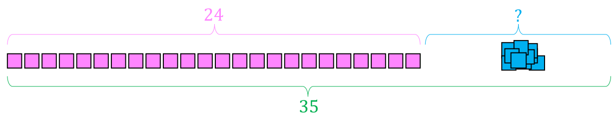
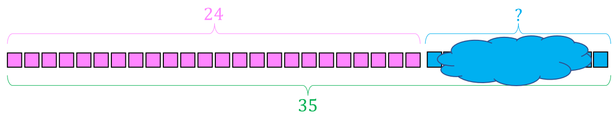



Fig. 3 : Résolutions du problème avec un schéma en barres

## Comment se représenter le problème ?

Nous venons de considérer trois représentations du problème (une représentation verbale, une représentation schématique en barres et une représentation arithmétique) et deux façons de considérer ces représentations : une façon additive et une façon soustractive. En fait, les représentations possibles sont bien plus nombreuses. Nous avons tenté de les inventorier et de les classer en représentations verbales, concrètes ou semi-concrètes, schématiques, arithmétiques ou algébriques (lignes du tableau de la Fig. 4). Pour chacune de ces représentations, de la même manière que pour le schéma en barres, on peut considérer une « version additive » et une « version soustractive (colonnes du tableau de la Fig. 4).

| | **Version additive** | **Version soustractive** |
|---|---|---|
| Énoncé verbal | Au début, il y avait 24 enfants qui jouaient.<br>Puis leurs amis sont venus.<br>Il y a maintenant 35 enfants en tout.<br>Combien de personnes sont venues ? | Il y avait 35 enfants qui jouaient.<br>24 étaient arrivés plus tôt que les autres. Ils s'en vont plus tôt.<br>Combien d'enfants jouent maintenant. |
| Représentation concrète (avec des élèves) | Placer 24 élèves dans la salle de classe.<br>Faire entrer d'autres élèves dans la classe<br>Compter tout le monde : 35<br>Combien d'élèves sont entrés ? | Placer 35 élèves dans la salle de classe<br>24 sont arrivés plus tôt. Ils s'en vont plus tôt.<br>Comptez les élèves de la classe. Ce sont ceux qui sont arrivés plus tard. |
| Représentation semi-concrète (avec des jetons) | Nous avons 24 jetons sur la table.<br>Nous ajoutons d'autres jetons.<br>Maintenant, nous comptons 35 jetons en tout.<br>Combien de jetons avons-nous ajoutés ? | Nous avons 35 jetons sur la table.<br>Certains ont été ajoutés aux 24 qui étaient déjà là.<br>Nous en enlevons 24. Ceux qui restent sur la table sont ceux qui ont été ajoutés. |
| Représentation semi-concrète (avec des plaquettes magnétiques carrées) | <br>On ajoute les plaquettes bleues en comptant :<br>1(25), 2(26), 3(27), 4(28), … , 10(34), 11(35) | On enlève les plaquettes roses en comptant :<br>1(34), 2(33), … , 23(12), 24(11)<br>ou encore :<br>35– 24 |
| Schéma en barres avec unités | <br>On ajoute les unités bleues en comptant :<br>1 (25), 2(26), 3(27), 4(28), … , 10(34), 11(35) | On enlève les unités roses en comptant :<br>1(34), 2(33), … , 23(12), 24(11)<br>ou encore :<br>35– 24 |
| Schéma en barres | Voir Fig. 2<br>Voir Fig. 3 gauche | Voir Fig. 3 droite |

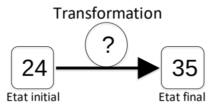
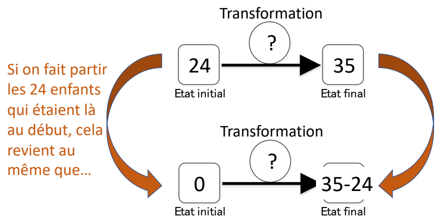
| | | |
|---|---|---|
| Ligne numérique (ordinale) | 24, 25(1), 26(2), 27(3), 28(4), 29(5), 30(6), 31(7), 32(8), 33(9), 34(10), 35(11)<br>ou<br>6 pour aller à 30, 5 pour aller à 35<br>ou<br>$24 + \ldots = 35$ | <br>$35 - 24$ |
| Écriture arithmétique | $24 + \ldots = 35$ | $35 - 24 = \ldots$ |
| Opération en colonnes | $\begin{array}{r} 2\ \ 4 \\ +\ \ldots\ \ldots \\ \hline 3\ \ 5 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 3\ \ 5 \\ -\ \ 2\ \ 4 \\ \hline \ldots\ \ldots \end{array}$ |
| Écriture algébrique | $24 + x = 35$ | $x = 35 - 24$ |
| Schéma type Vergnaud | | ET+E<br> |
| | $24 + \ldots = 35$ |  |

Fig. 4 : Tableau des représentations possibles

Le lien entre ces diverses représentations dans leurs versions additives et soustractives nécessiterait un article en lui-même. S'ils·elles le souhaitent, nous laissons aux lectrices et lecteurs le soin de tisser quelques-uns de ces liens. De notre côté, nous allons examiner quelles représentations étaient présentes dans la leçon japonaise et par qui elles ont été utilisées. Nous nous focaliserons ensuite sur un extrait de la leçon pour voir comment deux élèves ont jonglé avec ces représentations.

## La leçon

La leçon a duré 53 minutes. Lors de notre analyse, nous l'avons divisée en dix segments (voir Sakamoto et al., 2021) regroupés en cinq parties. Dans la partie A (00:46 à 06:55), l'enseignant énonce le but de la leçon et le problème en disant et en écrivant au tableau noir :

> 24 enfants
>
> Des amis arrivent
>
> En tout 35 personnes

Il ajoute ensuite : « Quel est le nombre caché ? ». Dans la partie B (06:55 à 10:37) les élèves trouvent individuellement très rapidement le nombre 11 et écrivent la solution et leur méthode de résolution dans leur cahier. L'enseignant propose alors d'utiliser un diagramme en barres qu'il avait introduit lors d'une leçon précédente. Cette présentation en dialogue entre l'enseignant et les élèves à propos du diagramme et du lien avec le problème et avec les écritures arithmétiques $24 + 11 = 35$ et $35 - 24 = 11$ constitue la partie C (10:37 à 20:08) de la leçon. Les élèves présentent ensuite leurs solutions au tableau et les discutent durant la partie D (20:08 à 47:38). Cette partie D sera analysée plus en détail ci-dessous. L'enseignant conclut la leçon en allant chercher des plaquettes magnétiques pour représenter le problème et faire le geste de faire glisser 24 plaquettes pour compter le nombre de plaquettes restantes (partie E, de 47:38 à 53:03). La photographie du tableau noir (Fig. 5) permet de visualiser le tableau avec les traductions en lien avec les parties de la leçon.

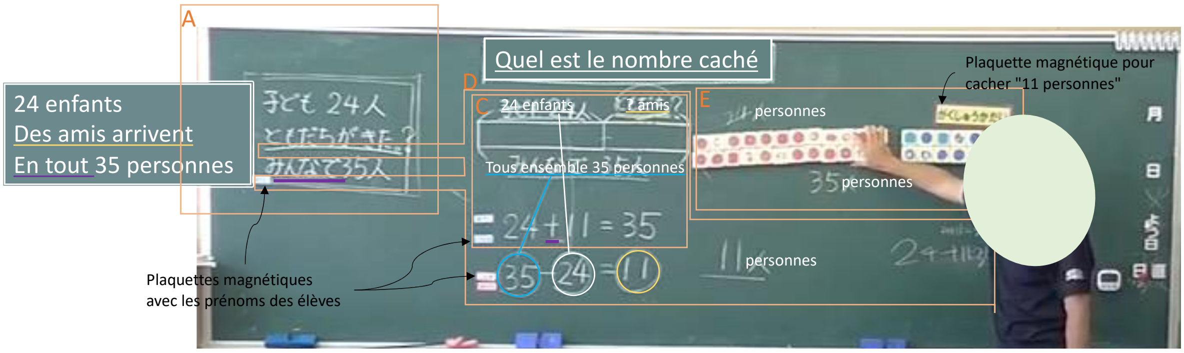



Fig. 5 : Le tableau noir à la fin de la leçon, avec les traductions en français et le lien avec les parties de la leçon

## Les représentations durant la leçon

Durant l'ensemble de la leçon, la façon additive de considérer le problème a été plus utilisée que le point de vue soustractif (Fig. 6). Plusieurs types de représentations prévues par l'analyse *a priori* de la Fig. 4 ont été utilisées : représentations verbales, semi-concrètes avec des plaquettes magnétiques, en barres, arithmétiques et par des opérations en colonnes (Fig. 7). Les autres représentations n'ont pas été utilisées.

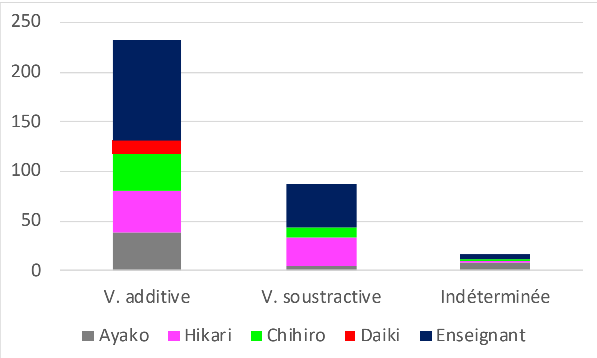



Fig. 6 : Nombre de tours de parole portant sur la version additive ou sur la version soustractive

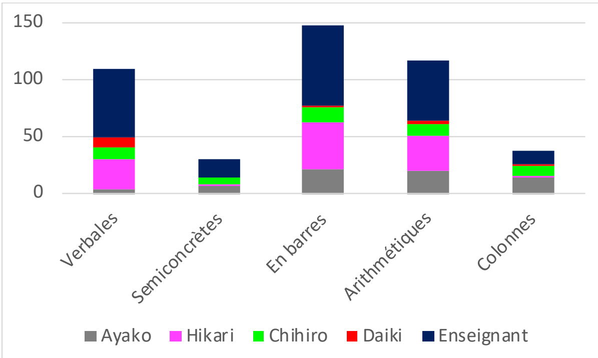



Fig. 7 : Nombre de tours de parole utilisant les diverses représentations au cours de la leçon

Comme illustré par les graphiques, certains élèves ont utilisé principalement la version additive, comme Ayako et d'autres ont utilisé les deux versions, comme Hikari. Nous verrons ci-dessous les liens entre ces deux points de vue. Pour ce qui est des représentations, il est également plus intéressant de s'intéresser aux liens entre elles. C'est toutefois difficile de le faire ici pour l'ensemble de la leçon et pour les cinq personnes. C'est la raison pour laquelle nous allons nous focaliser sur le moment de présentation et de discussion des solutions par les deux élèves ayant souhaité présenter leur solution au tableau, Ayako et Hikari.

## Ayako et Hikari

Après la résolution individuelle du problème par les élèves, et après leur avoir explicitement demandé d'utiliser le diagramme en barres qu'il a dessiné en dialogue avec les élèves pour faire le lien avec les écritures arithmétiques 24 + 11 = 35 et 35 – 24 = 11, l'enseignant Eisaku demande qui veut présenter sa solution. Ayako se rend au tableau. Elle dit qu'elle a fait 24 + 11 = 35 et justifie que le résultat de l'addition 24 + 11 est bien correct (Fig. 8, ①). L'enseignant insiste en demandant de faire le lien avec le schéma en barres et Ayako explique cette fois la soustraction, en faisant une soustraction en colonnes par oral, tout en montrant alternativement le schéma en barres et l'écriture arithmétique ②. Eisaku insiste, mais Ayako reste sur la justification que les calculs sont corrects ③. Tout au long de son passage au tableau, Ayako montre qu'elle a bien compris le lien entre les représentations du problème. Elle ne parvient par contre pas à utiliser ces représentations pour faire le lien entre la version additive et la version soustractive, malgré l'insistance de Eisaku.

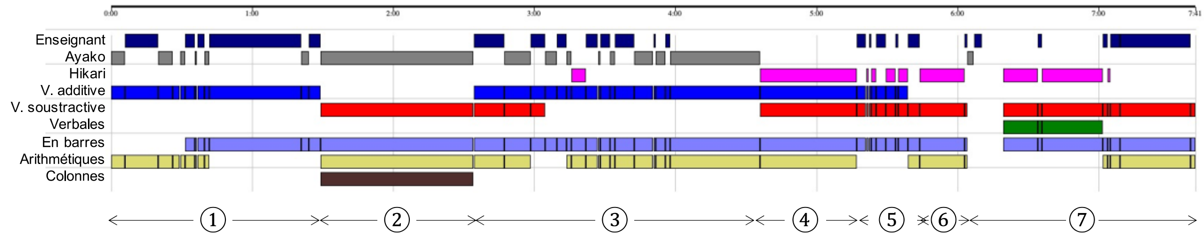



Fig. 8 : Codage du moment d'explication des solutions de Ayako et Hikari

Hikari l'interrompt alors et se rend au tableau.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ④ | 1 | Hikari | J'ai quelque chose à dire. Parce que, euh, mais... 24 plus 11 égal 35... 35 moins 24 égal 11... (montre les nombres respectifs des deux écritures arithmétiques voir Fig. 5) |
| ⑤ | 2 | Eisaku | Où est le 24 ? D'où à où ? |
| | 3 | Hikari | 24 est d'ici à ici. |
| | 4 | Eisaku | Et ? |
| | 5 | Hikari | 35 est d'ici à ici. (montre à chaque fois le rectangle concerné) |
| | 6 | Eisaku | Donc 35 est d'ici à ici ? |
| | 7 | Hikari | 11 est d'ici à ici. |
| | 8 | Eisaku | Et ? |
| | 9 | Hikari | Et alors ? |
| ⑥ | 10 | Eisaku | Donc, cette soustraction, elle vient d'où ? |
| | 11 | Hikari | Euh, ça c'est 35, j'enlève 24 et il reste 11, donc 11 enfants. |
| | 12 | Eisaku | Comment ça ? |
| ⑦ | 13 | Ayako | (Applaudissements) |
| | 14 | Eisaku | Chihiro. Tu comprends ? |
| | 15 | Daiki | Je ne comprends pas. |
| | 16 | Hikari | Regarde encore. D'ici à là, il y a 35 personnes, non ? Oh, ça fait 35 bandes, non ? |
| | 17 | Eisaku | (Rires) Ce n'est pas une bande, 35 personnes. |
| | 18 | Hikari | Oh, c'est 35 personnes, non ? Et puis tu le tires, 24, et ça fait 11, c'est ça ? Donc, la barre qui reste est de 11, donc il y a 11 personnes. |
| | 19 | Eisaku | Vous voyez du bleu ? (entoure en bleu le 35 dans l'écriture algébrique et sur le schéma, voir Fig. 5). |
| | 20 | Hikari | Bleu ? Je vois. |
| | 21 | Eisaku | Qu'en penses-tu ? Est-ce que ça a un sens, cette explication. Tu n'es toujours pas convaincu ? |
| | 22 | Chihiro | Je suis convaincu. |

Hikari a bien compris le lien entre la version additive et la version soustractive. C'est d'ailleurs la seule des quatre élèves qui utilise les deux points de vue (voir Fig. 6). Elle commence donc par expliciter ce lien sur l'écriture arithmétique (1). L'enseignant Eisaku lui demande simplement « D'où à où ? » (2). Hikari va alors montrer à deux reprises (lignes 11 et 18) sur le schéma en barres, le fait qu'on peut enlever la partie 24 pour trouver la partie 11. Cette explication est permise par le fait que le schéma en barres permet l'abolition, puis le renversement de la chronologie comme nous l'avons vu plus haut et aux Fig. 2 et Fig. 3, même si Hikari utilise le vocabulaire du problème « personnes » et non celui du schéma. Elle fait ainsi le lien entre les représentations arithmétiques, en barres et verbales du problème, ce qui est favorisé par les écritures « 24 enfants », « ? amis » et « 35 personnes » au tableau noir (voir la Fig. 5).

Cette explication semble convaincre les autres élèves. Notons toutefois que l'enseignant se rendra compte que le mouvement consistant à enlever la partie 24 n'est pas suffisamment explicite. Il ira donc chercher des plaquettes magnétiques (représentation semi-concrète avec des plaquettes magnétiques carrées, voir Fig. 4) pour faire le geste de faire glisser les 24 plaquettes comme le montre la photographie de la Fig. 5.

Ce moment de présentation des solutions illustre bien ce que les auteurs de cet article ont observé à de multiples reprises dans des leçons de mathématiques au Japon et qui est relevé par de nombreux auteurs (voir par exemple Clivaz & Miyakawa, 2020; Inoue, 2011; Takahashi, 2008) : c'est durant le moment de présentation et de discussion des solutions que se construisent principalement les connaissances mathématiques. Dans les leçons de mathématiques japonaises, ce moment de mise en commun, appelé *neriage* (voir Clivaz & Takahashi, 2020), tire profit des liens entre plusieurs méthodes de résolution et plusieurs représentations pour construire une compréhension profonde des concepts mathématiques. Si, dans ces moments surtout, l'essence des mathématiques se trouve dans les liens entre concepts ou entre méthodes de résolution, il faut pouvoir visualiser ces liens. Cela n'est possible que grâce à l'affichage de multiples représentations, généralement au tableau noir, comme illustré par la Fig. 5 et comme étudié plus en détail par Tan et al. (2021).

## Conclusion

L'étude de l'usage de représentations graphiques lors de la résolution de problèmes a été beaucoup étudiée. C'est en particulier le cas de l'utilisation de modèles en barres récurrente dans la scolarité de plusieurs pays asiatiques, particulièrement Singapour et le Japon (Clivaz & Dindyal, sous presse; Murata, 2008). Notre recherche, dont cet article montre un extrait, indique que l'étude de l'utilisation de ces représentations en lien étroit avec l'enregistrement vidéo et la transcription de la leçon est une piste prometteuse du point de vue de la recherche, mais aussi du point de vue de la diffusion aux enseignant·e·s. Il nous semble particulièrement intéressant d'examiner la façon dont les représentations graphiques sont utilisées au tableau dans les moments de mise en commun et les effets de ces moments sur l'apprentissage mathématique des élèves. On pourrait notamment imaginer que des extraits de manuels, des reproductions de tableaux noirs et des extraits de transcriptions de leçons servent de support à des discussions avec des équipes d'enseignant·e·s d'établissements scolaires. Comme développée par l'université de Nagoya, cette pratique, idéalement mais pas obligatoirement basée sur les leçons données dans l'établissement, pourrait être un développement fructueux des processus de lesson study.

## Bibliographie


Auquière, A., Demonty, I. & Fagnant, A. (2018). Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 23*, 41-68. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST18017/IST18017.pdf

Batteau, V. (2019). Activité de mesure de la longueur d'un couloir dans une école primaire japonaise. *RMé, 232*, 4-14. http://www.revue-mathematiques.ch/consultation/numero-229/

Clivaz, S. (2015). Les Lesson Study ? Kesako ? *Math-Ecole, 224*, 23-26. http://www.revue-mathematiques.ch/files/2614/6288/8786/ME224_Clivaz.pdf

Clivaz, S. & Dindyal, J. (sous presse). Représentations graphiques et résolution de problèmes: le cas de Singapour. *Grand N, 108*, 5-25.

Clivaz, S. & Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics, 105*(1), 53-70. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09980-1

Clivaz, S. & Takahashi, A. (2020). Lesson Study, enseignement par la résolution de problèmes et neriage : réflexions autour de l'observation d'une leçon de mathématiques. *RMé, 233*, 6-15. https://www.revue-mathematiques.ch/files/8415/9195/2570/RMe-233-Clivaz.pdf

Cuenod, L. (2018). Maths - La méthode de Singapour. *Le Point, Hors-série.* https://www.lepoint.fr/dossiers/sciences/maths-methode-singapour/

Inoue, N. (2011). Zen and the art of neriage: Facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 5-23. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10857-010-9150-z

Matoba, M. (2017). Building academic-oriented lesson study. *東海学園大学教育研究紀要 [Notes de recherche pédagogique de l'Université Tokai Gakuen], 3*, 120-134. http://repository.tokaigakuen-u.ac.jp/dspace/bitstream/11334/1492/1/spkiyo_003_12.pdf

Murata, A. (2008). Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 374-406. https://doi.org/10.1080/10986060802291642

Sakamoto, M., Tan, S. & Clivaz, S. (2021). The complexity of teachers' work in the classroom: Model of the teacher's speaking, writing, listening, and movement. Manuscrit en préparation.

Shimizu, S. (2014). *わくわく算数２上 [Les maths, c'est chouette, 2è année]*. Keirinkan.

Takahashi, A. (2008). Beyond Show and Tell: Neriage for Teaching through Problem-Solving - Ideas from Japanese Problem-Solving Approaches for Teaching Mathematics. Dans M. Santos-Trigo et Y. Shimizu (dir.), *ICME 11, Topic Study Group 19: Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 145-157).

Tan, S., Clivaz, S. & Sakamoto, M. (2021). Representing multiple representations: A bansho analysis. Manuscrit en préparation.

Woods, D. K. (2002-2021). Transana (version 4.00-Professional-Mac). http://www.transana.org/

# REALISATION D'UNE TACHE DE LOGIQUE EN 4H

Estelle Dunand, Maïssa Reider

Etudiantes, Université de Genève

Mots-clés : déduction logique, hypothèses, contraintes, stratégies

Cet article présente l'analyse de procédures d'élèves de 4H au cours de la résolution de problèmes de logique avec des contraintes accessibles aux élèves de ce degré. À partir des productions et vidéos filmées lors de l'intervention, nous souhaitons identifier leurs raisonnements et stratégies qui s'organisent dans un problème de déduction logique.

## INTRODUCTION

La déduction logique du type « si …, alors … » était très présente dans les moyens d'enseignement de mathématiques de 1997, et mise en avant dans les commentaires didactiques des documents d'accompagnement de 1998. Avec l'arrivée du PER, en 2010, la déduction logique reste présente à travers la résolution de problème. Cet article présente l'analyse d'une activité de logique issue des moyens d'enseignement COROME ainsi que sa réalisation dans une classe de 4H à Genève. Cette activité consiste en la résolution d'un problème de déduction logique de type énigme. Quelques adaptations de l'activité sont présentées ainsi que l'analyse de quelques procédures d'élèves.

## ENJEUX ET JEU SUR LES VARIABLES DIDACTIQUES

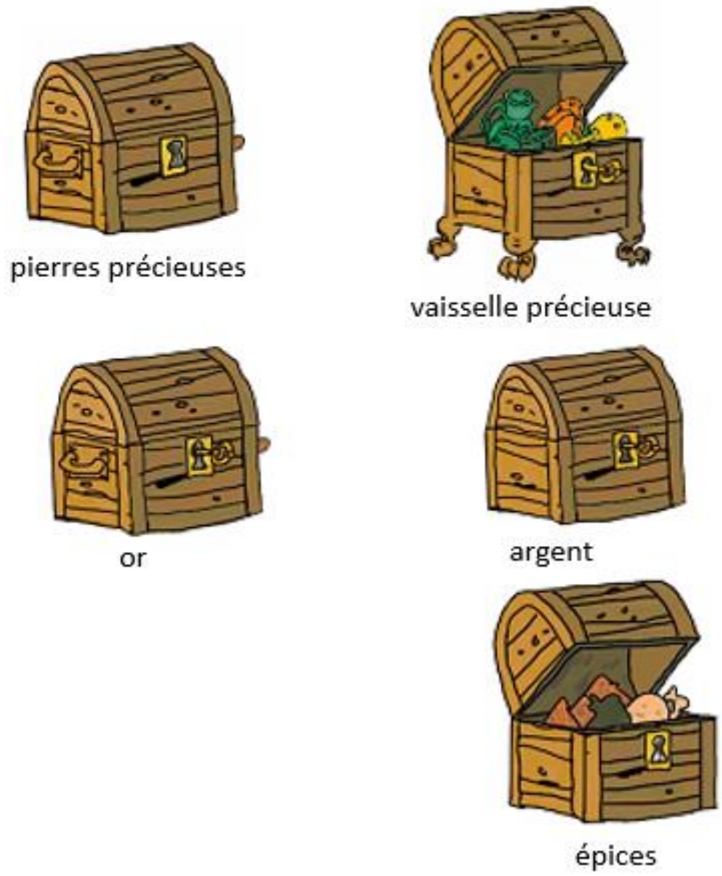
### Une activité de logique

Dans les commentaires didactiques des moyens d'enseignement COROME (Gagnebin, Guignard, Jaquet, 1998) les auteur-e-s mettent en avant divers aspects essentiels pour l'apprentissage d'une pensée mathématique et la préparation à la démonstration. L'élève doit développer une maitrise de la langue et « la logique lui offre un vocabulaire précis, en compléments des diagrammes, tableaux, graphiques et autres formes de représentation » (p. 69). Dans le moyen 1P (Ging, Sauthier et Stierli, 1997) le module 1 est consacré aux problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement. Dans ce module, une section composée d'énigmes vise à « exercer son raisonnement au travers d'activités qui demandent de lire, mettre en relation, classer, organiser des informations et utiliser des représentations personnelles pour se rappeler ou communiquer des informations » (Ging, Sauthier et Stierli, 1997, p.37). Parmi ces problèmes de recherche, l'énigme « De l'or » (Ging, Sauthier et Stierli, 1996, p. 67-68) présentée en Fig. 1, est une activité de « déduction logique à partir de phrases affirmatives » (Ging, Sauthier et Stierli, 1997, p. 49) dans laquelle les élèves doivent trouver le propriétaire d'un coffre en tenant compte de toutes les informations disponibles sous la forme de phrases indices. Cette activité concerne une classe de 4H et à ce niveau de scolarité, la lecture n'est pas encore fluide. Cela peut impliquer une difficulté supplémentaire chez certains élèves comme le soulève Calame (1999) concernant l'activité « Soyons logiques » (Gung, Sauthier, & Stierli, 1996, p. 85) pour les classes de 4H également.

**De l'or !**

Chaque coffre appartient à un seul pirate.
Barberousse et Barbejaune ont un coffre avec des poignées.
Barbebleue et Barbenoire ont un coffre ouvert.
Barbegrise et Barberousse ont un coffre fermé.
Barbejaune, Barbenoire et Barbegrise ont un coffre avec une clé.
Barbenoire a un coffre avec des pieds.

Comment s'appelle le pirate qui a le coffre rempli d'or ?




Le pirate qui a le coffre rempli d'or s'appelle ……………………… .

Fig. 9 : Énoncé de l'activité « De l'or »

Bien qu'apparaissant ici sur une même page, les élèves reçoivent une feuille avec les indices de l'énigme et une feuille avec les différents coffres. Il est ainsi possible de voir simultanément les deux feuilles.

La première phrase d'indices permet de mettre en relation le coffre de pierres précieuses et le coffre d'or avec Barberousse et Barbejaune, chaque coffre appartenant à l'un ou l'autre des pirates. La deuxième phrase d'indices permet de mettre en relation le coffre de vaisselle précieuse et le coffre d'épices avec Barbebleue ou Barbenoire, chaque coffre appartenant à l'un ou l'autre des pirates. La troisième phrase d'indices permet de mettre en relation le coffre de pierres précieuses, le coffre d'or et le coffre d'argent, avec Barbegrise ou Barberousse, chaque coffre appartenant à l'un ou l'autre des pirates. Or si on reprend la première phrase d'indices, Barberousse a un coffre avec poignées, le seul coffre avec poignées qui est aussi fermé est le coffre de pierres précieuses. En croisant les indices des première et troisième phrases, on obtient ainsi un nouvel indice. C'est ce que nous appelons une déduction logique. Cette déduction nécessite d'associer deux phrases d'indices. Si on reprend les indices sur les coffres avec poignées, le seul coffre avec poignées restant est le coffre d'or, il appartient donc à Barbejaune. Là encore, un nouvel indice est obtenu par déduction logique. Ainsi, les première et troisième phrases d'indices sont suffisantes pour résoudre le problème. Supposons maintenant que cette troisième phrase d'indices n'ait pas permis la première déduction logique et continuons la lecture des phrases. La quatrième phrase d'indices permet de mettre en relation le coffre de vaisselle précieuse, le coffre d'or et le coffre d'argent avec Barbejaune, Barbenoire et Barbegrise. Là encore, il est possible d'organiser les indices reçus pour déduire de nouveaux indices. Ainsi, le coffre de Barbejaune a des poignées et une clé, seul le coffre d'or remplit ces conditions. Bien que la solution soit trouvée, on peut continuer l'organisation des informations et déduire que Barbenoire a un coffre ouvert avec une clé, c'est-à-dire le coffre de vaisselle précieuse et Barbegrise à un coffre fermé avec une clé, c'est-à-dire le coffre d'argent. Supposons que les quatre premières phrases d'indices n'aient pas permis de résoudre la tâche, la cinquième phrase d'indices seule permet de mettre en relation Barbenoire avec le coffre de vaisselle précieuse. Cette dernière phrase d'indices permet une mise en relation immédiate et définitive entre un coffre et un pirate. De plus, si Barbenoire à le coffre de vaisselle précieuse, alors le deuxième coffre ouvert est à Barbebleue. La suite des associations passe par les déductions utilisant les première, troisième et quatrième phrases d'indices comme présenté précédemment. Pour répondre à la question posée, il n'est pas nécessaire de trouver tous les propriétaires des coffres, uniquement l'association de Barbejaune et le coffre d'or. Ainsi, il est possible de résoudre l'énigme sans utiliser la deuxième et de la dernière phrase d'indices.

La résolution de cette activité passe effectivement par la lecture et l'organisation des informations pour déduire la relation entre un pirate et un coffre. À travers l'étude de cette activité et l'analyse des procédures des élèves, nous souhaitons identifier comment des élèves de 4H organisent les informations (ici les indices) dans une démarche de déduction logique et comment ces organisations évoluent au cours de la résolution.

Avant d'observer une réalisation de cette activité en classe, nous analysons certaines variables didactiques et leurs valeurs afin de modeler l'activité à notre question de recherche.

## Variables didactiques

En modifiant certaines valeurs de variables didactiques (Dorier, 2010), dans le but d'observer plus finement l'évolution des stratégies des élèves, un nouvel énoncé a été proposé. Nous choisissons de nous focaliser sur trois variables didactiques. La première concerne la visibilité des deux collections. Dans l'énoncé initial, les indications sur les pirates sont sur une feuille et les coffres apparaissent sur une autre feuille. Il est possible de visualiser simultanément les phrases d'indices et les coffres. Afin de rendre ce traitement des informations moins immédiat et éventuellement de favoriser une organisation préalable des informations, nous disposons les phrases d'indices au recto de la feuille et les coffres sur le verso de la même feuille. Les nombreux allers et retours entre recto et verso peuvent alourdir une stratégie qui consiste à traiter immédiatement chaque phrase pour mettre en relation pirates et coffres au profit d'une stratégie qui organiserait les indices sur les coffres des pirates entre eux avant la mise en relation avec les coffres.

La seconde variable concerne le nombre de pirates et de coffres. Dans l'énoncé initial, pour chaque phrase d'indice 2 ou 3 coffres maximum sont candidats, et comme nous l'avons vu, finalement les 5 phrases ne sont pas nécessaires à la résolution. Afin de rendre le traitement et l'organisation entre les indices et les coffres nécessaires, nous rajoutons deux coffres, ce qui augmentera le nombre de coffres candidats à chaque phrase.

La troisième et dernière variable consiste en la modification de la consigne. Contrairement à l'énoncé initial, cette variable contraint alors les élèves à utiliser toutes les données, c'est-à-dire trouver un coffre appartenant à chaque pirate et non pas seulement le pirate propriétaire du coffre rempli d'or. Certaines formulations dans les énoncés de l'activité ont aussi été modifiées. Ainsi, dans le cas d'une formulation positive, l'accès aux informations est immédiat, alors que dans le cas d'une formulation négative, il est parfois nécessaire de traduire l'énoncé en une phrase affirmative. Nous pouvons par exemple prendre l'énoncé original suivant : « Barbebleue et Barbenoire ont un coffre ouvert. » que nous avons modifié en « Barbebleue et Barbenoire n'ont pas de coffre fermé. ». Ces deux énoncés sont-ils équivalents pour les élèves de 4H ? Comprennent-ils que « n'ont pas de coffre fermé » et « ont un coffre ouvert » sont des formulations avec la même signification ?

## Question de recherche

Nous souhaitons identifier comment des élèves de 4H organisent les informations (ici les indices) dans une démarche de déduction logique et comment ces organisations évoluent au cours de la résolution.

À l'aide de ces choix de valeurs de variables didactiques, les élèves sont incités à mobiliser des stratégies en lien avec la résolution de problème et la déduction logique avec l'organisation des informations et la mise en relation d'informations. Ce jeu sur les variables didactiques permet une évolution de l'énoncé présenté dans la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**.

Chaque coffre appartient à un seul pirate.
Barberousse et Barbejaune ont un coffre avec des poignées.
Barbebleue et Barbenoire n'ont pas de coffre fermé.
Barbegrise Barberousse et Barbejaune ont un coffre fermé.
Barbejaune, Barbenoire et Barbegrise ont un coffre avec une clé.
Barberousse et Barbebleue ont un coffre qui n'a pas de pieds.

Retrouve quel coffre appartient à quel pirate.
Barbebleue a un coffre rempli de ........................................ .
Barbenoire a un coffre rempli de ........................................ .
Barbegrise a un coffre rempli de ........................................ .
Barberousse a un coffre rempli de ........................................ .
Barbejaune a un coffre rempli de ........................................ .

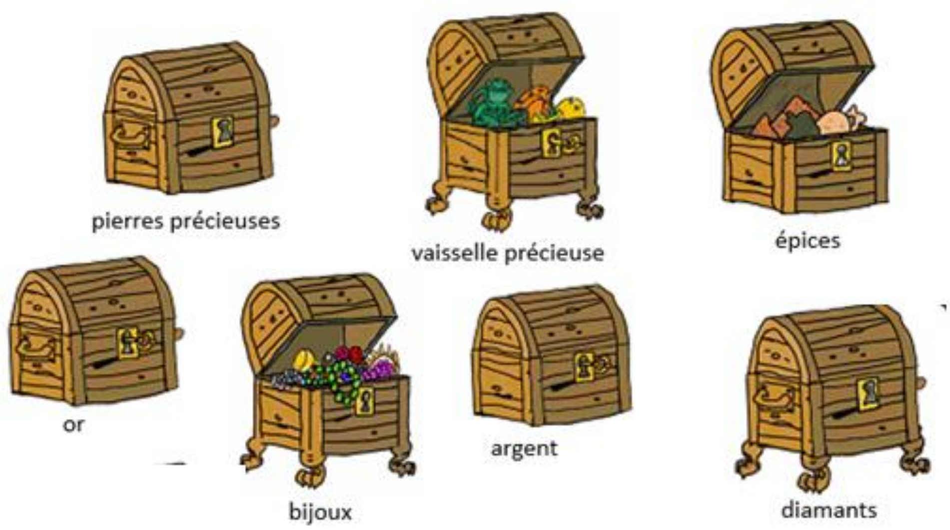



Fig. 10 : Nouvelle consigne de l'activité présentée sur une page recto verso

Voici une résolution possible de la nouvelle tâche. Il est possible de résoudre cette énigme en mettant en relation chaque phrase d'indices avec la collection de coffres. Dans ce cas il s'agit de faire des hypothèses sur des propriétaires potentiels pour les différents coffres, c'est-à-dire reprendre une résolution proche de celle présentée pour l'activité initiale. Cependant comme les phrases d'indices et les coffres ne sont plus visibles simultanément l'aller et retour entre les deux types d'informations devrait alourdir la résolution et inciter à une organisation préalable des indices. Ainsi il est aussi possible d'organiser les phrases en regroupant tous les indices concernant chaque coffre de pirate. On obtient alors que Barberousse a un coffre avec des poignées, fermé et qui n'a pas de pieds. Il a donc un coffre de pierres précieuses ou d'or. Barbejaune a un coffre avec des poignées, fermé et une clé, il a donc le coffre d'or. Cela implique que Barberousse a le coffre de pierres précieuses. Barbebleue a un coffre qui est ouvert et qui n'a pas de pieds, il a donc le coffre d'épices. Barbenoire a un coffre ouvert, avec une clé, il a donc le coffre de vaisselle précieuse. Barbegrise a un coffre fermé avec une clé, il a donc un coffre d'or ou d'argent, cependant comme Barbejaune a le coffre d'or, Barbegrise a donc le coffre d'argent. Cet exemple de résolution utilise un traitement des informations différent de la résolution proposée pour le problème initial, on retrouve les connaissances en lien avec l'organisation, la mise en relation d'information et la déduction logique.

## Stratégies

Selon Bessot (2003) pour qu'une situation soit vécue comme adidactique :

> - L'élève peut envisager une réponse, mais cette réponse initiale (procédure de base qui est relative aux savoirs et connaissances antérieurs) n'est pas celle que l'on veut enseigner : si la réponse était déjà connue, ce ne serait pas une situation d'apprentissage.
> - Cette procédure de base doit se révéler très vite insuffisante ou inefficace pour que l'élève soit contraint de faire des accommodations, des modifications de son système de connaissance. Il y a incertitude de l'élève quant aux décisions à prendre.
> - La connaissance visée est a priori requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie optimale. (p.8)

Dans cette activité de logique, les élèves peuvent directement tenter d'associer un coffre à un pirate en utilisant les indices de l'énoncé sans s'assurer de l'unicité de leur solution. Par exemple, avec la deuxième phrase d'indices, il est possible d'associer Barbebleue au coffre de vaisselle précieuse et Barbenoire au coffre de bijoux. Ainsi, les élèves peuvent tomber sur une bonne association, cependant l'augmentation du nombre de coffres réduit ce facteur de possibilités. Cette stratégie de base devrait être mise en défaut au cours de la résolution. Ainsi cette stratégie de base d'association « directe non exhaustive » doit être dépassée par une organisation des indices et des déductions logiques pour s'assurer de la validité par l'unicité de l'association pirate-coffre.

Une des stratégies optimales est le raisonnement par des hypothèses pour associer les coffres compatibles aux indices et ainsi associer chaque pirate aux coffres qui satisfont les conditions de l'énoncé. Cette stratégie « phrase par phrase » est celle qui a été utilisée pour résoudre l'activité initiale. Elle permet de réussir cependant, comme les phrases d'indices sont détachées visuellement des coffres elle peut être longue avec de nombreux aller-retour entre les informations et les coffres. De plus, elle exige un retour sur les phrases d'indices précédentes au fur et à mesure de la résolution. Il est possible que les élèves fassent des hypothèses en mettant le nom du coffre à côté du nom du pirate (collection des pirates au recto). Ces hypothèses doivent être complétées par des relectures des phrases indices pour en déduire de nouveaux indices et l'association pirate-coffres. Les élèves qui n'effectuent pas les déductions ne pourront pas résoudre la tâche. Ils comprennent le but de l'exercice, celui de faire correspondre les coffres aux pirates, mais ne comprennent pas forcément comment s'y prendre.

Une autre stratégie optimale, « organisation des indices » est de rassembler les indices pour chaque pirate puis de les utiliser sur la collection de coffres afin d'identifier quel coffre correspond aux groupes d'indices et d'en conclure à quel pirate il appartient. C'est la stratégie que nous avons utilisée pour résoudre la deuxième version de l'activité. Cette stratégie peut utiliser une modélisation pour l'organisation des indices. Nous définissons la modélisation comme « Modéliser signifie construire, discuter et étudier une correspondance entre deux (au moins) systèmes incluant des objets, des relations entre ces objets et questions » (Burgermeister & Dorier, 2013, p.11). En d'autres termes, le premier système, n'étant pas adapté, est transposé dans un autre système compréhensible, même s'il est complètement différent du premier. Ainsi les élèves peuvent construire un modèle sur les mots-indices (souligner, noter dans une bulle, etc.) ou ils peuvent dessiner les coffres et utiliser un modèle plutôt graphique.

Lors de leur résolution, les élèves peuvent utiliser différentes stratégies qui ne leur permettront pas de résoudre la tâche. Par exemple, certains élèves peuvent vouloir attribuer tous les coffres à un ou plusieurs pirates, sans se rendre compte qu'il y en a deux en trop. Il est aussi possible que les élèves ne reviennent pas sur les consignes pour vérifier que toutes les conditions sont satisfaites. Il est aussi possible que certains élèves ne traduisent pas les phrases négatives en phrases positives, donc utilisent une information incorrecte. Il est possible que des élèves utilisent ces stratégies et prennent conscience de leur insuffisance au cours de la résolution au profit de stratégies optimales. Elles peuvent aussi participer à la compréhension du problème et à l'intérêt d'organiser et mettre en relation les différents indices. Ces stratégies ainsi que la stratégie d'association directe non exhaustive sont rassemblées dans ce que nous nommons les stratégies de base.

Enfin, il y a deux méthodes que nous ne classons pas, car une n'est pas une stratégie, mais une aide à la réussite de la tâche et l'autre ne montre pas de stratégie visible. En effet, le fait de noter par un symbole une phrase négative apporte un complément aux stratégies, mais ne va pas permettre aux élèves de résoudre la tâche uniquement grâce à cette façon de faire. Ensuite, les réponses sans stratégies visibles sont des feuilles sur lesquelles il y a uniquement les réponses aux énoncés à compléter sans aucune indication sur les procédures de réalisation de la tâche, puisque le reste de la feuille est vierge.

## Analyse d'une réalisation en classe

### Déroulement

Dans le but d'analyser cette tâche, nous avons observé cette activité dans une classe genevoise de 4H. L'enseignante a suivi le déroulement initialement proposé. Elle a expliqué l'objectif de la séance, à savoir résoudre le problème posé. Après avoir lu la consigne à haute voix, l'enseignante a demandé aux élèves s'ils avaient des questions ainsi que des idées sur les diverses stratégies envisageables pour résoudre l'exercice proposé. C'est durant ce court temps de discussion qu'une élève a remarqué et oralisé au reste de la classe qu'il y avait 2 coffres en trop. Ensuite, les élèves se sont répartis dans la classe et l'enseignante a désigné trois élèves, qui ont été regroupés autour d'une table du fond pour faciliter notre observation.

Les élèves ont d'abord eu 15 minutes de résolution en individuel. Grâce à nos passages dans les rangs, il ressort que certains élèves n'ont pas compris la consigne, que d'autres n'ont rien eu le temps d'écrire et que quelques-uns ont fini l'exercice. Par exemple, un élève semble ne pas avoir compris la consigne en reliant les coffres aux mêmes caractéristiques et trois autres nous rendent des feuilles sur lesquelles il n'y a aucune trace écrite.

À la suite de ce temps de recherche individuel, l'enseignant a fait une première mise en commun. Lors de cette mise en commun, selon les réponses des élèves, le groupe a échangé autour de diverses stratégies comme le fait d'utiliser un signe (lettre, couleur ou chiffre) pour distinguer les pirates à côté des coffres. Les échanges ont abouti à la validation du coffre de Barbenoire. Cette mise en commun a permis le partage d'une procédure et l'association d'un coffre à un pirate. Le but était d'apporter aux élèves en difficulté des aides à la résolution.

Ensuite, les élèves continuent individuellement la résolution du problème et obtiennent une aide personnelle si besoin. À la suite de ce second temps de recherche, l'enseignante rassemble les élèves qui ont beaucoup de difficultés à terminer l'activité autour d'une table afin de leur apporter une aide plus spécifique.

Pour les élèves ayant terminé leurs exercices avant le reste de la classe, l'enseignante leur indique de continuer leurs travaux en cours.

### Analyse des procédures des élèves

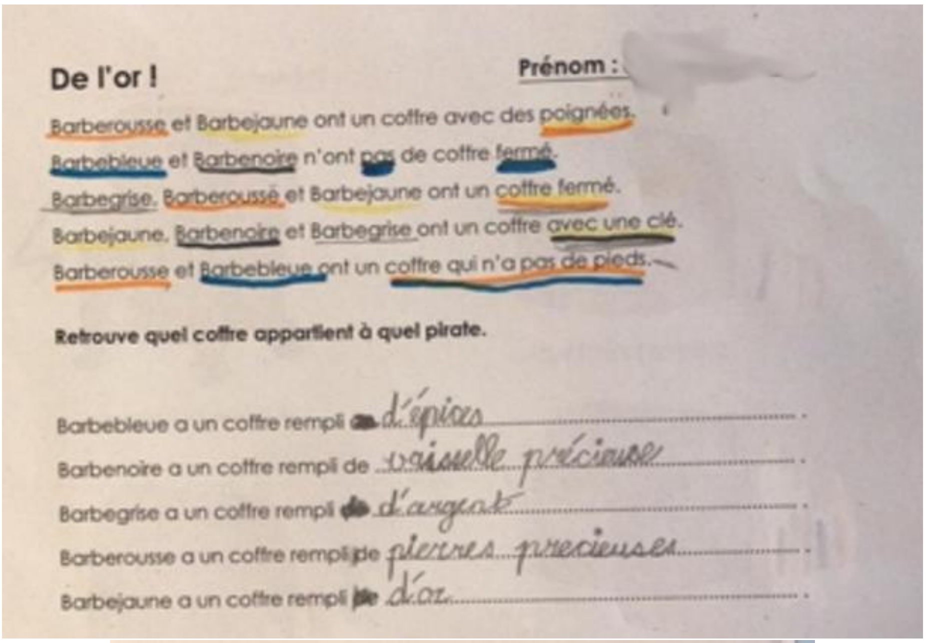
À la suite de la réalisation de l'activité en classe, nous analysons ce que nous avons observé tout en faisant des liens avec ce que nous avions initialement analysé des possibles stratégies des élèves par rapport à la nouvelle tâche et aux variables didactiques.

Le premier constat que nous partageons est que les élèves utilisent en général plusieurs stratégies pour résoudre cette tâche. De manière générale, nous constatons que 12 élèves sur 18 utilisent une notation (lettres, chiffres ou couleurs) pour distinguer les pirates. On relève que 4 élèves sur ces 12 ont utilisé cette stratégie par suite d'une aide qui leur a été apportée spécifiquement.


Fig. 11 : Exemple de notation pour distinguer les pirates

Le fait que les élèves utilisent une notation pour distinguer les pirates peut résulter de la première mise en commun où les élèves avaient relevé cette économie de notation des pirates. Sur les 12 élèves ayant utilisé la notation pour distinguer les pirates, 7 élèves ont également utilisé la stratégie phrase par phrase. Pour rappel, cette stratégie consiste à extraire les indices d'une première phrase d'indices pour les mettre directement en relation avec la collection de coffres.

La production présentée dans la Fig. 4 illustre l'utilisation de différentes stratégies chez un même élève.



De l'or ! Prénom :

Barberousse et Barbejaune ont un coffre avec des poignées.
Barbebleue et Barbenoire n'ont pas de coffre fermé.
Barbegrise, Barberousse et Barbejaune ont un coffre fermé.
Barbejaune, Barbenoire et Barbegrise ont un coffre avec une clé.
Barberousse et Barbebleue ont un coffre qui n'a pas de pieds.

**Retrouve quel coffre appartient à quel pirate.**

Barbebleue a un coffre rempli d'épices.
Barbenoire a un coffre rempli de vaisselle précieuse.
Barbegrise a un coffre rempli d'argent.
Barberousse a un coffre rempli de pierres précieuses.
Barbejaune a un coffre rempli d'or.

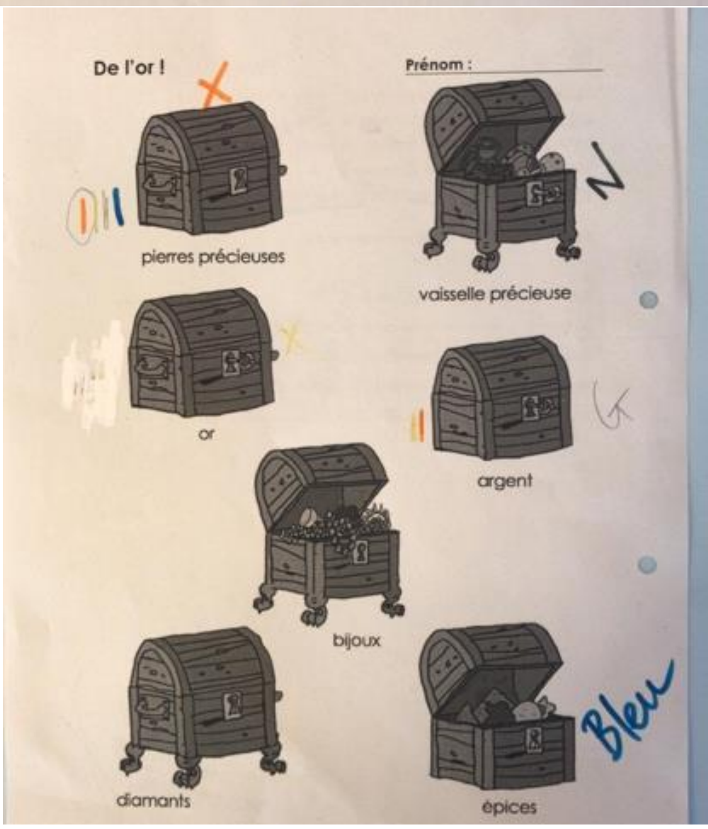



Fig. 12 : Production de KN

Si on regarde la page des coffres, le coffre de pierres précieuses est annoté par 4 traits, un orange, un jaune, un gris et un bleu. Ces traits renvoient certainement à des pirates potentiellement propriétaires du coffre. On peut supposer que l'élève a choisi ce premier coffre et a tenté de l'associer aux différentes phrases d'indices qui le concernent. C'est-à-dire qu'il cherche les indices relatifs à un coffre avec des poignées (première phrase d'indices avec Barberousse et Barbejaune candidats), fermé (troisième phrase d'indices qui ajoute Barbegrise candidat) et sans pieds (dernière phrase d'indices qui ajoute Babebleue candidat). On voit que cette stratégie ne permet pas, sur un seul coffre, de connaitre le propriétaire du coffre, elle s'avère inefficace et contraint l'élève à une modification. Il semble que l'élève change de stratégies et organise tous les indices de coffres concernant chaque pirate. Tous les indices du coffre d'un pirate sont soulignés avec la couleur du pirate associé. Par exemple les indices du coffre de Barberousse sont soulignés en orange, ceux du coffre de Barbebleue sont soulignés en bleu. Puis l'élève cherche le coffre correspondant à l'ensemble des indices soulignés d'une même couleur dans la collection des coffres. La première stratégie permet pour chaque coffre de lui associer tous les pirates candidats, c'est-à-dire ceux qui possèdent un coffre ayant une caractéristique commune au coffre. Pour pouvoir conclure, l'élève doit ensuite mettre en relation les indices, faire des déductions qui permettent d'éliminer certains pirates candidats. En changeant de stratégie, l'élève organise les indices directement par l'utilisation de la couleur. On retrouve la stratégie optimale « organisation des indices ».

La production de DO présentée en Fig. 5 est difficile à analyser, mais comme nous avons pu observer l'élève, nous complétons notre analyse par l'observation faite en classe.

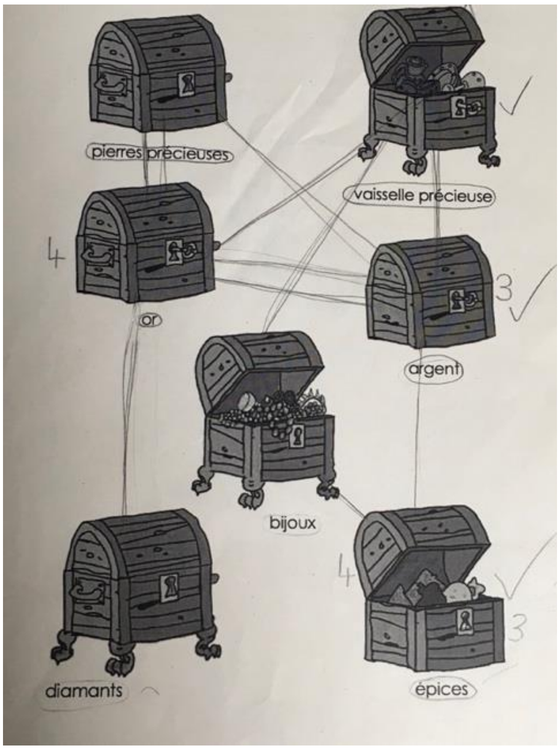



Fig. 13 : Production de DO

Cet élève commence sa résolution de la tâche en lisant chaque phrase d'indices et choisit un coffre compatible avec les indices. Il tire des conclusions en fonction de ce qu'il vient de lire en trouvant un coffre issu de la dernière phrase lue et l'associe au pirate, sans regarder les autres possibilités de coffres ayant la même caractéristique. De plus, cet élève n'a pas de difficultés de lecture, mais dans cet exercice, nous déduisons qu'il lisait trop vite, car il a lu « poignards » à la place de « poignées » et n'est pas revenu sur l'énoncé lu. À la suite de cette lecture erronée, il conclut et explique à l'une d'entre nous que les poignards se trouvent avec des bijoux et que, par conséquent, le coffre de bijoux appartient à Barbebleue (qui est le premier pirate écrit dans la liste à remplir). Cet élève ne revient également pas sur les consignes, puisqu'il fait des hypothèses sans vérifier leur validité. Il note donc les informations lues, mais sans faire de liens entre elles donc faisant des déductions incohérentes avec le reste des contraintes, mais logiques avec la consigne lue. Ainsi, cet élève utilise la déduction dans le choix du coffre, car il utilise un indice cependant en n'organisant pas les indices il ne peut avoir un choix exhaustif et valide.

Ensuite, il décide de recommencer son exercice et rassemble tous les coffres aux mêmes caractéristiques en les reliant. Par exemple, il relie tous les coffres fermés et ajoute un 4 à côté du dernier trait, pour signifier qu'il y en avait quatre de cette catégorie (cf. Fig. 5). Ici, il y a donc de la modélisation, puisqu'il transpose l'exercice original dans un autre exercice qu'il comprend : au lieu de trouver le coffre correspondant à son propriétaire, il trouve tous les coffres partageant des propriétés et les compte par catégorie. Ainsi l'élève semble prendre conscience du besoin d'organiser les indices, ce qu'il fait sur la page des coffres.

Toutefois, c'est lorsqu'une adulte lui vient en aide en le guidant dans sa résolution de problème qu'il réussit la tâche, grâce à la prise d'information phrase par phrase, d'une organisation des indices et d'une relecture des phrases indices.

L'utilisation de ces différentes stratégies de base illustre une appropriation progressive de la tâche par l'élève même s'il ne parvient pas à la résoudre seul. D'autres élèves (DO et AÏA) sont des élèves qui rencontrent beaucoup de difficultés, même après avoir bénéficié d'une aide personnelle. En effet, ces élèves réussissent la tâche avec l'aide de l'enseignante, mais s'ils devaient refaire l'exercice par eux-mêmes, ils n'en seraient sûrement pas capables. Ces élèves ainsi que d'autres (EA et AM) semblent ne pas savoir comment entrer dans la tâche, donc par où commencer. Ils associent un coffre à un pirate sans s'assurer de la validité de l'association. Cependant, après une aide personnelle apportée par l'enseignante, ces élèves comprennent qu'il faut faire des déductions pour donner suite à la lecture de l'énoncé. Ils lisent chaque phrase sans les organiser avec les autres indices. De ce fait, ils ne reviennent pas au début des consignes pour vérifier que leurs réponses soient cohérentes.

Si l'élève DO utilise principalement la feuille des coffres dans sa résolution, l'élève LO (Fig. 6) utilise la feuille des phrases indices avec une modélisation qui utilise les dessins des coffres.

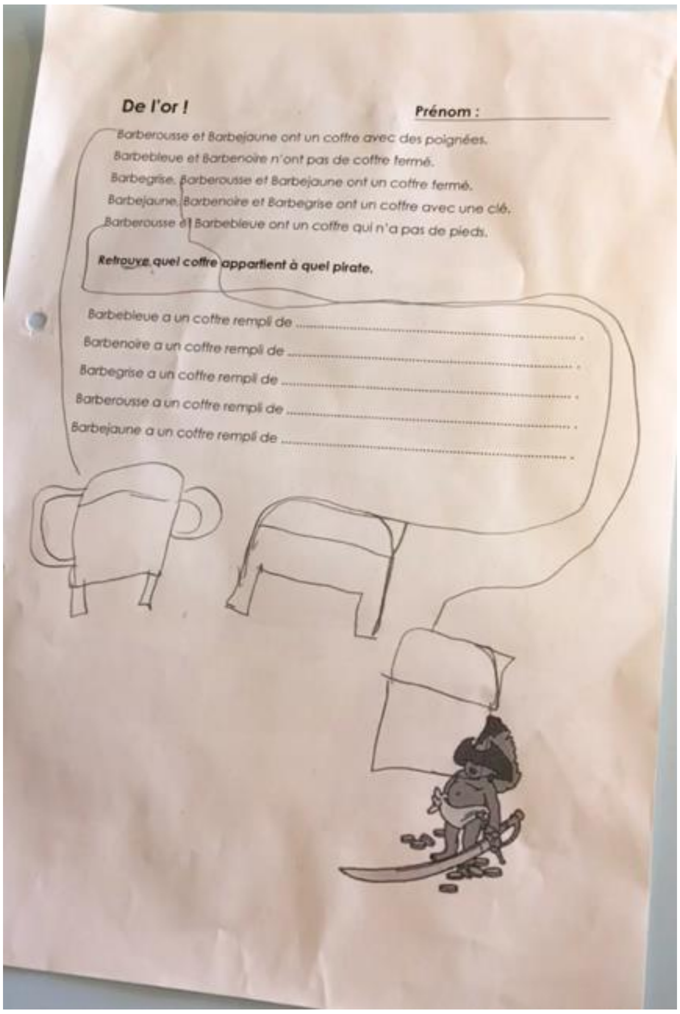



Fig. 14 : Trace montrant le regroupement des coffres selon la caractéristique « fermée »

Cette stratégie nécessite d'extraire des informations des phrases concernant un seul pirate à chaque fois, puis de dessiner chaque caractéristique du coffre. Par exemple, pour Barberousse, il dessine sur le recto de sa feuille un coffre avec des poignées, un deuxième coffre fermé et un troisième sans pieds. Il retourne ensuite sa feuille puis repère les trois caractéristiques pour retrouver le coffre correspondant au pirate. Cette stratégie lui coûte beaucoup de temps, et il s'en rend compte rapidement. À la suite d'un échange avec une observatrice, il change de stratégie en utilisant la notation de lettres au verso de la feuille et l'extraction d'indices pour chaque pirate. Là encore l'évolution des stratégies illustre une évolution dans la compréhension de la tâche.

### Efficacité des variables et des stratégies en termes d'apprentissage sur la classe

À la suite de cette analyse, nous nous rendons compte que les stratégies énoncées dans l'analyse *a priori* ne sont pas toutes observables et ne sont pas toutes des stratégies, mais parfois des façons de faire pour aider les élèves. Par exemple, le fait de se rendre compte, ou non, de la présence des phrases négatives n'est pas une stratégie en elle-même, mais une aide (ou une entrave) à la réussite de l'exercice. Nous avons augmenté le nombre de coffres dans le but d'augmenter le nombre de possibilités à étudier. Les élèves maîtrisent cette augmentation et comprennent rapidement que des coffres vont se retrouver sans propriétaires.

Une des variables didactiques concerne la visibilité des deux collections. Cette dernière gêne la façon de travailler des élèves, mais pas leur façon de réfléchir ou de résoudre la tâche sauf pour un élève, LO, qui a commencé sa résolution en dessinant le regroupement des coffres selon la caractéristique « fermée ».

Le changement dans la consigne qui nécessite l'utilisation de toutes les données pour résoudre le problème a effectivement obligé les élèves à interpréter toutes les phrases indices lors de la résolution.

Le changement qui concerne la modification de la consigne par le biais d'insertion de négation dans les phrases originales n'a pas spécifiquement mis en difficulté les élèves. Par ailleurs, il y a un élève (LO) qui note cette distinction entre les phrases positives et les phrases négatives par un symbole.

Nous remarquons que certaines stratégies apparaissent à la suite de la première intervention de l'enseignante avec la classe. Par exemple, elle reprend, lors de ce moment, l'utilisation de la stratégie de noter des lettres ou des chiffres pour distinguer les pirates, en lisant les informations phrase par phrase. Toutefois, certains élèves utilisent déjà cette notation lors des 15 premières minutes de travail en individuel.

## Conclusion

En résumé, cette activité observée demande d'utiliser le mode de raisonnement de l'exhaustivité des cas en étudiant toutes les possibilités d'association pirate-coffre. Chaque phrase d'indices correspond à plusieurs coffres, ne permet pas de trouver la réponse directement. Il y a également de la déduction logique, puisque les élèves doivent déduire des informations à partir de ce qui est donné ou de ce qui a déjà été trouvé auparavant. Par exemple, si un coffre peut être associé à plusieurs pirates possibles, il faut ensuite déduire lequel correspond au bon propriétaire, en fonction des énoncés suivants ou précédents. Selon Gagnebin, Guigrard et Jaquet (1997), les élèves peuvent donc, grâce à ce problème « développer des stratégies de recherche, » en constituant « un ensemble de procédures organisées : effectuer de nombreux essais, formuler des hypothèses, [et] contrôler leurs résultats » (p.73). Ils doivent également « mettre en relation *plusieurs* données » (ici les collections) « ou encore plusieurs attributs relatifs à deux critères différents. » (p.68).

Les difficultés de lecture liées au degré scolaire de la classe (4H) viennent cependant entraver la résolution. La maitrise de la lecture par la compréhension et l'interprétation des phrases d'indice devient un prérequis essentiel qui permet de favoriser un travail sur le traitement et l'organisation des données plus fluide.

## Bibliographie

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Cahier du laboratoire Leibniz, 91*, 1-28.

Burgermeister, P.-F. & Dorier, J.-L. (2013). La modélisation dans l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. *Petit x, 91*, 5-24.

Calame, J.-A. (1999). Sensibiliser à l'explication d'une démarche : trouver un juste milieu ! *Math-Ecole, 186*, 13-16.

Gagnebin, A., Guigrard, N. & Jaquet, F. (1998). *Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Genève : Ed-1998.

Ging, E., Sauthier, M.-H. & Stierli, E. (1997). *Mathématiques*, *Deuxième année, Livre du maitre*. Neuchâtel : COROME.

Ging, E., Sauthier, M.-H. & Stierli, E. (1996). *Mathématiques*, *Deuxième année, Fichier élève*. Neuchâtel : COROME.

RMÉ POUR CELLES EST CEUX QUI S'INTÉRESSENT À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.revue-mathematiques.ch, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 1 depuis la rubrique *Consultation*.

**Contact :** revue.mathematiques@gmail.com

**Site internet :** www.revue-mathematiques.ch