

RMé 238

238

RMé

REVUE DE MATHÉMATIQUES
POUR L'ÉCOLE

SEPTEMBRE 2022

ISSN : 2571-516X

EFFETS DES MODALITES D'ORGANISATION DU TRAVAIL EN GROUPE ET DES VARIATIONS DE TACHES ASSOCIEES SUR LES ACTIVITES MATHEMATiques DES ELEVES : LE CAS DE L'ESTIMATION D'UNE AIRE.	3
Dorian Cotron.....	3
LA SCHEMATISATION : UN OUTIL POUR COMPRENDRE ET RESOUDRE UN PROBLEME MATHEMATIQUE DANS UNE CLASSE DE 6H	19
Laura Anderegg	19
ETUDE EXPLORATOIRE DE PROCEDURES D'ELEVES DE 7-8 ANS EN CALCUL MENTAL ADDITIF	29
Nadine Grapin ¹ , Françoise Chenevotot-Quentin ² , Laurence Ledan ³ , David Beylot ¹ , Eric Mounier ¹ , Aline Blanchouin ⁴	29
ÉVALUATION DE DEUX APPLICATIONS NUMERIQUES POUR LE CALCUL EN 5H-6H	41
Marie-Line Gardes ¹ , Ludivine Hanssen ¹ , Michel Deruaz ¹ , Céline Hugli ¹ , Jasinta Dewi ²	41

EFFETS DES MODALITES D'ORGANISATION DU TRAVAIL EN GROUPE ET DES VARIATIONS DE TACHES ASSOCIEES SUR LES ACTIVITES MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES : LE CAS DE L'ESTIMATION D'UNE AIRE.

Dorian Cotron¹

Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR

Mots-clés : activités des élèves, travail en groupes, aires, différenciation

Résumé : Cet article montre comment les activités d'un groupe d'élèves – « ce qu'ils font (ou non), disent (ou non), écrivent (ou non) » (Abboud et al., 2017, p.3) lors de la réalisation d'une tâche – sont influencées par le choix de l'organisation du travail en groupe et la tâche proposée. Cette étude est spécifiée à l'approximation des aires en classe de 6^e en France.

INTRODUCTION

Avant toute chose, le contexte dans lequel cette recherche a été réalisée est celui de la formation initiale en France au métier de l'enseignement et du master MEEF² : nous présentons un travail que nous avons réalisé en tant qu'étudiants pour notre mémoire de fin d'études.

Ce travail de mémoire porte sur la gestion de l'hétérogénéité des élèves de classe de 6^e en France (11-12 ans)³ par différents moyens de différenciation pédagogique simultanée. Nous avons emprunté la définition et une typologie des hétérogénéités à Sarrazy (2002) et n'y revenons pas dans la suite de l'article. Nous prenons pour acquis le fait que le travail en groupe est une modalité, parmi de nombreuses autres, pour pratiquer une différenciation pédagogique simultanée. La question qui nous intéresse ici n'est donc plus celle de la gestion de l'hétérogénéité, mais bien plus précisément, celle des apprentissages mathématiques possibles des élèves lors de travaux en groupe sur un contenu donné : ici les aires.

Notre objectif est de mettre en perspective les apprentissages possibles des élèves au regard de l'organisation du travail en groupe adoptée et des tâches proposées à chacun de ces groupes.

CADRAGE THÉORIQUE ET PROBLÉMATIQUE

Pour approcher les apprentissages des élèves, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'activité (Robert, 2008) : nous admettons l'hypothèse selon laquelle les apprentissages mathématiques se développent au travers des activités mathématiques réalisées par les élèves lors de la résolution d'une tâche, que l'on définit par le but à atteindre sous certaines conditions (Rogalski, 2008). Les activités des élèves sont donc dépendantes des tâches et des conditions⁴ de leur réalisation qui sont le plus souvent issues des choix effectués par l'enseignant.

L'ensemble des activités effectives des élèves reste inobservable et ce sont certaines traces (Abboud et al., 2017) qui vont nous permettre de reconstituer les activités possiblement réalisées. Les traces observables

¹ Doctorant au LDAR sous la direction de Julie Horoks.

² Master Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation.

³ En France, la classe de 6^{ème} est la première de l'enseignement secondaire (élèves de 11-12 ans). L'équivalent suisse en âge est le niveau 8H.

⁴ Le temps alloué, le matériel disponible, l'organisation individuelle ou collective du travail, le support de travail des élèves,...

des activités des élèves que nous considérons sont de trois natures différentes et nous les nommons ici « actions » des élèves : orales, écrites ou physiques/matérielles.

Chaque action peut avoir pour support des objets différents ce qui nous amène à reprendre, en les adaptant les quatre types d'activités identifiées dans Bisault et Berzin (2009) qui nous semblent recouvrir l'ensemble des possibles pour les élèves lors de la résolution d'une tâche mathématique :

- des **activités mathématiques** qui concernent les interactions de l'élève avec des objets mathématiques qu'ils soient décontextualisés (discuter de propriétés, de techniques possibles) ou contextualisés sur la situation proposée (application d'un modèle à la situation, application de techniques identifiées préalablement, justifications). Afin d'étudier plus en détail les activités mathématiques et de pouvoir prendre en compte, dans nos analyses, les effets des modulations de la même tâche du point de vue des mathématiques en jeu, nous avons fait appel aux niveaux de mise en fonctionnement des connaissances et aux adaptations des connaissances définies par Robert (2008).
- des **activités techniques** qui regroupent les interactions avec des objets qui permettent la résolution de la tâche, mais ne sont pas à proprement parler mathématiques. Prenons pour exemple, la recherche d'une touche sur la calculatrice, la précision d'un tracé ou encore l'organisation du travail au sein du groupe.
- des **activités d'observation** qui visent à prendre du recul sur les résultats obtenus, sur le choix d'un modèle, à confronter ses idées avec autrui.
- des **activités de sortie** qui regroupent toutes les opérations des élèves qui n'ont aucun lien avec la résolution de la tâche.

Nous faisons l'hypothèse que c'est en maximisant les activités mathématiques que les apprentissages mathématiques développés par les élèves seront les plus nombreux. Afin de décrire les activités mathématiques, nous reprenons les outils d'analyses classiques de la théorie de l'activité. D'abord, nous avons identifié les aspects curriculaires du relief (Robert & Vivier, 2013) sur les aires à partir des documents officiels afin d'identifier le niveau de conceptualisation attendu (Robert et al., 2012). Nous analysons ensuite la tâche, *a priori*, en cherchant les connaissances mises en jeu et leur statut (ancien/nouveau) dans les différentes procédures de résolution. Pour chaque procédure, nous identifions les adaptations des connaissances nécessaires (voir annexe 2) ce qui nous permet de définir le niveau de mise en fonctionnement des connaissances pour la tâche (Robert, 2008). *A posteriori*, nous reconstituons le déroulement effectif dans la classe pour approcher les activités possibles des élèves. Pour cela, nous nous intéressons aux interactions entre élèves d'un même groupe et aux interactions des groupes avec l'enseignant en ce qu'elles peuvent guider ou non les activités réalisées par les élèves.

Afin de répondre à notre objectif de différenciation pédagogique simultanée, ces outils nous ont permis de proposer plusieurs déclinaisons d'une même tâche, adaptées à la composition des différents groupes que nous présentons ci-dessous.

Les typologies du travail de groupe sont nombreuses, que ce soit dans le champ de la recherche en éducation ou du côté institutionnel. Notre intérêt initial sur la différenciation pédagogique nous a conduits à considérer trois organisations de groupes parmi la typologie des groupes d'apprentissage définie par Astolfi (1988) : les groupes de confrontation qui visent à organiser la confrontation de points de vue initiaux différents afin de provoquer leur dépassement, les groupes d'assimilation dont le but est de laisser aux élèves le temps de se redire, avec leurs propres mots, une notion déjà présentée, et enfin les groupes de besoin qui permettent la reprise d'une notion et son approfondissement, en tenant compte de difficultés précises et constatées.

C'est à partir de cette typologie que nous avons fait le choix de leur constitution :

- les groupes de confrontation seront constitués d'élèves de niveaux globaux hétérogènes nous parlons dans la suite de « groupes hétérogènes » ;

- les groupes d'assimilation seront constitués d'élèves de niveaux globaux homogènes que nous nommons dans la suite « groupes homogènes » ;
- les groupes de besoins seront constitués d'élèves présentant des difficultés similaires sur des éléments de la notion aire identifiée dans le relief.

Au regard des éléments théoriques développés, quels sont les effets des variables « organisation en groupes » et « tâche proposée » sur les activités des groupes d'élèves ? En particulier, quelles conditions sur la tâche proposée et/ou l'organisation du travail en groupe semblent favoriser les activités mathématiques des groupes d'élèves ?

Nous faisons deux hypothèses générales que nous mettons à l'étude. La première est que les trois différents types d'organisation de groupes qui nous intéressent sont tous à même de favoriser les activités mathématiques des élèves. La deuxième hypothèse est que la tâche proposée influence davantage les activités des élèves que l'organisation en groupes.

MÉTHODOLOGIE DE RECUEIL ET D'ANALYSE DES DONNÉES

Constitution du corpus

CONTEXTE

Les expérimentations ont été conduites dans trois classes de 6^e, dans deux établissements. Nous étions les enseignants de deux de ces classes. L'expérimentation a lieu en fin de séquence sur les aires. L'ensemble des tâches proposées en classe lors de la séquence sur les aires a été identique dans les trois classes cependant le déroulement de la séquence n'a pas été analysé.

Pour chacune des classes, nous avons choisi une organisation de travail en groupe différente parmi le travail en groupes hétérogènes, le travail en groupes homogènes et le travail en groupes de besoin. Les trois classes présentent des niveaux similaires, et ont pour habitude de travailler régulièrement en groupes ; ainsi l'attribution d'un type de groupe à chacune s'est faite indifféremment.

Dans chacune des classes, afin de constituer les différents groupes, nous avons fait passer une évaluation diagnostique individuelle à tous les élèves proposant une tâche de calcul d'aire à l'aide de formules, une tâche de détermination d'aire et périmètre à partir d'un quadrillage et une tâche d'estimation d'aire à partir d'un quadrillage. Les groupes hétérogènes et les groupes homogènes ont été constitués sur la base de la note globale obtenue à l'évaluation diagnostique : ceci nous a amenés à conserver les groupes hétérogènes déjà formés dans une classe et qui ont l'habitude de travailler ensemble. Pour les groupes homogènes nous avons défini quatre niveaux, des élèves les plus en réussite (niveau 1) à ceux les moins en réussite (niveau 4). Les groupes de besoin ont été constitués à partir d'une analyse des résultats de l'évaluation tâche par tâche. Les besoins des élèves ont été identifiés à partir de cette évaluation diagnostique et hiérarchisés en fonction de la distance avec le niveau de conceptualisation attendu sur les aires en 6^e. En partant du besoin le plus éloigné du niveau de conceptualisation visé sur les aires, nous avons identifié :

- le besoin de travailler sur la « grandeur aire » pour la différencier de la grandeur « longueur » ;
- le besoin de travailler sur l'utilisation de formules de calcul pour déterminer une aire ;
- le besoin de travailler sur la construction de figures usuelles ;
- le besoin de travailler la prise d'initiative face à une tâche complexe.

Lorsqu'un élève présentait plusieurs besoins, il a été placé dans le groupe où le besoin nous apparaissait comme le plus éloigné du niveau de conceptualisation attendu.

RECUEIL DE DONNÉES

L'expérimentation a été menée sur une séance d'une heure. Nous avons utilisé des enregistreurs vocaux pour enregistrer chaque groupe ainsi que deux caméras dans chaque classe qui filmaient le déroulement pour deux groupes. Par la suite, nos analyses n'ont été réalisées que sur les seuls groupes qui ont été à la fois enregistrés en audio et en vidéo en raison de l'importance accordée aux gestes physiques des élèves.

Nous avons également récupéré toutes les productions écrites des élèves pendant cette séance afin de soutenir nos analyses du déroulement.

Nous avons fait le choix d'utiliser une tâche (annexe 1) dont la résolution nécessite, *a priori*, que les connaissances nécessaires soient au niveau de mise en fonctionnement disponible. L'analyse *a priori* de cette tâche est disponible en annexe 2. Les différentes déclinaisons ont été pensées, en appui sur cette analyse *a priori*, dans le but de réduire les choix à la charge des élèves tout en conservant un maximum de traitement de la part des élèves. C'est donc sur les consignes de la tâche que nous avons agi en effectuant certains des choix nécessaires à la résolution de la tâche de base.

Dans les groupes homogènes, les déclinaisons de cette tâche de base sont réalisées à partir d'une même procédure à savoir « calculer l'aire de figures usuelles approximant l'aire de la ville ». Le niveau 1 est la tâche de base dans laquelle plusieurs procédures sont possibles, le niveau 2 consiste à définir la procédure à suivre en annonçant la construction de figures usuelles (annexe 3), le niveau 3 présente la même tâche que le niveau 2 avec les figures déjà construites (annexe 4), le niveau 4 reprend la tâche du niveau 3 en la découpant en plusieurs étapes et en associant le formulaire de calcul d'aires des figures usuelles (annexe 5).

Dans les groupes de besoin, les déclinaisons sont réalisées selon les besoins identifiés *a priori* grâce à l'évaluation diagnostique. Pour le besoin lié à la prise d'initiative, nous avons proposé la tâche de base, pour le besoin de construction de figures usuelles la tâche proposée est la même que pour le niveau 2 des groupes homogènes, pour le besoin de calculs d'aires la tâche est identique au niveau 3 homogène, pour le besoin sur la grandeur aire la tâche proposée demande d'utiliser un pavage pour estimer l'aire (annexe 6).

Classe 1 – Groupes Hétérogènes				
Tâche	Tâche de base			
Analyse	2 groupes			
Classe 2 – Groupes Homogènes				
	Niv1 (expert)	Niv2 (réussite)	Niv3 (difficultés)	Niv4 (échec)
Tâche	Tâche de base	Tâche de base avec consigne de constructions de figures	Tâche des base avec figures tracées	Tâche de base avec figures tracées, formulaire de calcul et consignes intermédiaires
Analyse	1 groupe	Non analysé	Non analysé	1 groupe
Classe 3 – Groupes de besoin				
	Prise d'initiative	Constructions de figures	Calculs d'aire de figures usuelles	Grandeur aire
Tâche	Tâche de base	Tâche de base avec consigne de constructions de figures	Tâche de base avec figures tracées	Tâche de base avec consigne de construction d'un pavage
Analyse	1 groupe	Non analysé	Non analysé	1 groupe

Fig. 1 : Déclinaison de la tâche de base proposée en fonction de l'organisation des groupes

ORGANISATION DES ANALYSES DES DÉROULEMENTS POUR CHAQUE GROUPE OBSERVÉ

L'analyse du déroulement de la séance s'est construite en plusieurs niveaux successifs. Le premier est celui de l'analyse des activités du groupe d'élèves que nous avons codées à l'aide de la matrice élaborée à partir des quatre types d'activités et des trois types d'actions.

Activités Actions	Mathématiques	Techniques	Observation	Sortie
Orales	ORA MAT <i>Ex : Discuter des interprétations ou modèles mathématiques</i>	ORA TEC <i>Ex : Discuter de la manipulation de matériel (calculatrice, géométrie)</i>	ORA OBS <i>Ex : Discuter des différents résultats obtenus et de leur vraisemblance</i>	ORA SOR <i>Ex : Discussion sans rapport avec la tâche</i>
Ecrites	ECR MAT <i>Ex : Produire un texte explicatif (le fond) ou des calculs</i>	ECR TEC <i>Ex : Produire un texte explicatif (la forme)</i>	ECR OBS <i>Ex : Ecrire des résultats intermédiaires pour les vérifier</i>	ECR SOR <i>Ex : Dessin, « petits mots » sans rapport avec la tâche</i>
Matérielles et physiques	PHY MAT <i>Ex : Construction de figures avec des outils, utilisation de la calculatrice</i>	PHY TEC <i>Ex : Tailler un crayon, effacer une production</i>	PHY OBS <i>Ex : Effectuer des mesures, fixer l'écrit technique d'un camarade et l'analyser</i>	PHY SOR <i>Ex : Jouer avec sa trousse, crayon ... seul ou à plusieurs</i>

Fig. 2 : Matrice d'analyse croisée des activités et des actions

Le deuxième niveau d'analyse du déroulement est une reconstitution chronologique prenant en compte les activités des élèves et celles de l'enseignant. Le passage d'un épisode à un autre correspond le plus souvent au passage d'un type d'activité à une autre. Ces tableaux ont été reconstruits pour chaque groupe analysé.

Temps	Activités de l'enseignant	Activités du groupe	Description
3'	Deux interventions pour s'assurer de la mise au travail des élèves.	ECR MAT	Travail individuel. Les quatre élèves réfléchissent individuellement sur l'exercice en prenant des notes.
5'	Deux interventions ciblant individuellement les élèves qui ne participent pas à la résolution de la tâche.	ECR MAT PHY SOR ECR SOR	Travail individuel. Mickael et Cécile sont au travail individuellement pendant les 5 minutes. Alain travaille sur l'exercice en se laissant distraire de temps en temps en jouant avec sa trousse ou sa colle. Marine travaille pendant seulement 2 minutes, puis écrit des mots et fait du dessin.

Fig. 3 : Exemple de tableau d'analyse chronologique du déroulement de séance du groupe homogène de niveau 4

Enfin, le troisième niveau d'analyse du déroulement est celui de la synthèse des temps des activités des groupes. Ce sont ces tableaux qui sont à la base de comparaisons entre les groupes d'une même classe. Nous pouvons noter que dans l'exemple choisi, le temps total n'est pas celui de la séance, mais la somme des temps d'activités identifiées. Cette limite méthodologique est due au fait que lorsque plusieurs activités se mélangent sur un épisode qu'il ne nous a pas été possible de découper, nous avons compté le temps total de la phase pour chaque type d'activité. De plus, considérant les activités du groupe, nous avons codé les activités qui engageaient une majorité d'élèves dans le groupe, omettant certaines activités individuelles des élèves.

	MAT	TEC	OBS	SOR	Total
ORA	10 min 13%	4 min 5,5%	4 min 5%	16 min 21%	34 min 44,5%
ECR	21 min 28%	4 min 5,5%	0 min 0%	7 min 9%	32 min 42,5%
PHY	0 min 0%	0 min 0%	0 min 0%	10 min 13%	10 min 13%
Total	31 min 41%	8 min 11%	4 min 5%	33 min 43%	76 min 100 %

Fig. 4 : Exemple de synthèse des temps par types d'activités du groupe homogène de niveau 4

À partir de ces tableaux, nous organisons une double comparaison afin de mettre en avant les effets des variables « organisation des groupes » et « tâche proposée » sur les activités des groupes. D'une part, nous comparons les synthèses pour les groupes ayant eu la même tâche afin d'y voir les effets de l'organisation des groupes, et d'autre part nous comparons deux à deux les groupes d'une même classe ayant eu des tâches différentes à résoudre. Dans cette deuxième comparaison, ce sont les effets de la tâche que nous cherchons à mettre en avant, bien que le choix même de la tâche soit dépendant de l'organisation des groupes.

RÉSULTATS

Effets de l'organisation des groupes sur les types d'activités développées à tâche égale

Groupe hétérogène 1					
	MAT	TEC	OBS	SOR	Total
ORA	28%	3%	14%	10%	55%
ECR	6%	6%	0%	0%	12%
PHY	22%	0%	7%	4%	33%
Total	56%	9%	21%	14%	100%

Groupe hétérogène 2					
	MAT	TEC	OBS	SOR	Total
ORA	7%	3%	5%	27%	42%
ECR	53%	0%	0%	5%	58%
PHY	0%	0%	0%	0%	0%
Total	60%	3%	5%	32%	100%

Groupe homogène niveau 1					
	MAT	TEC	OBS	SOR	Total
ORA	33%	2%	12%	21%	68%
ECR	22%	10%	0%	0%	32%
PHY	0%	0%	0%	0%	0%
Total	55%	12%	12%	21%	100%

Groupe de besoin « initiative »					
	MAT	TEC	OBS	SOR	Total
ORA	24%	11%	5%	21%	61%
ECR	26%	8%	0%	0%	34%
PHY	0%	2%	0%	3%	5%
Total	50%	21%	5%	24%	100%

Fig. 5 : Synthèse par types d'activités des groupes ayant eu à résoudre la « tâche de base »

Pour tous les groupes ayant eu la tâche de base, il est nettement visible que les activités mathématiques sont les plus nombreuses avec des pourcentages assez proches (situés entre 50 et 60% du total des activités) signifiant ici que l'organisation du groupe joue un rôle assez faible pour ce type d'activité. En revanche, nous retrouvons plus de variété pour les autres types d'activité sans pouvoir y identifier une logique propre à l'organisation des groupes : nous faisons l'hypothèse que c'est au travers des modalités de travail organisées à l'intérieur de chaque groupe que ces activités diffèrent.

Une analyse plus fine des actions des groupes semble cependant révéler un effet de l'organisation des groupes. La différence entre les types d'action est très marquée dans les groupes hétérogènes : le groupe 1 semble avoir beaucoup plus utilisé l'oral et les gestes que le groupe 2. Dans les groupes homogènes de niveau 1 et de besoin « initiative », il y a une forte prégnance des actions orales et une répartition des actions très proches. Nous pensons donc qu'à tâche égale l'organisation des groupes a un effet quant aux actions menées : dans des groupes où les « niveaux » ou les « besoins » des élèves sont proches, les échanges semblent être facilités alors que dans les groupes hétérogènes la forme des échanges semble très

dépendante des modalités internes aux groupes. Nous pouvons faire l'hypothèse que dans les groupes hétérogènes, un écart de niveau très important entre les élèves peut éventuellement les conduire à prendre en charge la résolution individuellement (à l'écrit) à défaut de pouvoir partager des réflexions communes (à l'oral). Autrement dit, la confrontation des idées dans les groupes hétérogènes ne semble pouvoir avoir lieu que dans une certaine limite des écarts de niveau ou de besoin entre les élèves.

Effets des variations de la tâche au sein d'une organisation des groupes donnée

Groupe homogène niveau 1						Groupe homogène niveau 4					
	MAT	TEC	OBS	SOR	Total		MAT	TEC	OBS	SOR	Total
ORA	33%	2%	12%	21%	68%	ORA	13%	5,5%	5%	21%	44,5%
ECR	22%	10%	0%	0%	32%	ECR	28%	5,5%	0%	9%	42,5%
PHY	0%	0%	0%	0%	0%	PHY	0%	0%	0%	13%	13%
Total	55%	12%	12%	21%	100%	Total	41%	11%	5%	43%	100%

Fig. 5 : Synthèse par types d'activités des groupes homogènes

Pour les groupes homogènes, la différence d'activités mathématiques est très marquée entre le groupe des élèves les plus en réussite (niveau 1) et les élèves les plus en difficulté (niveau 4). Pour nous, cela tient à la complexité de la tâche confiée à chacun. En effet, le groupe de niveau 1 ayant la tâche de base, ils doivent effectuer de nombreux choix par eux-mêmes et en particulier évoquer les procédures de résolution possible afin d'en choisir une. Dans le groupe de niveau 4, ces choix ont été réalisés pour eux au travers de l'énoncé qui leur est confié : ainsi, les tâches à effectuer sont bien moins complexes et nécessitent moins d'échanges, ce qui est d'ailleurs visible au travers des actions orales moins nombreuses pour ce groupe.

Si ce résultat est important pour les activités mathématiques, il en est un autre particulièrement remarquable qui concerne les activités de sortie. Alors que la tâche est moins complexe pour les élèves du groupe de niveau 4, ils développent davantage d'activités de sortie que mathématiques ! Deux hypothèses sont avancées : la tâche est éventuellement restée trop complexe pour eux ou les élèves – qui sont tous en difficulté – n'arrivent pas à s'entraider pour résoudre collectivement la tâche. L'analyse du discours plaide en ce sens.

Enfin, il y a eu moins d'activités d'observation dans le groupe de niveau 4, ce qui semble assez en accord avec les difficultés des élèves : réaliser des activités d'observation demande de prendre du recul sur le travail en cours de réalisation, ce qui nécessite d'avoir les connaissances nécessaires à cette prise de recul, mais également d'avoir obtenu des résultats – *a minima* partiels – ce qui n'a pas été le cas dans le groupe 4 au regard de leur production.

Groupe de besoin « grandeur »						Groupe de besoin « initiative »					
	MAT	TEC	OBS	SOR	Total		MAT	TEC	OBS	SOR	Total
ORA	13%	20%	5%	18%	56%	ORA	24%	11%	5%	21%	61%
ECR	17%	13%	0%	3%	33%	ECR	26%	8%	0%	0%	34%
PHY	0%	5%	0%	6%	11%	PHY	0%	2%	0%	3%	5%
Total	30%	38%	5%	27%	100%	Total	50%	21%	5%	24%	100%

Fig. 6 : Synthèse par types d'activités des groupes de besoin

Pour les groupes de besoin, c'est également dans les activités mathématiques qu'une grande différence est visible. Les activités mathématiques du groupe « initiative » sont majoritaires alors que le groupe de besoin « grandeur » a réalisé plus d'activités techniques que d'activités mathématiques. Nous pensons là aussi que cela tient à la nature de la tâche qui a été confiée aux élèves : en leur demandant d'utiliser un pavage, le choix de la procédure a été effectué. Ce sont alors des questions sur la maille du pavage (formes et dimensions) qui ont pu être observées. L'accord des élèves sur cette question a débouché sur la réalisation du pavage qui, pour des élèves de 11-12 ans, est coûteuse en temps de par la manipulation des instruments de géométrie. La construction effectuée n'a d'ailleurs pas permis aux élèves de réaliser le comptage attendu.

Même si ce n'est pas significatif ici, nous notons que ce sont les élèves qui ont eu la tâche pour laquelle des choix ont été pris en charge par l'énoncé qui ont développé le plus d'activités de sortie (comme pour les groupes homogènes).

L'analyse des résultats dans les groupes de besoin montre des ressemblances dans les actions effectuées avec beaucoup d'échanges oraux, probablement à mettre en lien avec l'existence d'un besoin commun identifié dans le test de positionnement ce qui va dans le sens de nos interprétations pour les groupes ayant la même tâche.

DISCUSSIONS, LIMITES ET PERSPECTIVES

Ce travail a permis de mettre en avant l'influence des variables « organisation des groupes » et « tâche proposée ».

Finalement, nous retenons qu'à tâche égale, l'organisation des groupes semble n'avoir que peu d'influence sur les activités mathématiques des élèves qui sont réalisées dans les mêmes proportions. En revanche, l'organisation des groupes joue sur les actions effectuées en particulier pour les groupes hétérogènes.

Pour une organisation de groupe donnée, nous avons fait le choix de faire varier la tâche dans une perspective de différenciation pédagogique simultanée. En agissant ainsi, il semble que l'influence de la tâche sur les activités des élèves est très importante bien que les actions des élèves dans les groupes soient assez proches.

Ainsi la variable « organisation des groupes » semble majoritairement influencer les actions des groupes quand la variable « tâche proposée » influence majoritairement les activités des élèves. Plus la tâche proposée semble riche (en termes d'adaptations) plus les activités mathématiques des élèves semblent importantes ce qui recoupe des résultats déjà obtenus (Chesnais, 2009; Horoks, 2006).

Nous nous devons tout de même de signaler quelques limites de ce travail qui nous amène à nuancer les résultats proposés et à identifier de nombreuses perspectives possibles. Par exemple, le fait d'avoir occupé le double rôle d'enseignants et chercheurs au cours de la recherche a pu affecter nos interprétations. La phase préexploratoire réalisée à l'aide de l'évaluation diagnostique a été réalisée de manière assez peu documentée alors qu'elle est au centre de la constitution des groupes. Dans les groupes homogènes et de besoin, les deux variables « organisation des groupes » et « tâche proposée » varient simultanément : que pourrions-nous dire des activités de ces groupes s'ils avaient tous reçu la même tâche ? Il nous semble qu'il s'agit d'une perspective intéressante à développer. Enfin, les outils aussi bien théoriques que méthodologiques que nous utiliserions aujourd'hui pour faire un travail similaire nous permettraient de rentrer plus finement dans l'analyse des activités mathématiques, ce qui n'a pas été le cas ici : il nous semble évident que la seule comparaison quantitative des temps d'activités ne peut suffire et qu'un travail plus qualitatif doit venir en complément. Par exemple, à temps égal, les activités mathématiques identifiées dans les groupes sont-elles de même nature ?

Pour finir, ces limites laissent entrevoir quelques perspectives dont la recherche en didactique des mathématiques peut s'emparer. Par exemple, le jeu entre individus et groupe n'a pas été étudié ici, mais il peut être intéressant d'essayer, à l'intérieur d'un groupe, de reconstituer les activités de chaque élève : quelles sont les activités développées par un élève en réussite ou en difficulté au sein d'un même groupe hétérogène ? De plus, la constitution des groupes et le choix des tâches a fait l'œuvre d'un travail expérimental : qu'en serait-il en situation ordinaire pour un enseignant donné ? Se poser cette question nous amène également à nous interroger sur le rôle de l'enseignant lors de ces travaux de groupe : nous n'avons pas analysé le déroulement du côté de l'enseignant au-delà d'éléments contextuels. Qu'en est-il de la posture de l'enseignant en fonction des groupes ? Quel discours tient-il en fonction de la constitution des groupes et en quoi celui-ci influence-t-il les activités possibles des élèves ? L'étude de ces questions semble pouvoir se faire dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) dans lequel nous conduisons d'autres recherches.

Pour finir, la question de l'évaluation diagnostique et de l'identification des besoins semble appeler une réflexion plus large sur les pratiques d'évaluations des enseignants, qui est actuellement un travail en cours dans notre thèse.

BIBLIOGRAPHIE

- Abboud, M., Robert, A., Rogalski, J., & Vandebrouck, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques. Un résumé des fondements partagés des développements récents et des perspectives. *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz*, 18.
- Astolfi, J.-P. (1988). Les groupes d'apprentissage. Logiques et dérives. *Cahiers pédagogiques*, 264-265, 14-15.
- Bisault, J., & Berzin, C. (2009). Analyse didactique de l'activité effective des élèves en sciences à l'école primaire. *Éducation et didactique*, 3(2), 77-99.
- Chesnais, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : Les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves* [Thèse de doctorat]. Paris Diderot.
- Horoks, J. (2006). *Les triangles semblables en classe de 2de : Des enseignements aux apprentissages* [Thèse de doctorat]. Université Paris VII.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Robert, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 45-58) Octarès.
- Robert, A., Penninckx, J., & Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir de l'analyse de vidéos*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : Une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 505-528.
- Robert, A., & Vivier, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs – quelle transposition ? *Éducation et didactique*, 7(2), 115-144.
- Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. In *La classe de mathématiques : Activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23-30) Octarès.
- Sarrazy, B. (2002). Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 49(1), 89-117.

ANNEXE 1 : TÂCHE DE BASE DONNÉE AUX GROUPES HÉTÉROGÈNES, GROUPES HOMOGÈNES DE NIVEAU 1 ET GROUPE DE BESOIN « INITIATIVE »

Exercice : Superficie de Nantes

Voici la carte de Nantes.

Estimer la superficie de la ville de Nantes (en km²) à l'aide de la carte et de l'échelle qui vous sont données.



ANNEXE 2 : ÉLÉMENTS D'ANALYSE *A PRIORI* DE LA TÂCHE DE BASE

CONNAISSANCES NÉCESSAIRES :

Pour réaliser la tâche demandée, les élèves doivent disposer de nombreuses connaissances. Nous les listons ci-après en donnant leur statut par rapport au moment de l'année auquel la tâche a été proposée.

Connaissances à utiliser lors de la résolution	Statut
Calculer l'aire d'une figure usuelle à l'aide d'une formule	Récant
Utiliser la calculatrice pour effectuer un calcul	Ancien
Construire une figure usuelle	Ancien
Utiliser une échelle	Nouveau
Convertir des unités de longueurs	Ancien
Convertir des unités d'aire	Récant
Utiliser un pavage pour mesurer une aire	Récant

LISTE DES ADAPTATIONS DES CONNAISSANCES UTILISÉES (ROBERT, 1998) :

A1. Les reconnaissances (partielles) des modalités d'application des connaissances (notions, Théorèmes, méthodes, formules...) : typiquement en géométrie, reconnaître la(es) configuration(s) où utiliser Thalès. Cela peut aller de reconnaissances de variables, de notations, à des reconnaissances de formules ou de conditions d'applications de Théorèmes...

A2. L'introduction d'intermédiaires – notations, points, expressions... : typiquement en géométrie introduire une parallèle, ou nommer un point pour utiliser Thalès ;

A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres, les mises en relation ou interprétations... : typiquement en géométrie, utiliser du calcul algébrique pour obtenir le résultat (par exemple résoudre $x^2 = 1$ au milieu d'un problème de géométrie). Les énoncés qui jouent sur graphique/fonction contiennent automatiquement cette adaptation ;

A4. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements (cela va de l'utilisation répétée (in)dépendante d'un même Théorème à un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le Théorème) : typiquement en géométrie, utiliser quatre fois le Théorème de Thalès de manière non indépendante puis sa réciproque. Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer ;

A5. L'utilisation de questions précédentes dans un problème ;

A6. L'existence de choix – forcés (un seul convient finalement) ou non ;

A7. Manque de connaissances nouvelles.

PROCÉDURES POSSIBLES ET ADAPTATIONS DES CONNAISSANCES NÉCESSAIRES À LA RÉOLUTION DE LA TÂCHE DE BASE :

La tâche de base ne présentant pas d'indication dans son énoncé quant aux connaissances à utiliser et plusieurs procédures de résolution étant possibles, nous affirmons que les connaissances des élèves doivent se situer au niveau disponible. Deux adaptations sont partagées quelle que soit la procédure utilisée : A1 qui consiste en la reconnaissance d'une procédure possible et A6 qui consiste à faire un choix parmi plusieurs stratégies.

Nous présentons ici les deux procédures de résolution attendues pour des élèves de 6^e. Des procédures intermédiaires combinant les deux sont possibles.

Procédure 1 : Estimation par le calcul d'aires de figures usuelles

Les élèves doivent penser à la possibilité de déterminer une aire à partir du calcul de l'aire de figures usuelles (A1 – reconnaissance). Par la suite, ils doivent construire des figures sur l'énoncé à même de recouvrir la surface qui les intéresse (A2 – introduction d'intermédiaires). Des choix sont à effectuer quant à la nature des figures, à leur nombre, à la précision du recouvrement de la surface (A6 – effectuer des choix). Une fois les figures construites, ils doivent décomposer le calcul de la surface totale en étapes au travers du calcul de l'aire des figures tracées (A4 – organisation d'étapes). Dans ce passage, il y a également un

changement de cadre qui s'effectue lors du passage de la figure géométrique à la mesure de son aire de manière numérique (A3 – changement de cadre). Pour cela, les élèves se doivent de mesurer des longueurs sur le dessin à l'aide de leur règle. Enfin, les élèves sont amenés à utiliser l'échelle proposée pour obtenir l'aire en km^2 . Pour cela, il leur est possible de convertir les longueurs de cm à km ou de calculer les aires en cm^2 avant de les convertir en km^2 à la fin. Il existe donc là encore un choix à effectuer (A6). De plus, l'utilisation des échelles étant une connaissance nouvelle pour les élèves (A8 – manque de connaissances nouvelles), le choix a été fait de mettre une échelle simple : $2 \text{ cm} = 2 \text{ km}$ et de les aider si besoin.

Procédure 2 : Estimation par le dénombrement d'unités d'aire

Les élèves doivent penser à la possibilité de déterminer une aire en dénombrant une unité choisie (A1 – reconnaissance). Par la suite, ils doivent choisir l'unité qu'ils utilisent, sa forme, ses dimensions (A6 – effectuer des choix) de préférence en utilisant l'échelle qu'ils n'ont jamais rencontrée jusqu'ici (A8 – manque de connaissances nouvelles). L'unité étant choisie, il faut désormais la construire (A2 – introduction d'intermédiaires) en choisissant si elle est construite sur une feuille séparée (calque par exemple) ou directement sur le plan (A6). De même, le comptage peut s'effectuer à partir d'une seule unité qui est déplacée ou d'un pavage qui recouvre l'ensemble de la carte : cela nécessite d'organiser des étapes (A3) pour assurer un comptage efficace (A4 – changement de cadre).

Procédure 3 : Hybride des procédures 1 et 2

L'élève va construire des figures usuelles et en déterminer l'aire à l'aide du dénombrement d'unités, on croise alors les adaptations de la procédure 1 et de la procédure 2.

Déclinaison de la tâche de base

Les déclinaisons sont construites autour de la prise en charge de certaines adaptations par l'énoncé (voir annexe 2 et 3).

ANNEXE 3 : DÉCLINAISON DE LA TÂCHE DE BASE DONNÉE AUX GROUPES HOMOGÈNES DE NIVEAU 2 ET AU GROUPE DE BESOIN « CONSTRUCTION DE FIGURES USUELLES »

Voici la carte de Nantes.

Estimer la superficie de la ville de Nantes (en km^2) à l'aide de la carte et de l'échelle qui vous sont données. Pour cela construis plusieurs figures usuelles (dont tu calculeras l'aire) pour approximer la superficie de Nantes.



ANNEXE 4 : DÉCLINAISON DE LA TÂCHE DE BASE DONNÉE AUX GROUPES HOMOGÈNES DE NIVEAU 3 ET AU GROUPE DE BESOIN « CALCULS D'AIRES À L'AIDE DE FORMULES »

Voici la carte de Nantes.

Estimer la superficie de la ville de Nantes (en km²) à l'aide des figures construites sur la carte et de l'échelle qui vous sont données.



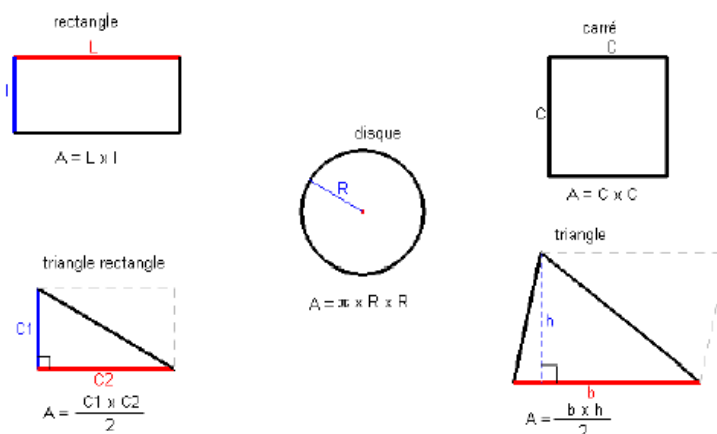
ANNEXE 5 : DÉCLINAISON DE LA TÂCHE DE BASE DONNÉE AUX GROUPES HOMOGENES DE NIVEAU 4

Voici la carte de Nantes.



- 1) En utilisant les formules rappelées au verso et l'échelle présente sur la carte, calculer la superficie réelle de la surface recouverte par chacun des quatre triangles.
- 2) En utilisant les formules rappelées au verso et l'échelle présente sur la carte, calculer la superficie réelle de la surface recouverte par chacun des trois rectangles.
- 3) En sachant que ces sept figures recouvrent approximativement la surface de la ville de Nantes, estimer la superficie de la ville de Nantes (en km²)

Rappel des formules d'aire des différentes figures :



ANNEXE 6 : DÉCLINAISON DE LA TÂCHE DE BASE DONNÉE AUX GROUPES DE BESOIN « GRANDEUR AIRE »

Voici la carte de Nantes.

Estimer la superficie de la ville de Nantes (en km^2) à l'aide de la carte et de l'échelle qui vous sont données. Pour cela construis un pavage sur la carte.



LA SCHEMATISATION : UN OUTIL POUR COMPRENDRE ET RESOUDRE UN PROBLEME MATHEMATIQUE DANS UNE CLASSE DE 6H

Laura Anderegg

Université de Genève, étudiante diplômée du Certificat Complémentaire en Enseignement aux degrés Préscolaire et primaire.

Mots clés : schématisation, résolution, problèmes, mathématiques.

Résumé : Cet article rend compte d'une expérimentation sur la schématisation dans une classe de 6H, l'objectif étant de répondre à la problématique suivante : comment la schématisation aide à la représentation et à la résolution de problèmes mathématiques auprès d'élèves de 6H ? Le dispositif en quatre temps s'articule autour de huit problèmes mathématiques.¹

INTRODUCTION

Résoudre un problème est un processus complexe qui demande la mise en œuvre de méthodes et de connaissances particulières. Cette résolution apparaît dans le Plan d'Étude Romand (PER) comme une attente fondamentale dans le domaine de l'espace, des nombres, des opérations ainsi que des grandeurs et mesures. L'objectif est alors de permettre à l'élève d'acquérir des notions, concepts et modèles scientifiques développés par l'humanité. Il est aussi question de développer la capacité de problématiser des situations, mobiliser des outils et des démarches pour en tirer des conclusions. Le travail sur l'utilisation de dessin, croquis ou schéma est pointé comme un apprentissage visé.

Nous nous proposons de rendre compte d'une expérimentation introduisant la schématisation dans une classe genevoise d'élèves de 6H. L'objectif est de découvrir cet outil, dans l'optique d'appropriation et de remobilisation. Nous nous demandons comment la schématisation aide à la représentation et à la résolution de problèmes mathématiques, principalement ceux relevant de l'addition et de la soustraction. Ce questionnement vient d'observations tirées de différentes situations de résolution de problème, dans des contextes de stage et de remplacements. Nous avons constaté la présence régulière de ce type d'activité, ainsi que la difficulté de certains élèves à les résoudre. Pour aider ces élèves à résoudre des problèmes, nous leur proposons de les schématiser. Nous souhaitons ainsi observer si les schémas permettent d'améliorer les compétences en résolution de problèmes mathématiques. Dans le domaine des mathématiques, le schéma apparaît comme une représentation simplifiée de la réalité qui permet de trier et organiser les données, ainsi que d'atteindre une image mentale de la situation. Grâce à cela « l'élève va pouvoir faire le lien entre les données de l'énoncé et enclencher la bonne stratégie pour arriver à la solution. » (Stecker, 2016, p.11). Afin de comprendre comment la schématisation prend sa place dans la résolution d'un problème mathématique, nous présenterons des éléments théoriques et notre dispositif d'expérimentation. Nous analyserons les données recueillies, autrement dit les résolutions effectuées par les élèves. Nous concluons ce travail en apportant une réponse à notre problématique et en discutant des limites de l'expérimentation.

¹ Ce texte provient d'un travail d'intégration de fin d'études réalisé à l'Université de Genève.

CADRAGE THÉORIQUE

Le problème mathématique

Le Larousse (2012) définit un problème de mathématique comme :

Une question à résoudre par des méthodes logiques, rationnelles, dans le domaine scientifique mais aussi comme un exercice scolaire consistant à trouver les réponses à une question posée à partir de données connues.

La résolution de problème étant véritablement au cœur des apprentissages mathématiques, il est nécessaire de s'intéresser aux démarches de l'esprit pour y parvenir. Chacun des élèves « acquiert les différents concepts vus en cours à leur manière, c'est pourquoi il est important d'avoir une palette de méthodes et de stratégies à disposition lorsque nous enseignons. » (Rossi & Sutter, 2013, p. 40). Vergnaud considère le problème mathématique comme « toute situation dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèse et de vérification, pour produire une solution » (1983, p. 22). Brun le définit comme une situation initiale comportant un but à atteindre et demandant au sujet l'élaboration d'une suite d'actions ou d'opérations. Toute situation n'est alors pas nécessairement un problème : « un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. » (1990, p. 2).

Ces définitions nous éclairent sur le caractère d'un problème et accompagneront notre réflexion, du choix des énoncés jusqu'aux analyses des travaux d'élèves. Pour que le problème ait lieu, il doit y avoir une activité de recherche. La méthode de résolution mise en place par les élèves peut varier. Dans notre recherche, nous retiendrons le problème mathématique comme un questionnement à résoudre à l'aide de stratégies. Ces dernières, propres au fonctionnement de chacun, peuvent inclure l'utilisation de la schématisation, que nous abordons ci-dessous.

Le schéma

Dans le Larousse (2012) la définition du schéma est :

Dessin figurant les éléments essentiels d'un objet, d'un ensemble complexe, d'un phénomène ou d'un processus, et destiné à faire comprendre sa conformation et/ou son fonctionnement.

C'est une construction, une façon de procéder pour se représenter ou résoudre un problème mathématique. Selon Camus-Musquer, la lecture d'un énoncé de problème peut générer une surcharge cognitive, alors « le schéma permet de fixer les informations perçues de manière à libérer la mémoire de travail » (2007). C'est une « [...] visualisation et une meilleure compréhension d'un système de façon extrêmement simplifiée » (Stecker, 2016) aidant à interpréter et à analyser la situation. Monnier (2003) effectue un classement des catégories de schémas par rapport à leur utilisation et leur mode d'acquisition : représentations iconiques ; tableaux et graphiques ; représentations symboliques. Dans notre travail, nous considérons les schémas en tant que représentations iconiques : « ce sont des représentations très personnelles de la réalité de l'énoncé et plutôt utilisées par des élèves de cycle 2 qui ne maîtrisent pas encore des outils de schématisation plus synthétiques et mathématiques » (Monnier, 2003, p. 27).

Notre expérimentation se base sur des énoncés propices à la schématisation, considérés selon la classification de Vergnaud (1983) qui organise les différents types de problèmes additifs : transformation d'état, composition d'état, comparaison d'états, composition de transformations. Dans notre étude, nous retiendrons de ces définitions l'aspect simplifié que peut apporter le schéma. Ainsi, il peut permettre une meilleure compréhension et représentation du problème afin de soutenir la résolution.

DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Notre expérimentation se déroule dans une classe d'élèves genevois de 6H. Les élèves sortant tout juste de 5H ont certains prérequis : ils ont appris à résoudre des problèmes numériques (additifs et soustractifs).

Cet apprentissage se poursuivant tout du long de la 5H et de la 6H, il est intéressant de trouver davantage d'outils de résolution. Les énoncés choisis sont d'un niveau supérieur aux problèmes habituellement proposés aux élèves. Ainsi, nous espérons qu'ils auront besoin d'un outil supplémentaire pour les résoudre, comme la schématisation. Pour cela, nous avons travaillé pendant quatre séances de 45 minutes, sur une période de deux semaines. Certains élèves ont un niveau de lecture plus faible que les attentes du PER, ils ont besoin d'une attention particulière pour déchiffrer l'énoncé. Les élèves travailleront par binômes afin de s'entraider sans être désavantagés par la lecture. Rassemblés par niveaux de mathématiques, nous éviterons que l'un des deux élèves effectue tout le travail. Nous comptons sept duos mixtes, deux duos féminins et un duo masculin. Cette collaboration permettra aussi une confrontation de points de vue sur divers problèmes. Les huit problèmes mathématiques ont des données numériques simples, avec comme nombre maximal 250, afin d'éviter les erreurs de calculs ou une surcharge cognitive. Nous avons organisé ainsi les quatre étapes de travail :

1. Résolution de 4 problèmes
2. Discussion synthèse sur la première étape
3. Résolution de 4 nouveaux problèmes
4. Mise en commun sur les schémas

Première étape : 4 énoncés

Initialement, l'enseignante n'avait jamais mentionné ni travaillé les schémas avec sa classe. Lors de la première séance, nous avons lu ensemble les énoncés, afin de s'assurer de la bonne compréhension des problèmes. Nous avons répondu aux questions de vocabulaire uniquement. Les élèves, en duo, ont ensuite eu 45 minutes pour la résolution, sans consigne particulière : le mot schéma n'a pas été mentionné, le but étant de voir si les élèves en feront usage spontanément.

Nous présenterons brièvement les 4 premiers problèmes (n°1 à 4 en annexe) par rapport à la classification de Vergnaud. Les élèves doivent rechercher une transformation, un état initial et deux fois l'état final. Les énoncés sont courts et le domaine numérique de travail s'arrête à 30. Les problèmes 1 à 3, mobilisant la soustraction ou addition, concernent des situations d'échanges entre deux ou trois personnages. Le 4^{ème} problème diffère, il relève de la multiplication / division, opérations qui n'ont pas encore été vues en classe à cette période de l'année. N'ayant pas accès à la résolution experte, les élèves devront trouver un autre cheminement.

Nous avons nous-même effectué quelques schémas a priori et constaté que la schématisation pouvait être d'une aide diverse. Selon Coppé (2020), la fonction du schéma pour l'élève peut prendre différentes formes, notamment aider à la compréhension et repérer les éléments pertinents ; aider à trouver la réponse et trouver la réponse, communiquer la réponse.

Deuxième étape : discussion synthèse sur la première étape

Notre deuxième séance est une discussion collective autour des résultats (durée de 45 minutes), qui s'est déroulée le lendemain de la première étape. Nous avons recueilli les impressions des élèves sur ces premiers problèmes. Pour introduire le nouvel outil, nous nous sommes accordés sur la définition du schéma comme étant un *dessin simplifié*. Nous nous sommes questionnés sur la possibilité d'utiliser la schématisation comme système de résolution, puis avons construit ensemble un schéma pour chacun des problèmes. Pour ce faire, nous avons repéré ce qui est connu et ce qui est cherché. Les élèves ont sélectionné les informations pertinentes à faire ressortir, tout en simplifiant ensemble les éléments à faire apparaître, à l'aide de formes simples, de flèches, de couleurs. Pour chaque élément tracé, nous nous demandions s'il est utile ou pas : nous les aidons à traduire un énoncé en un schéma mathématique. L'objectif était alors que les dessins viennent des élèves, qu'ils puissent proposer une résolution schématisée en tant qu'exemple. Nous avons mis en avant qu'il n'y a pas de règles préétablies sur les schémas, que chacun n'a pas la même façon de fonctionner et de comprendre. Dans ce sens, l'utilisation du schéma n'est pas imposée mais proposée comme outil.

Troisième étape : 4 nouveaux énoncés

Une semaine après la seconde étape, avec les mêmes binômes qu'à la première séance, les élèves ont résolu les quatre nouveaux problèmes en 45 minutes. Nous avons pris un temps court pour nous remémorer ce qui a été fait à la dernière mise en commun, sans imposer l'utilisation de la schématisation.

Ces nouveaux problèmes (n°5 à 8 dans annexe) entrent dans la classification de Vergnaud comme une recherche d'état final, une d'état initial ainsi que deux de transformations. La difficulté a été augmentée, tout comme le domaine numérique qui va jusqu'à 360. Le problème n°5 sort du lot, de par son processus de résolution différent : s'il est réalisé correctement, un schéma permet de rendre visible la solution et de communiquer la réponse. A contrario, si l'élève choisit un découpage peu commun, il trouvera une solution qui sort de l'ordinaire. Le problème n°6 présente de grandes quantités impossibles à dessiner en entier, il risque d'être ainsi intéressant à analyser si certains élèves font le choix d'utiliser la schématisation. Le problème n°7 a des similitudes avec le n°3 : il s'agit de la même situation, avec des nombres et des échanges différents. Enfin le dernier problème peut ressembler au n°2, il comporte plusieurs transformations dont une est à rechercher.

Quatrième étape : mise en commun sur les schémas

Une semaine après la seconde résolution de problèmes a eu lieu la dernière étape (45 minutes). Nous avons sélectionné certaines productions d'élèves pour une discussion collective sur la schématisation. Nous avons passé en revue plusieurs dessins en nous questionnant et en éclaircissant leur utilité. Les élèves ont pu comparer des schémas et donner leur avis, l'objectif étant alors que chacun se fasse sa propre idée de ce qui lui convient.

RÉSULTATS

Les figures suivantes exposent les résultats de l'expérimentation. Le tableau de gauche présente le nombre de schémas réalisés par problème. Celui de droite indique les groupes ayant trouvé la solution pour chacun des énoncés. Les axes verticaux représentent les 9 ou 10 groupes. Les axes horizontaux correspondent aux problèmes. Les problèmes 1 à 4 concernent la première passation, face aux problèmes 5 à 8 pour la seconde. Pour la première passation, il y avait 9 groupes, deux élèves étant absents et pour la seconde, 10 groupes. Afin de prendre en compte cette différence, nos résultats sont restitués sous forme de pourcentages.

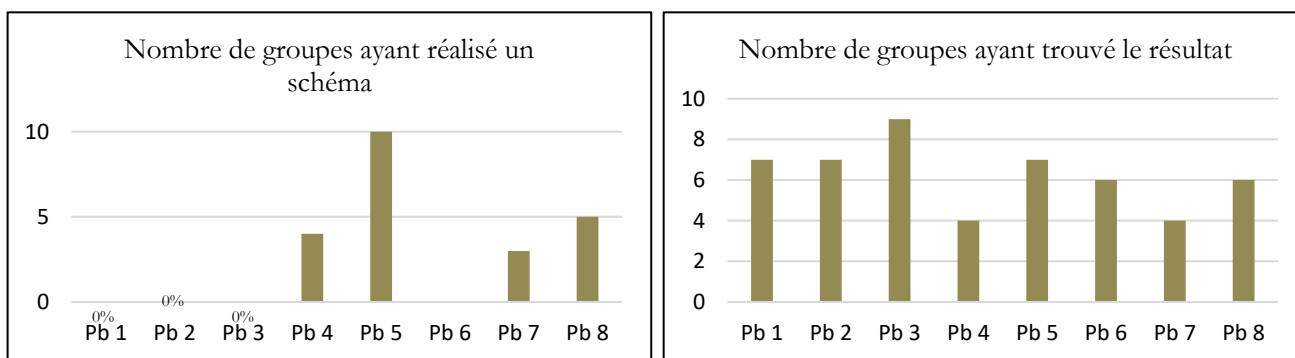


Fig. 1 : Nombre de schémas réalisés & nombre de groupes ayant trouvé le résultat

Il y a une absence presque totale de schémas lors de la première passation. Le problème n°4 fait exception avec 44% de dessins. Les élèves ont sûrement utilisé le schéma afin de pallier un manque, la résolution experte étant la division, opération encore inconnue. Cet énoncé étant plus complexe, seuls quatre groupes ont trouvé la solution.

De la 1^{ère} à la 2^{ème} passation, nous constatons une augmentation du nombre de schémas. Probablement en raison de l'étape de mise en commun collective, plusieurs hypothèses sont envisageables, soit :

- Les élèves, réceptifs, ont souhaité essayer par eux-mêmes le nouvel outil.
- La difficulté augmentée des problèmes a contraint les élèves à devoir mobiliser une résolution différente.
- Bien que libres dans leur choix, la mise en commun a engendré un phénomène de contrat didactique incitant les élèves à utiliser le schéma : ils intègrent ce qui est attendu d'eux.

Ces hypothèses restant assez incertaines, il serait intéressant de les vérifier notamment à l'aide d'entretiens avec les élèves concernés. Malgré l'augmentation du nombre de schémas, nous constatons que le taux de réussite n'a pas suivi la même courbe. De la 1^{ère} à la 2^{ème} passation, les résultats se dégradent. Nous nous demandons ainsi à quoi cela est dû : à l'augmentation de la difficulté ? à la suggestion d'utilisation des schémas ? Nous nous demandons si l'outil de schématisation est acquis et si son acquisition aurait permis des résultats significativement meilleurs.

Pour le problème 6, nous relevons 0% de schémas et 60% de réussite. Dans cette seconde passation, c'est le seul énoncé où aucun des groupes n'a fait de schémas. Peut-être cela est-il dû aux grands nombres, les élèves ont alors eu de la peine à concevoir un dessin ou n'ont pas jugé nécessaire d'en faire un. 60% des groupes ayant trouvé la solution, il semblerait que la schématisation n'ait pas été préférée ni nécessaire pour ces derniers.

Un dernier point intéressant concerne le problème n°5, où il y eut 100% de schémas pour un taux de réussite le plus élevé de la seconde passation (70%). Nous estimons ce taux lié à l'énoncé particulier : il est difficilement imaginable de le résoudre sans passer par le dessin, ce qui se vérifie dans les résultats.

Nous analyserons en détail les productions des différents groupes, particulièrement les erreurs et les schémas. Pour cela, nous nous basons sur la typologie des erreurs d'Astolfi (2011), qui recense huit catégories d'erreurs : compréhension des consignes ; habitudes scolaires, mauvais décodage des attentes ; conceptions alternatives des élèves ; opérations intellectuelles ; démarche adoptée ; surcharge cognitive ; transfert non acquis, difficulté du contenu. Nous avons traité les données en observant comment les élèves ont résolu le problème mathématique, notamment en vérifiant s'il y a des changements dans les étapes. Nous avons pu constater que la schématisation modifie le processus de résolution, cela demande une organisation différente.

Première étape

Les élèves ont très peu fait de schémas, en suivant une résolution à l'aide d'opérations, soit en lignes soit en colonnes. Pour les problèmes 1 à 3, il n'y a aucun schéma et de bons résultats. Nous retrouvons diverses erreurs : opérations mobilisées, absence de méthodologie, démarche adoptée, décodage des attentes, etc.

Dans le problème n°4, les premiers schémas apparaissent. La figure 2 permet d'aider à trouver la réponse : les barres représentent les élèves, les cercles ou espaces montrent les voitures. Il est possible de vérifier le résultat avec la présence des 29 élèves et des 8 voitures, le schéma donne la réponse.

Un autre groupe a dessiné des taxis car cela les a aidés (fig. 3), c'est la première fois que le mot dessin est mentionné.

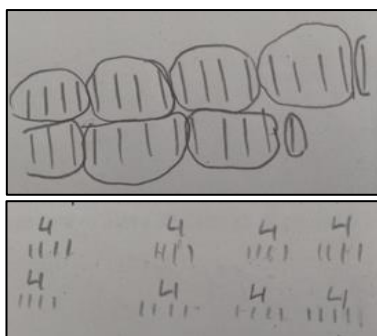


Fig. 2 : Problème n°4

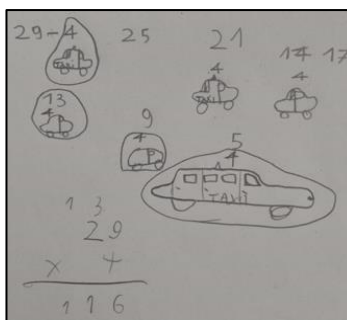


Fig. 3 : Problème n°4

Le raisonnement commence avec des soustractions petit à petit du nombre d'élèves total et en dessinant un taxi lorsque nécessaire. On voit alors 6 véhicules, 2 ont été oubliés. La gestion du reste d'élèves (5) a posé problème, les élèves ont changé de stratégie en multipliant 29 par 4. Ils ont conclu que ce résultat était le nombre de taxi : soit 116. Nous pouvons imaginer plusieurs hypothèses : il y eut un excès d'informations, une surcharge cognitive ; ou encore les élèves n'ont pas relu l'énoncé, sans quoi ils n'auraient pas écrit avoir besoin d'autant de voitures pour si peu d'élèves.

Pour les groupes ayant trouvé le résultat sans schématisation, cet outil n'aurait pas été d'une grande utilité. Ils ont mené leur résolution en utilisant principalement des opérations posées sur leur feuille. Pour quelques groupes, il aurait été intéressant de voir si l'aide de schémas aurait produit des résultats plus concluants.

Deuxième étape

Cette mise en commun a pour objectif d'offrir aux élèves un nouvel outil de résolution de problèmes. L'idée n'est pas de leur imposer la schématisation, mais de présenter cette méthode qui peut être une aide. Nous avons proposé une première approche de co-construction de schémas, afin qu'ils puissent avoir un premier aperçu tout en donnant leur avis. Sous la dictée des élèves, nous avons construit au tableau noir un dessin pour la résolution de chacun des problèmes. Ils ont spontanément proposé des apports telles que l'utilisation de formes simple comme des carrés, des ronds ou des traits. Ils ont proposé des gestes tels que barrer et entourer afin de représenter différentes étapes. En plus de leurs idées, nous leur avons montré l'utilisation de différentes couleurs qui peuvent structurer les étapes et l'ajout de flèches pour clarifier l'ordre. Afin d'illustrer ces propos sur la discussion collective, les photos suivantes présentent les quatre schémas réalisés.

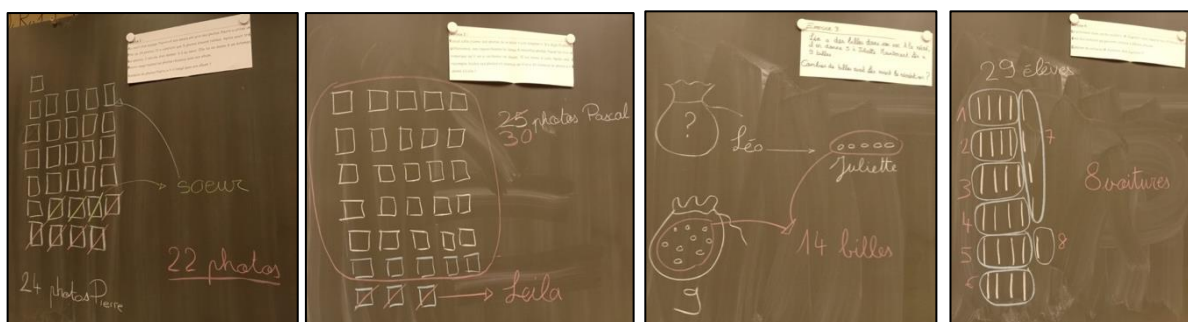


Fig. 4 : Schémas des problèmes 1 à 4, réalisés avec les élèves lors d'une discussion collective

Nous avons motivé l'élaboration de schémas sur le principe simple que tous les groupes n'avaient pas trouvé la solution. Nous avons relevé qu'une très grande partie de la classe a obtenu le résultat, mais avons essayé de trouver une alternative pour les autres. De plus, l'enseignante est intervenue afin de raconter une anecdote de ses années à l'école où elle a constamment utilisé des schémas. Les élèves ont pu comprendre que cet outil pouvait aussi servir de relecture, notamment en cas d'évaluation où chaque point compte. La

discussion était animée par des élèves participatifs, prenant la parole, donnant leur avis et aidant à la construction de la schématisation.

Troisième étape

Pour cette seconde passation, les élèves connaissent de l'outil de la schématisation et peuvent se remémorer la séance de construction de schémas. Aussi, il y a certainement eu un phénomène de contrat didactique, les élèves ayant été incités par la mise en commun ainsi qu'un discours positif de l'enseignante sur les schémas. Ainsi, nous retrouvons davantage de dessins à analyser.

Pour le problème n°5, la forme d'une bûche a été précisée oralement, afin de partir dans la bonne direction. Tous ont mobilisé la schématisation pour leur résolution. Dans les réponses correctes, les dessins des élèves ressemblent à notre proposition a priori : un schéma communiquant la solution en exposant le nombre de parts. Dans les trois groupes n'ayant pas trouvé la bonne réponse, il y a deux types d'erreurs. D'abord un manque de concordance entre le schéma et la réponse donnée : les élèves ont un dessin montrant la solution mais n'ont pas réussi à compter correctement les parts de bûche. Puis une erreur liée à la démarche adoptée et les conceptions des élèves. Le découpage différent effectué leur donne des réponses variées (fig.5).

Pour le problème n°6 les élèves ont trouvé la solution à l'aide de calculs, sans effectuer aucun dessin.

Pour le problème n°7, six groupes n'ont pas trouvé le résultat. Un binôme a utilisé un schéma sans trouver la réponse (fig. 6). Les élèves ont dessiné 18 billes en gris (l'état final) et ont ajouté 7 billes en vert (ce que Léo a gagné). L'erreur est la suivante : les élèves ont ajouté des billes bien que ces dernières fassent déjà partie du résultat final. Les élèves auraient dû ajouter les 4 billes données à Juliette plutôt que de les enlever. Ils n'ont pas réussi à transcrire en langage mathématique, le fait de *gagner* ou *d'offrir*. Le schéma a aidé à définir les étapes mais n'aura pas permis aux élèves de trouver la solution.

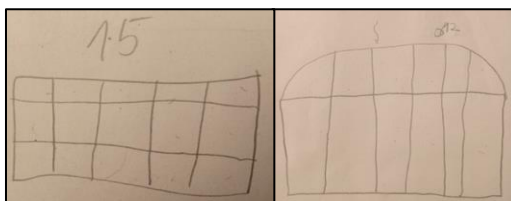


Fig. 5 : Problème n°5

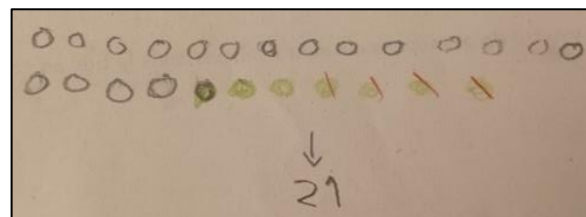


Fig. 6 : Problème n°7

Dans un autre groupe, les élèves ont essayé un schéma (fig. 7) mais les traces gommées encore visibles montrent le changement de stratégie pour en revenir aux calculs. La soustraction $7-4=3$ aurait pu aboutir à une réponse correcte s'ils n'avaient pas oublié une dernière étape. Analyser leur première résolution schématisée aurait été intéressant, pour voir si cela leur aurait permis de passer outre la complexité de ce problème et trouver la bonne réponse.

Pour le n°8, un groupe a réalisé un schéma qui traduit la résolution du problème (fig. 8). Ce dessin est clair, bien construit et agrémenté de couleurs afin de vérifier chacune des étapes.

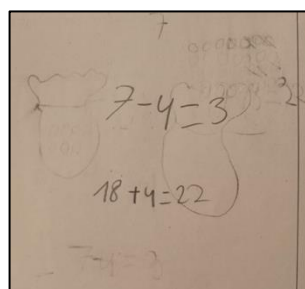


Fig. 7 : Problème n°7

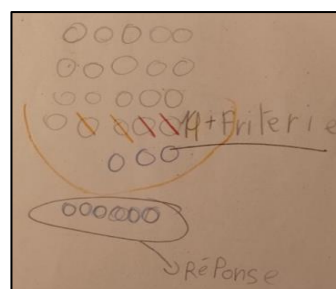


Fig. 8 : Problème n°8

Pour conclure, il a été intéressant d'analyser les schémas effectués par quelques groupes. Des dessins réalisés ressemblent aux schémas construits collectivement. Il est possible que certains aient été réceptifs aux schémas, à la mise en page choisie et aux astuces proposées. Nous imaginons aussi que le métier d'élève a été fait, en assimilant ce qui a été présenté lors de la mise en commun afin de l'appliquer par la suite.

Quatrième étape

Après la seconde passation de problèmes, nous avons discuté collectivement des résultats. Nous avons échangé sur les dessins, sur leur efficacité et leur justesse (fig. 9).

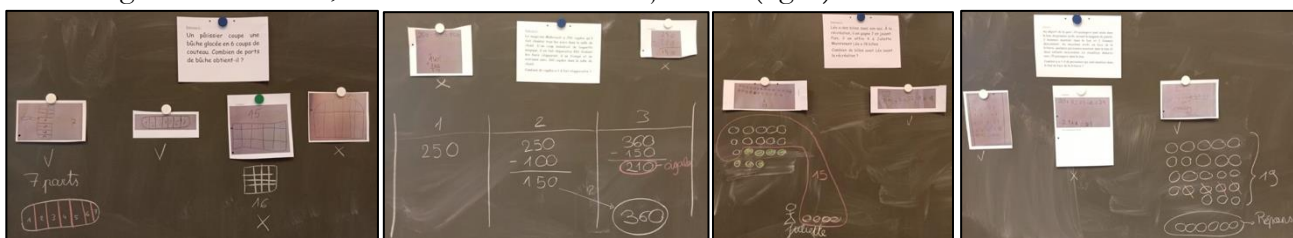


Fig. 9 : Schémas des problèmes 5 à 8, réalisés avec les élèves lors d'une discussion collective

Nous avons analysé quelques réponses d'élèves, leurs schémas, en nous questionnant ensemble. Nous avons interrogé les élèves sur ce qu'ils comprenaient, les différences, les ressemblances, si le schéma représentait bien le problème, ce que nous pourrions faire pour l'améliorer. En comparant les schémas, nous pouvons ainsi les faire évoluer et progresser. Pour conclure cette dernière étape d'analyses collectives, il était intéressant d'observer les élèves dans des postures d'évaluation face aux différents schémas. Nous avons ainsi pu avoir accès à la pensée des élèves sur la schématisation, ils ont pu donner leur avis et tenter d'améliorer l'utilisation du nouvel outil encore très récent.

CONCLUSION

A travers ces résultats, nous constatons que les élèves n'ont pas utilisé la schématisation spontanément. Puis, ils y ont fait appel lors de la deuxième passation. Cette augmentation peut être due à deux éléments : l'augmentation de la difficulté des problèmes d'une étape à l'autre et/ou l'effet de la mise en commun. L'utilisation des schémas peut être une solution face aux problèmes plus complexes, les élèves ayant ainsi adopté des stratégies et outils supplémentaires. Ou encore, les moments collectifs de construction de dessins ont été réfléchis et ensuite intégrés par les élèves dans leur résolution.

Les élèves se sont montrés très motivés et ont développé notamment de nombreuses propositions de construction de schémas. Cette attitude lors des différents temps de l'expérience a permis un bon déroulement. Les élèves se mettaient rapidement au travail avec une posture positive qui a probablement eu un effet efficace sur la collaboration dans les duos.

En analysant les résolutions des élèves, il a été intéressant de pouvoir observer des schémas qui aident à la compréhension, ceux qui aident à trouver la solution ou à communiquer la réponse. Au vu de nos analyses, l'absence de schémas et de résultats concluants nous font nous interroger sur la place de la schématisation. Faire un schéma ne s'improvise pas et cela doit être travaillé. Il est nécessaire de mettre en place une réflexion et un dispositif de travail afin d'approprier l'outil pour le mobiliser dans des problèmes qui le nécessitent et peuvent être variés.

Dans d'éventuelles perspectives, il serait intéressant d'avoir accès aux pensées des élèves grâce à des entretiens. Aussi, s'appuyer davantage sur les temps de mises en commun nous permettrait de mieux évaluer les potentiels apports de la schématisation.

BIBLIOGRAPHIE

- Astolfi, J.P. (2011). *L'erreur, un outil pour enseigner*. Paris : ESF éditeur.
- Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : Bilan et perspectives. *Math-École*, 141, 2-15.
- Chanudet, M. (2019). *Étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques*. [Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation]. Université de Genève.
- Camus-Musquer, A. (2007). *L'activité de schématisation réfléchie*. Strasbourg : Actualité de la Recherche en Éducation et en Formation.
- Coppé, S. (2019-2020). *Nouveaux moyens d'enseignement romands de mathématiques 3P*. Genève, Université de Genève : Formation continue DIP.
- Larousse. (2012). *Le Petit Larousse illustré*. Paris : Larousse Bordas.
- Monnier, N. (2003). Les schémas dans les activités de résolution de problème. *Grand N*, 71, 25-47.
- Rossi, C., Sutter, A. (2013). *Apprendre à résoudre des problèmes en mathématiques*. Lausanne : mémoire professionnel.
- Stecker, S. (2016). *La schématisation en résolution de problèmes mathématiques au CM2 : aide cognitive ou obstacle*. Université de Paris.
- Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple : les structures additives. *Grand N*, 38, 21-40.

ANNEXE

		Recherche :
Problème 1	<p>Au cours d'un voyage, Pierre et ses sœurs ont pris des photos. Pierre a utilisé un film de 24 photos. Il a constaté que 5 photos étaient ratées. Après avoir trié les photos, il décide d'en donner 3 à sa sœur. Elle lui en donne 6 en échange. Pierre range toutes les photos réussies dans son album.</p> <p>Combien de photos Pierre a-t-il rangé dans son album ?</p>	État final
Problème 2	<p>Pascal collectionne des photos de la série « Les Simpson ». Il a déjà 25 photos différentes, son copain Hassan lui donne 8 nouvelles photos. Pascal les trie et remarque qu'il en a certaines en double. Il les donne à Leila. Après cela, il recompte toutes ses photos et constate qu'il en a 30.</p> <p>Combien de photos a-t-il donné à Leila ?</p>	Transformation
Problème 3	<p>Léo a des billes dans son sac. À la récréation, il en donne 5 à Juliette. Maintenant Léo a 9 billes.</p> <p>Combien de billes avait Léo avant la récréation ?</p>	État initial
Problème 4	<p>En prévision d'une sortie scolaire, M. Fournier veut répartir les 29 élèves de 6H dans des voitures qui peuvent contenir 4 élèves chacune.</p> <p>Combien de voitures M. Fournier doit-il prévoir ?</p>	État final
Problème 5	<p>Un pâtissier coupe une bûche glacée en 6 coups de couteau.</p> <p>Combien de parts de bûche obtient-il ?</p>	État final
Problème 6	<p>Le magicien Malbrouck a 250 cigales qu'il fait chanter tous les soirs dans la salle de chant. D'un coup maladroit de baguette magique, il en fait disparaître 100. Voulant les faire réapparaître, il se trompe et se retrouve avec 360 cigales dans la salle de chant.</p> <p>Combien de cigales a-t-il fait réapparaître</p>	Transformation
Problème 7	<p>Léo a des billes dans son sac. À la récréation, il en gagne 7 en jouant. Puis, il en offre 4 à Juliette. Maintenant Léo a 18 billes.</p> <p>Combien de billes avait Léo avant la récréation ?</p>	État initial
Problème 8	<p>Au départ de la gare, 20 passagers sont assis dans le bus. Au premier arrêt, devant le magasin de jouets, 3 hommes montent dans le bus et 2 femmes descendent. Au deuxième arrêt, en face de la friagerie, quelques personnes montent dans le bus et deux enfants descendent. Le chauffeur démarre avec 25 passagers dans le bus.</p> <p>Combien y a-t-il de personnes qui sont montées dans le bus en face de la friagerie ?</p>	Transformation

ÉTUDE EXPLORATOIRE DE PROCEDURES D'ÉLÈVES DE 7-8 ANS EN CALCUL MENTAL ADDITIF

Nadine Grapin¹, Françoise Chenevotot-Quentin², Laurence Ledan³, David Beylot¹, Eric Mounier¹, Aline Blanchouin⁴

¹UPEC, EA 4434, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), ULille UCP UPEC CYPURN, ²Univ. Lille, EA 4434, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), ULille UCP UPEC CYPURN, ³Université de Toulouse, ⁴Centre de Recherches sur l'Éducation, les Apprentissages et la Didactique, Université de Bretagne Occidentale.

Mots clé : calcul mental, numération orale, numération écrite chiffrée, procédures.

Résumé : Notre recherche explore les procédures d'élèves de 7-8 ans pour déterminer mentalement la somme de deux entiers. Nous nous appuyons sur des éléments théoriques sur le calcul mental et les numérations écrite et orale pour déterminer les connaissances qui peuvent être mobilisées dans de telles procédures ; nous illustrons enfin avec quelques exemples la complexité à les inférer à partir des réponses, des gestes et du discours des élèves.

Alors que Gérard Vergnaud soulignait dès 2007 dans la préface de l'ouvrage de Butlen (2007) que « les recherches sur le calcul mental sont rares ; pourtant les programmes de l'enseignement élémentaire ne manquent guère, au cours des cent dernières années, d'insister sur l'importance du calcul », nous constatons que ce double constat reste d'actualité quinze ans plus tard, particulièrement au début de l'apprentissage des nombres et du calcul (3H-4H, élèves âgés de 6 à 8 ans¹). En France, différentes évaluations à grande échelle (Chesné & Fisher, 2015 ; Ninnin & Pastor, 2020) révèlent par ailleurs des difficultés persistantes en calcul mental chez les élèves français en fin d'école élémentaire (élèves âgés de 11 ans). Enfin, plusieurs chercheurs (Butlen & Pézard, 2003 ; Butlen, 2007 ; Chesné, 2014) ont montré les bénéfices d'une pratique régulière en calcul mental sur la résolution de problèmes numériques de difficulté moyenne. L'enjeu d'une recherche sur le calcul mental en termes d'apprentissage est donc particulièrement important.

Notre recherche vise à explorer la façon dont les élèves de 7-8 ans (fin 3H – début 4H) procèdent pour déterminer mentalement des sommes. Après avoir rappelé quelques éléments théoriques sur le calcul mental et sur les numérations écrite et orale, nous présentons notre problématique. Nous étudions ensuite les procédures pour trouver la somme de deux entiers et montrons comment les connaissances sur les numérations peuvent être mobilisées. Nous illustrons enfin avec quelques exemples la complexité à inférer des procédures à partir de l'analyse de réponses d'élèves, de leurs gestes et de leur discours.

CALCUL MENTAL & NUMÉRATIONS ORALE ET ÉCRITE CHIFFRÉE

Le calcul mental

Le calcul mental est défini comme « une modalité de calcul sans recours à l'écrit si ce n'est, éventuellement, pour l'énoncé proposé par l'enseignant et la réponse fournie par l'élève » (MEN, 2016) dont la pratique doit être quotidienne à l'école élémentaire. Chesné (2014, p.192) élargit cette définition et considère le calcul mental comme étant « l'ensemble des activités qui consistent à effectuer des opérations avec des

¹ Grade 1 : 3H en Suisse romande, Cours Préparatoire (CP) en France – Grade 2 : 4H en Suisse romande, Cours Elémentaire 1ere Année (CE1) en France.

nombre, essentiellement sans aide matérielle externe ». En référence à Butlen & Masselot (2010), cités par Bourdin (2021) dans sa synthèse sur le calcul mental (2021, p.93), nous distinguons également « ce qu'il faut mémoriser ou automatiser (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure...) et ce qu'il faut être capable de reconstruire (et qui relève du calcul réfléchi) ». Ainsi, utiliser la décomposition additive des termes d'une somme pour la calculer relèverait du calcul réfléchi.

Nous retenons enfin que, dans une tâche de calcul mental, et dans l'activité qu'elle engendre, les nombres peuvent être convoqués par leur nom ou par leur écriture chiffrée dans l'énoncé du calcul ou du résultat demandé ; en revanche, par opposition au calcul en ligne, le calcul mental n'autorise pas d'écritures intermédiaires. Quelles sont alors les connaissances relatives aux numérations qui pourraient intervenir lors d'un calcul mental ?

Les numérations orale et écrite chiffrée

Mounier (2012) met en exergue l'aspect ordinal de la numération orale et montre que la comptine numérique utilisée en France peut être structurée à l'aide de repérants (vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts). Pour atteindre un repérant à partir du précédent, il faut utiliser soit la petite comptine (PC) de un à neuf, soit la grande comptine (GC) de un à dix-neuf (Fig. 1).

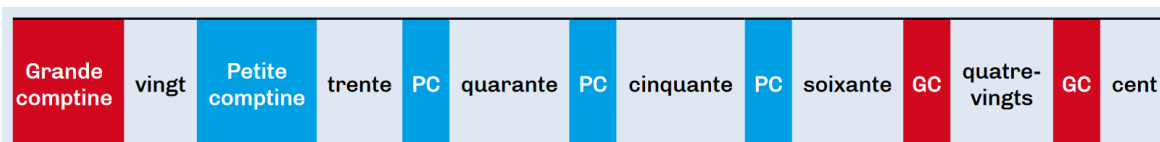


Fig. 1 : Structure de la numération orale (MEN, 2021, p.21)

Comprendre la façon dont la numération orale est structurée peut ainsi permettre de traiter certains calculs mentalement en mobilisant des principes arithmétiques additifs (trente-sept étant égal à trente plus sept) et multiplicatifs (quatre-vingts étant égal à quatre fois vingt). Nous verrons plus loin que des connaissances relevant de la numération orale peuvent être mobilisées pour calculer mentalement, même lorsque l'énoncé est proposé sous forme écrite chiffrée (à condition de savoir passer de l'écritures chiffrée au nom du nombre).

La numération écrite chiffrée repose sur deux principes (Tempier, 2010) : un principe positionnel (la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture chiffrée du nombre) et un principe décimal (dix unités d'un rang donné sont égales à une unité du rang supérieur). En calcul mental, ces deux principes peuvent être mobilisés, par exemple pour ajouter ou retirer un nombre entier de dizaines et multiplier ou diviser par dix, cent, mille.

Soulignons enfin que les connaissances sur ces deux systèmes de numération peuvent se construire indépendamment. Par exemple, il est possible d'écrire en chiffres le nombre d'éléments d'une collection sans pour autant connaître le nom du nombre et, inversement, il est possible de dire le nom du nombre d'éléments sans être capable de l'écrire en chiffres (Mounier, Grapin & Pfaff, 2020).

PROBLÉMATISATION

En arrivant au 3H (à 6 ans), les élèves ont rencontré le nom des nombres jusqu'à trente (sans que la numération orale n'ait fait l'objet d'un enseignement explicite) ainsi que l'écriture chiffrée de certains nombres (sans aborder les principes de la numération écrite chiffrée). Les programmes scolaires (MEN, 2020) et le guide à destination des enseignants (MEN, 2021) préconisent que les élèves de 3H apprennent la comptine numérique à partir de la petite et de la grande comptine ainsi que les principes de la numération écrite chiffrée. En outre, le guide précise que la compréhension des deux systèmes de numération « conditionne en particulier toutes les connaissances sur le calcul : les ressources de la numération orale pour le calcul mental, celles de la numération écrite chiffrée pour le calcul posé » (MEN, 2021, p.24).

Un autre enjeu de 3H consiste également à passer de procédures basées sur le comptage à des procédures de calcul. Si nous reprenons la distinction faite par Conne (1987), « les comptages s'apparentent aux dénombrements parce qu'ils utilisent comme support des systèmes symboliques figurant des quantités » et « les calculs traitent les opérations numériques reflétant les transformations et comparaisons des quantités » (p.1). Plus précisément, dans le cas de sommes, les élèves peuvent recourir au comptage ou sur-comptage un à un (sur les doigts), ce qui nécessite une connaissance spécifique, l'énumération² (Briand et al., 1999). Mais, pour calculer mentalement, les élèves peuvent aussi avoir automatisé les répertoires additifs ou mobiliser des décompositions additives. Cette distinction entre comptage et calcul se retrouve également chez Brissiaud (2003, p.146) et Charnay & Valentin (1991) qui, tous, insistent sur la nécessité de commencer par l'apprentissage des procédures de comptage avant d'aborder les procédures de calcul. Charnay souligne ainsi que les procédures de comptage sont « indispensables » pour de nombreux d'élèves au moins pour un temps ; Brissiaud argumente également que l'usage de collections témoins organisées dans le cadre du comptage favoriserait par la suite l'accès à des procédures de décompositions – recompositions lors du calcul. Ainsi, des procédures de comptage et de calcul risquent de cohabiter lorsque des élèves de ce niveau scolaire ont à déterminer la somme de deux nombres.

Etant donné que peu de résultats de recherche sur le calcul mental sont disponibles à ce stade de l'apprentissage, nous avons souhaité investiguer la façon dont les élèves procèdent pour déterminer une somme en étudiant la façon dont les connaissances relatives au comptage, à la numération orale et à la numération écrite peuvent être mobilisées.

Ces questions étant très générales, nous avons restreint notre champ numérique en choisissant de travailler sur des sommes de « petits nombres » (PN) et de « grands nombres ronds » (GNR). Nous considérons des PN comme étant inférieurs ou égaux à cinq (et par conséquent dont la somme est inférieure à dix) et des GNR comme étant des nombres égaux à un nombre entier de dizaines. Les GNR sont intéressants car les procédures pour déterminer la somme de deux GNR peuvent s'appuyer à la fois sur un comptage de dix en dix et sur du calcul à partir de résultats mémorisés (celles s'appuyant sur un comptage en unités risquant d'être inefficaces).

Nous allons ainsi nous intéresser, à travers l'étude des procédures, aux connaissances qui peuvent être mobilisées pour déterminer la somme d'une part de deux PN et d'autre part de deux GNR et à la façon dont nous pouvons inférer ces connaissances de l'observation des gestes de l'élève et de son discours. Dans la partie suivante, nous listons les procédures à la disposition des élèves de 7–8 ans (fin de 3H – début de 4H) et les connaissances sur lesquelles elles reposent. Enfin, nous exploitons cette analyse pour déterminer les procédures utilisées par des élèves : quels sont les indicateurs pertinents ? Une étude des réponses, des gestes et du discours de l'élève permet-elle de déterminer la (ou les) procédure(s) qu'il emploie ? Avec quelles certitudes ?

ETUDE DES PROCÉDURES

Nous décrivons *a priori* les procédures permettant de calculer la somme de deux PN et de deux GNR en distinguant quatre catégories de procédures déterminées selon les connaissances sur lesquelles elles s'appuient :

- celles qui reposent sur une perception globale des quantités (Brissiaud, 2003, p.109) ou la reconnaissance d'une configuration connue (P1) ;
- celles qui relèvent du comptage et qui s'appuient sur le nom des nombres (P2) ;
- celles qui s'inscrivent dans le calcul mental (P3) : calcul automatisé ou calcul réfléchi basé sur la décomposition additive de nombres ;

² Pour Briand et al. (1999, p.9), l'énumération est une connaissance qui est caractérisée par les tâches « d'inventaire » au cours desquelles il s'agit de « passer en revue tous les éléments d'une collection finie, une fois et une seule ».

- spécifiquement pour les GNR, celles qui s'appuient sur le nombre de dizaines (P4).

Nous avons choisi de présenter les procédures lorsque l'énoncé du calcul et le résultat sont sous forme orale et sans matériel ou support (l'élève ne dispose ni de bande numérique, ni de cube ou jeton, ni de dé...). Dans le cas d'une réponse attendue sous une forme écrite chiffrée, l'élève doit passer du nom du nombre à son écriture chiffrée. C'est pourquoi les procédures s'appuyant sur l'usage de collections d'objets ne seront décrites qu'à partir de collections de doigts. Nous les illustrons à l'aide d'exemples précisés au début de chaque paragraphe.

Procédure par reconnaissance immédiate (P1)

Dans le cas de PN, l'élève peut procéder par reconnaissance immédiate (Fig. 2) ; nous décrivons cette procédure à partir de deux exemples : *un*³ plus *deux* et *quatre* plus *deux*.

P1 : Reconnaissance immédiate de la somme à partir de représentations mentales ou de configurations de doigts (sans comptage).

Exemples :

Pour *un plus deux*, l'élève visualise dans sa tête une première collection d'un objet et une deuxième collection de deux objets puis il reconnaît globalement (Brissiaud, 2003, p.109) que cela forme une collection de trois objets. Il associe ensuite trois à *trois* (ou trois à 3, puis à *trois*).

Pour *quatre plus deux*, l'élève représente sur une main *quatre* par connaissance des configurations de doigts à partir du nom du nombre puis sur l'autre main *deux* ; il reconnaît six et dit *six*.

Connaissances en jeu :


- représentations mentales des petites quantités inférieures à 3 ;
- connaissance de différentes configurations de doigts pour les nombres de 1 à 10, c'est à dire association d'une quantité de doigts à un mot-nombre (sans passer par le comptage), par exemple associer quatre doigts à *quatre* à partir de la représentation ci-contre .





Fig. 2 : Reconnaissance immédiate (P1)

Précisons que « la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main » (MEN, 2021) est travaillée lors des niveaux scolaires précédents, certaines configurations de doigts étant plus fréquentes que d'autres (cinq et un *vs* quatre et deux).

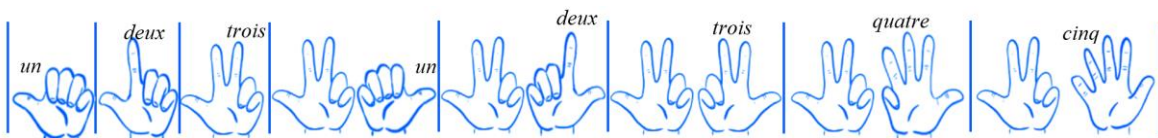
Procédures par comptage ou sur-comptage en appui sur le nom des nombres (P2)

Les procédures par comptage ou sur-comptage avec appui sur les doigts peuvent prendre différentes formes (Fig. 3) selon qu'il s'agisse de comptage un à un pour les PN ou de comptage de dix en dix pour les GNR (sans passer par les écritures chiffrées). Chaque doigt levé représente une unité dans le cas de PN et dix unités (ou une dizaine) dans le cas de GNR. Nous les illustrons avec les calculs respectifs de *trois* plus *cinq* (PN) et *trente* plus *vingt* (GNR).

³ Les écritures en italique témoignent de la représentation du nombre choisie : *un plus deux* signifie que le calcul est donné oralement et 3 que le résultat est attendu sous forme d'écriture chiffrée. Les écritures droites réfèrent au nombre indépendamment de sa représentation.

<p>P21 : Représentation sur les doigts d'une main d'un des termes de la somme par connaissance de configurations de doigts puis représentation sur les doigts de la même main, et si nécessaire de l'autre main, du second terme, par comptage en levant un doigt à chaque nouveau mot, puis...</p>	<p>... reconnaissance immédiate de la configuration</p> <p>ou</p> <p>... recomptage de l'ensemble des doigts</p>
<p>Exemple PN : l'élève représente sur une main <i>trois</i> par connaissance des configurations de doigts puis il complète cette main en comptant <i>un, deux</i> et poursuit sur l'autre main <i>trois, quatre, cinq</i>. Il reconnaît ensuite huit et dit <i>huit</i> ou recompte de un en un l'ensemble des doigts levés et dit <i>huit</i>.</p>	
	
<p>Exemple GNR : l'élève représente sur une main <i>trente</i> unités par trois doigts (pour trois dizaines) par connaissance des configurations de doigts puis il complète cette main en comptant <i>dix, vingt</i>. Il reconnaît ensuite cinquante et dit <i>cinquante</i> ou recompte de dix en dix l'ensemble des doigts levés jusqu'à <i>cinquante</i>.</p>	
	
<p>P22 : Représentation sur les doigts d'une main d'un des termes de la somme par comptage puis complétion de cette main et, si nécessaire, suite sur les doigts de l'autre main par comptage, puis...</p>	<p>...reconnaissance immédiate de la configuration</p> <p>ou</p> <p>...recomptage de l'ensemble des doigts</p>
<p>Exemple PN : l'élève compte <i>un, deux, trois</i> en levant un doigt à chaque mot, puis il poursuit comme dans l'exemple de P21.</p>	
	
<p>Exemple GNR : l'élève compte <i>dix, vingt, trente</i> en levant un doigt à chaque mot, puis il reprend avec l'autre terme de la somme, <i>dix, vingt</i>. Il poursuit comme dans l'exemple de P21.</p>	
	
<p>P23 : Représentation sur chacune des mains d'un des termes de la somme par comptage (nombre d'unités pour les PN ou nombre de dizaines pour les GNR) puis...</p>	<p>...reconnaissance immédiate de la configuration</p> <p>ou</p> <p>...recomptage de l'ensemble des doigts</p>

Exemple PN : l'élève compte *un, deux, trois* en levant un doigt à chaque mot, puis il compte *un, deux, trois, quatre, cinq* sur l'autre main et poursuit comme dans P21.



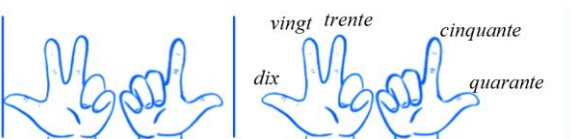
Exemple GNR : l'élève compte *dix, vingt, trente* en levant un doigt à chaque mot, puis il compte *dix, vingt* sur l'autre main et poursuit comme dans P21.



P24 : Représentation sur chacune des mains d'un des termes de la somme par connaissance de configurations de doigts puis recomptage de l'ensemble des doigts (nombre d'unités pour les PN ou nombre de dizaines pour les GNR)⁴.

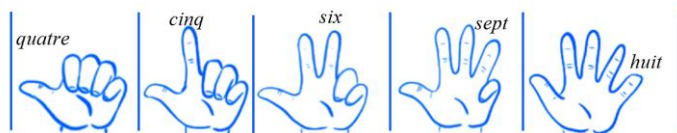
Exemple PN : l'élève lève spontanément trois doigts puis cinq doigts puis il compte un à un chacun des doigts et obtient *huit*.

Exemple GNR : l'élève lève spontanément trois doigts (pour *trente*) puis deux doigts (pour *vingt*) puis il compte de dix en dix l'ensemble des doigts levés jusqu'à *cinquante*.

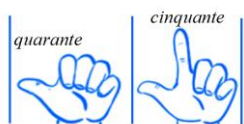


P25 : Sur-comptage à partir de l'un des deux termes de la somme (représentation sur les doigts d'un seul des deux termes de la somme).

Exemple PN : l'élève commence le sur-comptage à partir de *quatre* en levant successivement cinq doigts et dit *huit*.



Exemple GNR : l'élève commence le sur-comptage à partir de *quarante* avec la comptine de dix en dix en levant successivement deux doigts et obtient *cinquante*.



Connaissances en jeu pour les PN et les GN :

- connaissance de différentes configurations de doigts pour les nombres de 1 à 10 ;

⁴ Si l'élève donne l'écriture chiffrée ou le nom de la somme (désignation orale) par connaissance de configurations de doigts, on se ramène à une procédure de type P1.

Connaissances en jeu pour les PN :

- récitation de la petite comptine en levant simultanément un doigt à chaque mot énoncé ;

Connaissances en jeu pour les GNR :

- récitation de la comptine de dix en dix en levant simultanément un doigt à chaque mot énoncé ;
- correspondance entre le repérant (par exemple *trente*) et le nombre de dizaines (par exemple, *dix plus dix plus dix*) ;
- association entre un doigt et une dizaine.

Fig. 3 : Procédures par comptage ou sur-comptage (P2)

Les procédures P2 s'appuient principalement sur la connaissance de la numération orale (comptine des unités pour les PN et comptine de dix en dix pour les GNR). Précisons que, pour ces procédures, un élève n'a pas besoin de savoir qu'un doigt levé correspond à une dizaine ; par conséquent, à la différence des procédures P4 (Fig. 5), aucune connaissance relative à la numération écrite chiffrée n'est en jeu.

Procédures par calcul (P3)

Étudions désormais les procédures par calcul (Fig. 4) à partir de *cinq plus trois* (PN) et *trente plus vingt* (GNR).

P31 : Connaissance automatisée de la somme des nombres en commutant ou non les termes.

Exemple : l'élève sait que *cinq plus trois* ou *trois plus cinq* est égal à *huit 8* (PN) ; il sait que *trente plus vingt* ou que *vingt plus trente* est égal à *cinquante* (GNR).

P32 : Calcul réfléchi à partir de la décomposition additive d'un terme ou des deux.

Exemple : l'élève sait que *cinq plus trois* est égal à *cinq plus un plus deux*, puis il sait que *cinq plus un* est égal à *six* tandis que *six plus deux* est égal à *huit*.

Connaissances en jeu :

Pour P31 :

- les tables d'addition ;
- les doubles dans le cas de la somme de deux nombres identiques ou ayant un écart de un.

Pour P32 :

- les décompositions additives des nombres.

Pour P31 et P32 : commutativité de l'addition (éventuellement)

Fig. 4 : Procédures par calcul (P3)

Procédures par connaissance de la numération écrite chiffrée (P4)

Pour déterminer la somme de deux GNR, s'appuyer sur la numération écrite chiffrée est également possible. Nous l'illustrons avec *trente plus vingt* (Fig. 5).

P41 : Passer d'un GNR au PN correspondant au nombre de dizaines, ajouter des PN puis...

... passage du PN qui représente des dizaines au GNR par récitation de la comptine de dix en dix (en appui éventuel sur les doigts) et production de l'écriture chiffrée.

ou

... utilisation de la signification des chiffres dans l'écriture chiffrée.

<p>Exemple : l'élève traduit <i>trente</i> en nombre de dizaines, c'est-à-dire en 3 dizaines et <i>vingt</i> en 2 dizaines, <i>trente plus vingt</i> est donc égal à 3 dizaines plus 2 dizaines, soit 5 dizaines ; soit il récite la comptine de dix en dix et dit <i>cinquante</i>, soit il écrit 50 (pour 5 dizaines) et dit <i>cinquante</i>.</p>
<p>P42 : Simulation mentale de l'algorithme écrit de l'addition posée et « pose dans la tête » de l'opération en colonnes en alignant les unités avec les unités et les dizaines avec les dizaines, puis en calculant la somme colonne par colonne⁵.</p>
<p>Exemple : l'élève commence par traiter les unités $0+0 = 0$ puis les dizaines $3+2=5$, il écrit 50 et dit <i>cinquante</i>.</p>
<p>Connaissances en jeu :</p> <p>Pour P41 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - passage du nom du nombre à son écriture chiffrée et inversement (pour déterminer le nombre de dizaines à partir de son nom ou lire le nombre à partir de son écriture chiffrée) ; - somme de deux PN ($3+2$ dans l'exemple choisi) ; - numération écrite chiffrée (aspect positionnel) ; <p>Pour P42 :</p> <ul style="list-style-type: none"> - algorithme de l'addition posée.

Fig. 5 : Procédures par connaissance de la numération écrite chiffrée (P4)

Si nous avons présenté séparément chaque procédure, des procédures hybrides peuvent aussi apparaître. Par exemple, pour calculer *trente plus vingt*, l'élève pourrait commencer par sur-compter de dix à partir de *trente* et dire *quarante* (P2 et comptine de dix en dix). Puis il pourrait poursuivre en sur-comptant de un et dire *quarante-et-un*, *quarante-deux* jusqu'à *cinquante* (P2 et comptine des unités).

Une telle finesse dans la description des procédures permet de les lier aux connaissances qui leur sont associées et, par conséquent, de pouvoir suivre leur évolution durant le processus d'apprentissage. Nous avons également montré la diversité des procédures à disposition des élèves pour calculer mentalement des sommes de PN ou de GNR mais aussi la façon dont les connaissances sur le comptage et les numérations peuvent être conjointement mobilisées. Cette description, présentée ici de façon synthétique, vient ainsi compléter celle de Brissiaud (2003). Etudions désormais comment nous exploitons cette analyse *a priori* pour déterminer la ou les procédures qu'un élève a employé pour calculer une somme.

MÉTHODOLOGIE

Notre expérimentation a été menée en début de 4H (octobre 2020) ; douze élèves ont passé trois séries de calculs mentaux individuellement avec un chercheur (Fig. 6).

Séries	PN	GNR
1	$5+3 ; 3+2$	$30+20$
2	$5+2 ; 2+3$	$30+10$
3	$2+5 ; 3+5$	$20+30 ; 10+30$

Fig. 6 : Sommes proposées

⁵ D'après notre définition, P42 relève du calcul mental car l'élève n'écrit pas de calcul intermédiaire.

Le protocole expérimental s'est déroulé selon deux phases :

- 1^{ère} phase : le chercheur a lu deux fois le calcul en invitant l'élève à écrire sa réponse sur une feuille ;
- 2^{ème} phase : le chercheur a présenté le calcul en écriture chiffrée et a ensuite questionné l'élève sur la façon dont il a procédé pour donner le résultat.

Les réponses écrites des élèves ont été collectées et toutes les passations ont été filmées avec une caméra fixe dirigée sur le chercheur et l'élève ; les échanges entre le chercheur et l'élève ont été retranscrits et les gestes de l'élève (mouvement des doigts pouvant correspondre à un comptage sur les doigts notamment) ont été analysés.

Nos premières analyses ont pris en compte la réponse de l'élève et ses gestes lors de la phase 1 mais aussi son discours et ses gestes lors des échanges avec le chercheur durant la phase 2 ; des analyses complémentaires se sont appuyées sur d'autres observables tels que les relances du chercheur et la durée de traitement par l'élève.

PROCÉDURES ET CONNAISSANCES DES ÉLÈVES

Nous montrons dans cette partie la façon dont nous exploitons les éléments de l'analyse *a priori* pour déterminer les procédures de certains élèves sans revenir de façon exhaustive sur chacune d'elles. Dans certains cas, la cohérence au cours des phases 1 et 2 entre la réponse de l'élève, son discours, ses gestes, la durée de traitement pour déterminer la somme, nous permet de déterminer la procédure utilisée par l'élève et les connaissances associées. Mais, dans d'autres cas, l'analyse se révèle être plus complexe et les hypothèses quant aux procédures utilisées restent multiples.

Observables concordants pour repérer une procédure

Nous commençons par illustrer comment nos analyses permettent de repérer les procédures de certains élèves et les connaissances associées lorsque les observables choisis (discours, gestes, etc.) sont concordants.

Les procédures par comptage ou sur-comptage (P2) sont faciles à identifier lorsque l'élève utilise un support observable tel que ses doigts. Ainsi, lors de la phase 1, il a été aisé de repérer la procédure de sur-comptage (P25) utilisée par M* pour le calcul *cinq plus deux* : il lève le pouce de la main gauche et chuchote *six* puis lève l'index de la main gauche et chuchote *sept* puis écrit 7.

Un élève qui déclare connaître le résultat par cœur ou qui semble s'appuyer sur du calcul réfléchi (procédure P3) ne peut être repéré que grâce à son discours (à condition qu'il corresponde au calcul qu'il a réellement effectué) lors de la phase 2. Par exemple, pour répondre à *deux plus cinq*, R* répète la somme et écrit immédiatement la réponse en phase 1. La rapidité de la réponse nous permet d'envisager une procédure par calcul (P3), peut-être automatisé (P31), ou une procédure par reconnaissance immédiate (P1).

En phase 2, R* explicite sa procédure :

R* : Je savais déjà. Avant je savais que *cinq plus trois* est égal à *huit* et un jour je me suis dit et si on faisait moins *un* et plus *un*. Peut-être plein de truc par cœur et j'ai commencé à faire plein plein plein de calculs et ça fait pareil et après j'ai réussi à connaître par cœur.

Même s'il reste complexe de déterminer de façon sûre la façon dont R* a procédé pour donner la somme, son discours lors de la phase 2 témoigne de connaissances relatives à la commutativité de l'addition (il calcule cinq plus deux), l'utilisation d'un résultat mémorisé (*cinq plus trois est égal à huit*) et du calcul réfléchi (*cinq plus deux c'est un de moins que cinq plus trois*).

Enfin, pour les GNR, il semble possible de repérer dans le discours de l'élève s'il raisonne sur des nombres d'unités ou des nombres de dizaines et déterminer par conséquent s'il utilise une procédure P4 basée sur l'écriture chiffrée des nombres. Par exemple, *trente plus dix* peut être vu comme *trente* unités plus *dix* unités ou comme *trois* dizaines plus *une* dizaine.

Pour ce calcul, B* explique : « En fait j'ai fait *trois* et après j'en ai rajouté *un* ça fait *quatre* et plus les *zéros* unités donc ça fait *quarante* » tandis que T* dit : « *Trente*, si tu rajoutes *dix*, on sait que ça fait *quatre*, alors tu rajoutes *zéro* ben ça fait *quarante* ».

B* et T* se ramènent à un calcul en nombre de dizaines même si ce nombre n'est pas toujours apparent dans leur discours. Contrairement à T*, B* utilise explicitement les nombres des dizaines (*trois* et *un*) mais il ne précise pas qu'ils réfèrent à des dizaines. En revanche, T* verbalise son explication avec *trente* et *dix* et c'est seulement lorsqu'il conclut que l'on comprend qu'il calculait en dizaines. Cette hypothèse est renforcée par la présence, dans le discours de chaque élève, du mot « zéro », ce qui renvoie à des connaissances liées à l'écriture chiffrée des nombres.

Observables discordants pour repérer une procédure

Nous poursuivons avec quelques exemples qui montrent toute la complexité à inférer des procédures à partir des données recueillies et des analyses effectuées.

Aucun élève ne verbalise explicitement le recours à des procédures de reconnaissance immédiate (P1). Étudions les gestes d'I* lorsqu'il doit donner la somme *cinq plus deux*. Lors de la phase 1, I* affiche d'un seul coup (environ une seconde) cinq doigts sur une main et deux doigts sur l'autre main (Fig. 7) et regarde le chercheur. I* écrit 7.



Fig. 7 : Gestes de I* durant la phase 1

Est-ce qu'I* utilise la reconnaissance immédiate à partir des configurations de doigts (P1) ? Est-ce qu'il utilise une procédure de comptage ou de sur-comptage (P2) ? Plusieurs hypothèses sont possibles...

Lors de la phase 2, I* explique :

I* : Parce que j'en ai *cinq* [montre ses cinq doigts de la main gauche] et j'en rajoute *deux* [montre l'index et le majeur de la main droite] ça va faire *sept* ou sinon si tu sais pas, bah tu comptes et ça fait *sept*.

Chercheur : Et comment tu fais si tu sais pas ?

I* : Ben en fait, moi, ben je le savais déjà que *cinq plus deux* ça faisait *sept*.

Lors de ces échanges, I* mentionne d'abord explicitement le fait de compter pour obtenir *sept*, ce qui laisserait penser à une procédure de sur-comptage à partir de *cinq* ou de comptage de l'ensemble des doigts levés pour obtenir 7 (P2). I* termine en évoquant un résultat automatisé (P31). Quelle procédure a-t-il utilisé ? A-t-il procédé par reconnaissance de la configuration de doigts ou le résultat $5 + 2$ est-il automatisé ? Difficile de conclure ici puisque son discours sur sa façon de faire ne correspond pas à ses gestes. Cela pourrait être dû à un effet de contrat car, face aux relances du chercheur, l'élève semble finalement répondre en s'appuyant sur des connaissances relevant du calcul (résultats mémorisés) plutôt que sur la reconnaissance des configurations de doigts ; le calcul mental travaillé régulièrement en classe pourrait ainsi lui paraître plus légitime. Cependant, à la différence de R* (dans la partie précédente) qui mentionnait explicitement des propriétés sur les nombres et les opérations, rien de tel n'apparaît dans le discours d'I*.

Avec des PN, il est donc difficile de déterminer si une somme est obtenue grâce à un calcul automatisé (P31), la visualisation mentale des quantités (P1) ou un sur-comptage rapide (P2). L'étude de sommes de nombres plus grands pourrait lever cette incertitude.

En l'absence de signes visibles, le repérage des procédures de comptage ou de sur-comptage (P2) est lui aussi difficile.

Par exemple, pour le calcul *vingt plus trente*, lors de la phase 2, S* explique :

S* : J'ai mis *vingt* dans ma tête et après avec mes doigts j'ai fait *vingt-et-un* [il bouge le pouce], *vingt-deux* [il bouge l'index], *vingt-trois* [il bouge le majeur], jusqu'à *cinquante*.

Chercheur : Je ne t'ai pas vu compter sur tes doigts.

S* : Je l'ai fait dans la tête avec mes doigts.

S* verbalise-t-il la procédure qu'il a réellement utilisée ? S* a mis environ 24 secondes pour produire une réponse correcte, avec par moment de légers hochements de tête, et à d'autres moments des petits mouvements de la main droite (sa main gauche tient son crayon) ce qui pourrait renforcer l'hypothèse d'un recours à une procédure de sur-comptage (P25). Proposer des sommes avec des nombres de taille et de valeur différentes et étudier la corrélation entre le temps mis pour répondre et la taille des nombres pourrait venir conforter ou non cette hypothèse.

Le repérage des procédures s'appuyant sur le comptage ou sur-comptage de dix en dix nécessite d'être attentif aux gestes de l'élève en raison du recours fréquent aux doigts. Voici ce que nous observons pour L* lors de la phase 1 pour le calcul de *trente plus dix* : L* lève trois doigts sur la main gauche (pouce, index, majeur) et dit *trente*, il lève le pouce de la main droite et dit *trente plus dix, ça fait trois, et trente plus dix, ça fait quarante*.

En s'appuyant uniquement sur le discours, on pourrait penser que la procédure repose sur la connaissance d'un fait numérique (P31) ou de la numération écrite (P41) avec *trois* qui renvoie à trois dizaines. Or l'analyse des gestes (il lève d'abord trois doigts puis un doigt) montre qu'il s'appuierait plutôt sur la comptine de dix en dix pour effectuer du sur-comptage (P25).

Comment lever ce doute ? L'étude isolée d'une somme ne permet pas d'aller au-delà et il serait intéressant d'analyser les procédures de L* pour différentes sommes afin de rechercher si des procédures co-existent ou si certaines semblent prépondérantes.

Pour conclure cette partie, on pourrait croire que la procédure basée sur les connaissances sur la numération écrite (P4) traduirait une plus grande expertise de la part de l'élève que celles reposant sur la numération orale. Mais on peut se questionner sur la stratégie d'évitement des procédures de comptage qui pourrait être due à une comptine non suffisamment stabilisée chez certains élèves.

CONCLUSION : RÉSULTATS ET PERSPECTIVES

La description précise des procédures pour donner le résultat d'une somme avec des PN ou des GNR s'est révélée primordiale pour déterminer les connaissances des élèves.

Les observables que nous avons choisis (réponse produite, gestes et discours de l'élève, temps de réponse) ont permis, lorsqu'ils sont concordants, de retrouver chez les élèves observés certaines des procédures que nous avons déterminées a priori. En revanche, l'analyse se révèle être plus complexe lorsque l'interprétation des différentes données recueillies ne converge pas vers une même procédure.

Différentes raisons peuvent être avancées pour comprendre cela. D'abord, les élèves de 7-8 ans ne réussissent pas tous à formuler oralement leur procédure. Ensuite, face au chercheur qu'ils ne connaissent pas, ils peuvent souhaiter montrer qu'ils ont des connaissances (comme I* par exemple) et réaliser la tâche avec une procédure moins experte mais mieux maîtrisée et pour autant expliquer qu'ils ont procédé différemment. Un décalage peut ainsi s'opérer entre la procédure effectivement utilisée par l'élève et celle

qu'il décrit (ce décalage pouvant se retrouver également en classe lorsque l'élève décrit à l'enseignant et/ou à ses pairs une procédure qui lui a permis de trouver sa réponse). Le contrat didactique existant lors de la passation individuelle entre le chercheur et l'élève n'est pas de même nature que celui qui existe en classe et il est probable que les explications données par les élèves dans ce cadre ne soient pas de même nature que celles qui seraient avancées en classe. Face à un tel décalage, comme nous l'avons montré dans nos exemples, il peut néanmoins apparaître dans le discours de l'élève des éléments témoignant de connaissances avérées, en calcul par exemple.

Puisque, pour un même élève, l'analyse des observables lors de la résolution d'un calcul mental additif n'est pas toujours suffisante, nous cherchons actuellement à élargir l'étude de ses procédures à d'autres tâches de calcul mental (calculs soustractifs et compléments). Même s'il est difficile pour les enseignants de pouvoir s'appuyer au quotidien sur des faisceaux d'observables comme nous le faisons et de mener par conséquent de telles analyses, les sensibiliser à la pluralité des procédures existantes et aux connaissances qui leur sont associées devrait leur permettre de mener des mises en commun plus riches, de proposer des institutionnalisations adaptées mais aussi de penser précisément les évaluations des connaissances des élèves.

BIBLIOGRAPHIE

- Bourdin, C. (2021). *Le calcul mental au CP : un regard sur les pratiques enseignantes dans l'académie de Guadeloupe*. [Thèse de doctorat]. Université CY Cergy. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03353926>
- Briand, J., Lacave-Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D. & Goua-de-Baix, V. (1999). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N*, 66, 7-22.
- Brissiaud, R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer*. Retz.
- Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Butlen, D. & Pézard, M. (2003). Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège. *Spirale, Revue de Recherches en Éducation*, 31, 117-140.
- Charnay, R. & Valentin, D. (1991). Calcul ou comptage ? calcul et comptage ! *Grand N*, 50, 11-20.
- Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. [Thèse de doctorat]. Université Paris Diderot.
- Chesné, J.-F. & Fisher, J.-P. (2015). Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. *Conférence de consensus « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire », CNETCO, novembre 2015*.
- Conne, F. (1987). Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire. *Revue Math-École*, 128, 2-12.
- Ministère de l'Éducation Nationale (2016). *Mathématiques. Documents d'accompagnement des programmes de 2016. Le calcul aux cycles 2 et 3*.
- Ministère de l'Éducation Nationale (2021). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. <https://eduscol.education.fr/document/3738/download?attachment>
- Ministère de l'Éducation Nationale (2021). *Programme d'enseignement de l'école maternelle. Bulletin Officiel n°25 du 24 juin 2021*.
- Mounier, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique. Application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 17, 27-58.
- Mounier, E., Grapin, N. & Pfaff, N. (2020). Lire et écrire les nombres. Quelle place dans l'apprentissage des numérations au cycle 2 ? *Grand N*, 106, 31-47.
- Ninnin L.-M. & Pastor, J.-M. (2020). CEDRE 2008-2014-2019 Mathématiques en fin d'école : des résultats en baisse. *Note d'information de la DEPP*, 20.33.
- Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au cycle 2. *Grand N*, 86, 59-90.

ÉVALUATION DE DEUX APPLICATIONS NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL EN 5H-6H

Marie-Line Gardes¹, Ludivine Hanssen¹, Michel Deruaz¹, Céline Hugli¹, Jasinta Dewi²

¹Haute Ecole Pédagogique Canton de Vaud, ²Université de Lausanne, Suisse

Mots clé : école primaire, calcul, application numérique

Résumé : À la suite des résultats des enquêtes PISA et TIMSS, certains gouvernements placent l'enseignement des mathématiques au cœur de leur politique éducative. C'est par exemple le cas du canton de Vaud, en Suisse, qui a mis en place une « mission mathématique » en 2018-2019 afin d'améliorer les connaissances et les compétences en mathématiques des élèves du primaire. L'une des recommandations de cette mission¹ est de proposer l'utilisation d'une application numérique pour améliorer les performances des élèves du primaire en calcul. Afin de choisir entre les applications *Calcularis*² et *Matheros*³, une étude comparative évaluant et comparant les progrès en calcul des élèves de 5H-6H, a été menée en 2021 dans le canton de Vaud. Cet article rend compte des résultats de cette recherche.

PRÉSENTATION DE L'ÉTUDE

Il s'agit d'une étude visant à évaluer et comparer deux applications numériques, du point de vue de leur adéquation avec le curriculum d'une part, et du point de vue de leur impact sur les progrès des élèves en calcul d'autre part. Cette problématique est déclinée en deux questions de recherche.

La première question de recherche concerne l'analyse des contenus de chaque application numérique : les contenus mathématiques de ces applications sont-ils pertinents pour l'apprentissage du calcul et en adéquation avec le plan d'études romand (PER) ? Il s'agit d'étudier les tâches proposées par chaque application numérique et analyser si elles correspondent aux objectifs du PER (MSN 22, MSN 23), et plus spécifiquement aux progressions des apprentissages « Calculs ». Des outils de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 2002) seront mobilisés pour réaliser cette étude.

La seconde question de recherche porte sur l'impact de chaque application sur la progression des élèves en calcul : l'utilisation fréquente et régulière de l'application numérique en classe permet-elle aux élèves de progresser en calcul ? Il s'agit d'évaluer si les élèves progressent en calcul mais également d'évaluer si les élèves des classes qui utilisent *Calcularis* progressent davantage (ou pas) en calcul que ceux qui utilisent *Matheros*. Des analyses statistiques fréquentistes et bayésiennes seront utilisées pour réaliser cette étude.

LES APPLICATIONS NUMÉRIQUES ÉVALUÉES

Dans ce paragraphe, nous présentons les deux applications utilisées en classe. Le choix des applications résulte de l'utilisation de celles-ci dans les classes vaudoises, notamment pendant la période d'enseignement à distance à la suite de la pandémie de Covid-19 au printemps 2020.

¹ <https://www.vd.ch/toutes-les-autorites/departements/departement-de-la-formation-de-la-jeunesse-et-de-la-culture-dfjc/rentree-scolaire-2020-2021/deuxieme-partie-les-quatre-chantiers-prioritaires-du-dfjc/la-consolidation-de-la-leo/#c2064910>

² <https://go.dybuster.com/calcularis/>

³ <https://matheros.fr/>

Calcularis

Calcularis 2.0 est une application numérique développée par des chercheurs en neurosciences et des informaticiens de l'École Polytechnique de Zurich (von Aster et al., 2016). Elle est commercialisée par *Dybuster*. L'application vise à automatiser la reconnaissance des différentes représentations des nombres, à soutenir l'accès à la ligne numérique et à entraîner les opérations arithmétiques (Fig. 1a) ainsi que la connaissance des faits arithmétiques dans des intervalles de nombres de 0-10 à 0-1000 (Kohn et al., 2020). Elle a été conçue pour être utilisée dès le début de l'école primaire et spécialement pour les enfants présentant de grandes difficultés ou des troubles d'apprentissage (par exemple, la dyscalculie). L'application fait appel à l'intelligence artificielle (*adaptive learning*), c'est-à-dire que l'application adapte le contenu proposé aux réponses des élèves. Les tâches sont présentées aux élèves dans un ordre croissant de difficulté, dans le domaine numérique de travail en cours (Annexe 1). L'enseignant n'a pas la possibilité d'agir sur les contenus proposés, en revanche, il a la possibilité de récupérer des données des progrès d'un élève, d'un groupe d'élèves ou de l'ensemble de la classe. Ces données renseignent sur le temps passé sur l'application ; le nombre d'exercices effectués ; les erreurs commises ; les compétences acquises ou en cours d'acquisition (Fig. 1b).

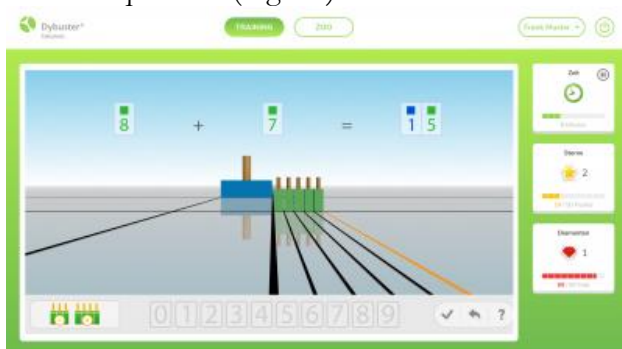


Fig. 1a : Exemple de la tâche « Calculatrice ». L'élève doit écrire le résultat de $8+7$. Le feedback propose une représentation de la quantité avec des blocs.

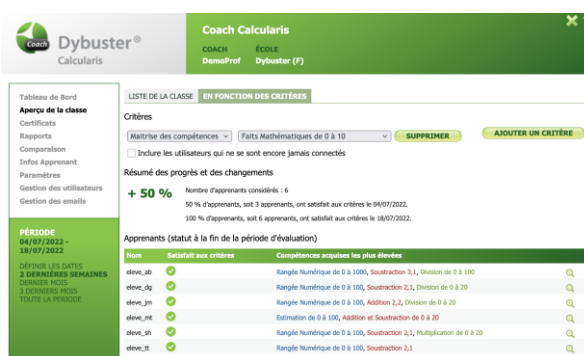


Fig. 1 : Tableau de bord de l'enseignant pour suivre l'avancée des élèves de sa classe

Matheros

Matheros est une application numérique proposée par le site *Monecole.fr* créé en 2011 par un enseignant et formateur au numérique en France. L'objectif affiché de cette application est de permettre « aux élèves de progresser dans le calcul mental selon le principe des ceintures (comme dans les arts martiaux) des compétences » (site *Monecole.fr*). Les activités sont proposées avec un graphisme ludique (Fig. 2a). Le « suivi des progrès » renseigne l'enseignant sur les compétences acquises ou en cours d'acquisition (Fig. 2b). L'enseignant a la possibilité de paramétrer le temps disponible pour effectuer les tâches et des horaires de jeu. *Matheros* n'adapte pas le contenu proposé en tenant compte des réponses de l'élève (i.e. il n'y a pas d'*adaptive learning*). L'application propose au départ un parcours d'apprentissage à l'élève que l'enseignant a la possibilité d'adapter ou de personnaliser. Il peut ainsi différencier les apprentissages en sélectionnant les ceintures de compétences que le logiciel propose aux élèves. Les tâches sont présentées aux élèves dans un ordre croissant de difficulté, dans le domaine numérique de travail en cours (Annexe 2). Pour franchir les différents paliers (obtenir les ceintures suivantes), l'élève doit effectuer des tâches de découverte (2 tâches « *J'apprends* »), d'entraînement (3 tâches « *Mission* » = 3 niveaux différents de difficulté) et de validation (1 tâche « *Validation* »).



Fig. 2a : Exemple de la tâche « Addition - Nombres 1 à 5. Mission ». L'élève doit trouver deux nombres dont la somme fait 3.



Fig. 2b : Tableau de bord de l'enseignant pour suivre l'avancée des élèves de sa classe.

MÉTHODOLOGIE DE L'ÉTUDE

Nous présentons ci-dessous la méthodologie de l'étude menée dans des classes de l'école primaire du Canton de Vaud en 2020-2021.

Échantillon

Notre échantillon est composé de huit classes de 5H et de sept classes de 6H (élèves âgés de 8 à 10 ans) du canton de Vaud. Cela représente 15 enseignants et 260 élèves. Chaque classe a été assignée à un groupe par les directions des établissements (avec la contrainte d'avoir une répartition équitable entre les deux groupes) :

- le groupe *Calcularis* : il s'agit des classes utilisant l'application *Calcularis*. Ce groupe est composé de quatre classes de 5H et quatre classes de 6H, soit huit classes et 143 élèves.
- le groupe *Matheros* : il s'agit des classes utilisant l'application *Matheros*. Ce groupe est composé de quatre classes de 5H et trois classes de 6H, sept classes et 117 élèves.

Mesures

Nous avons utilisé deux tests pour évaluer les progrès des élèves en calcul.

Test 1 : *Fluence*. Nous avons évalué la fluence en calcul avec le sous-test 6 de la batterie de tests normés Woodcock-Johnson III (Woodcock, McGrew et Mather, 2001). Il s'agit d'effectuer le plus possible d'opérations en 3 minutes. Ces opérations sont des additions, soustractions et multiplications de deux nombres à un chiffre. Elles sont proposées en ligne, le résultat doit être écrit (Annexe 3a). Nous avons choisi ce test pour deux raisons : il permet d'évaluer la fluence en calcul des élèves et il permet, grâce aux normes disponibles, d'effectuer un repérage des élèves en difficulté.

Test 2 : *Calcul*. Nous avons évalué la résolution de calculs avec un test conçu par notre équipe pour évaluer les attentes du plan d'étude en 5H et 6H. Le test comporte cinq catégories de questions - *Addition*, *Soustraction*, *Addition à trous*, *Multiplication* et *Moitié/double* – déclinées selon des valeurs de variables didactiques. Par exemple, pour la catégorie *Addition*, les variables didactiques sont : le nombre de termes de l'addition, la taille des nombres en jeu, la présence (ou l'absence) de retenue, la possibilité (ou non) de complément à 10 ou à 100, le recours (ou non) à l'associativité, le recours (ou non) à la commutativité, le recours (ou non) à une procédure spéciale (par exemple ajouter 9). Nous proposons ci-dessous un tableau (Tab. 1) présentant nos choix de variables pour certaines des additions proposées dans le test.

Calcul proposé	40+4	8+19	47+33	438+201	13+12+17	87+9
Variables didactiques						
Nombre de termes de l'addition	2	2	2	2	3	2
Taille des nombres en jeu	≤ 100	≤ 100	≤ 100	≥ 100	≤ 100	≤ 100
Présence (ou absence) de retenue	Non	Oui	Oui	Non	Oui	Oui
Possibilité (ou non) de complément à 10 ou à 100	Non	Non	Oui	Non	Oui	Non
Recours (ou non) à l'associativité	Non	Non	Non	Non	Oui	Non
Recours (ou non) à la commutativité	Non	Oui	Non	Non	Oui	Non
Recours (ou non) à une procédure spéciale	Non	Non	Non	Non	Non	Oui

Tab. 1 : Analyse des calculs proposés selon les valeurs des variables didactiques

L'ensemble des calculs proposés sont disponibles en annexe (Annexe 3b). Ce test était non limité dans le temps et les élèves pouvaient poser l'opération sur la feuille.

Procédure

La procédure s'est déroulée en quatre étapes (Fig. 3), de novembre 2020 à juin 2021. La première étape concerne les pré-tests (novembre 2020) : les enseignants ont fait passer les deux tests mathématiques (Tests 1 et 2) à tous leurs élèves dans leurs propres classes. La deuxième étape concerne l'utilisation de l'application numérique (de novembre 2020 à janvier 2021) : pendant six semaines, les enseignants ont proposé à leurs élèves d'utiliser *Calcularis* ou *Matheros* (selon leur groupe) au moins deux fois vingt minutes par semaine, individuellement et en classe. La troisième étape est consacrée aux post-tests (janvier 2021) : les enseignants ont fait passer les deux (mêmes) tests mathématiques une semaine après la fin de l'utilisation des applications. La quatrième étape concerne les post-tests différés (mai-juin 2021) : les enseignants ont de nouveau fait passer les deux (mêmes) tests mathématiques, quatre mois et demi après l'arrêt de l'utilisation des applications. Ces post-tests différés avaient pour objectif d'évaluer si les progrès effectués par les élèves étaient maintenus dans le temps.

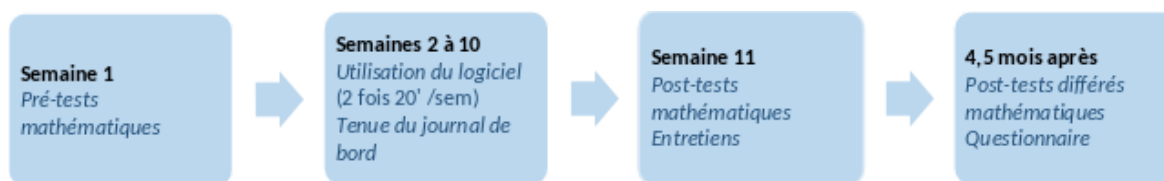


Fig. 3 : Protocole expérimental

Analyses

Une méthode de recherche mixte permettant une analyse quantitative et qualitative a été choisie. Afin d'analyser le contenu de chaque application (première question de recherche), nous avons utilisé des outils de la Théorie Anthropologique du Didactique, en particulier le quadruplet praxéologique :

Toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ (Chevallard, 2002, p. 3).

Nous avons ainsi listé les types de tâches relatives à l'apprentissage du calcul présents dans le curriculum de l'école primaire (PER cycles 1 et 2) puis nous les avons regroupés en genres de tâches. Nous avons ensuite réalisé l'ensemble des tâches proposées par chaque application et nous les avons examinées à la lumière du cadre théorique élaboré.

Pour apporter des éléments de réponse à la seconde question de recherche relative à l'impact de l'utilisation de chaque application sur la progression des élèves en calcul, nous avons réalisé une étude quantitative et comparative grâce à des analyses statistiques avec des tests fréquentistes et bayésiens⁴. Par comparaison des résultats obtenus aux pré-tests et aux post-tests, nous mesurons les progrès des élèves réalisés entre ces deux moments. Nous regardons également s'il existe des différences significatives entre les deux groupes (i.e. est-ce que le groupe *Calcularis* a mieux progressé que le groupe *Matheros* ou inversement ?).

RÉSULTATS

Nous présentons ci-dessous les résultats, d'une part ceux de l'analyse des contenus de chaque application numérique, et d'autre part ceux de l'analyse de l'impact de l'utilisation d'une application en classe sur les progrès des élèves en calcul.

Analyse des contenus de chaque application

Dans un premier temps, nous avons listé les types de tâches relatifs à l'apprentissage du calcul, présents dans l'ensemble du curriculum de l'école primaire (cycles 1 et 2). Les compétences en calcul visées par le PER sont détaillées dans les objectifs MSN 13 - *Résoudre des problèmes additifs* et MSN 23 - *Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs*, Progression d'apprentissage *Calculs*. Nous les avons ensuite regroupés en 7 genres de tâches : additionner ; soustraire ; chercher un complément ; trouver un double ou une moitié ; multiplier ; trouver un multiple ; diviser. Le tableau 2 (Tab. 2) illustre le résultat de cette analyse pour le genre de tâches *Additionner*.

Genre de tâches	Objectifs app. PER	Type de tâches PER	Degré			
			1-2P	3-4P	5-6P	7-8P
Additionner	MSN 23	Utilisation des algorithmes pour effectuer des calculs de façon efficace (addition, soustraction, multiplication)			X	
	MSN 23	Utilisation des algorithmes pour effectuer des calculs de façon efficace avec des nombres écrits sous forme décimale inférieurs à 10'000 addition et soustraction dont les termes ont au plus 2 décimales multiplication dont les facteurs et le produit ont au plus 2 décimales				X
	MSN 13	Utilisation des propriétés du système de numération et de l'addition (commutativité, associativité, élément neutre) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace		X		
	MSN 23	Utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité), et décomposition des nombres (additive, soustractive, multiplicative) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace ainsi que pour donner des estimations			X	
	MSN 23	Utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité), et décomposition des nombres (additive, soustractive, multiplicative) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace ainsi que pour donner des estimations				X

Tab. 2 : Analyse des types de tâches du PER pour le genre de tâche *Additionner*

⁴ Les données ont été analysées avec des statistiques fréquentistes (tests t ou χ^2) et bayésiennes. Les résultats des tests fréquentistes ont été interprétés comme étant significatifs lorsque la valeur du p était inférieure à 0,05. La taille de l'effet est quantifiée à l'aide du d de Cohen. Les statistiques bayésiennes permettent d'estimer la force de la preuve (i.e. le facteur Bayes, BF) en faveur de l'hypothèse alternative d'une différence entre les groupes (H1) par rapport à l'hypothèse nulle d'absence de différence entre les groupes (H0) pour chaque test. Pour plus de précisions sur les tests statistiques utilisés, voir (Howell, 2008).


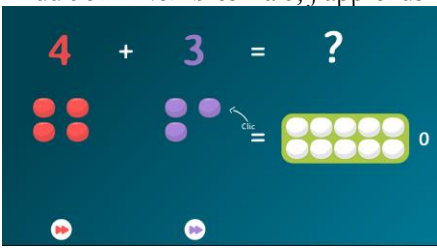
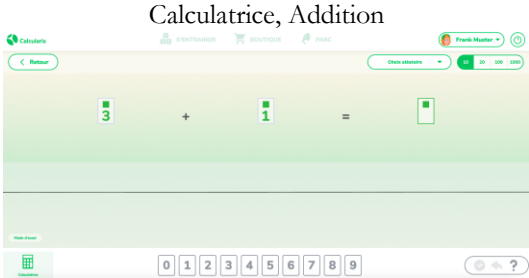
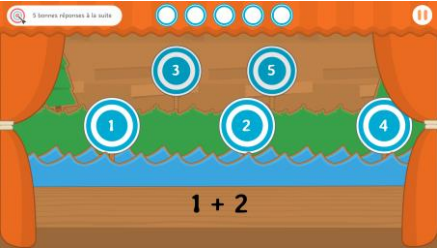
Ensuite, nous avons réalisé l'ensemble des tâches proposées dans chacune des applications numériques et nous avons déterminé si les tâches proposées correspondent aux types de tâches visées par le PER (Tab. 3).

Genre de tâches	Objectifs app. PER	Type de tâches PER	Degré				Correspondances au type de tâches de Mathéros.fr	Correspondances au type de tâches de Calcularis
			1-2P	3-4P	5-6P	7-8P		
Additionner	MSN 23	Utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité), et décomposition des nombres (additive, soustractive, multiplicative) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace ainsi que pour donner des estimations			X		Addition d'un chiffre à un nombre de deux chiffres	Additionner un nombre à un chiffre avec un nombre à un chiffre (au passage de dizaine)
							Addition de dizaines	Additionner et soustraire des nombres dans la tranche 0-20
							Addition de centaines	Addition rapide de nombres à un chiffre avec un résultat à deux chiffres
							Addition – Unité, dizaine, centaine	Additionner un nombre à deux chiffres avec un nombre à un chiffre
							Addition de deux nombres	Additionner un nombre à deux chiffres avec un nombre à deux chiffres
							Addition et soustraction – unité, dizaine, centaine	Additionner un nombre à trois chiffres et un nombre à un chiffre
							Addition d'un entier avec un décimal	Additionner un nombre à trois chiffres et un nombre à deux chiffres
							Addition de deux décimaux	Additionner un nombre à trois chiffres et un nombre à trois chiffres

Tab. 3 : Analyse des types de tâches de chaque application, en lien avec le PER. Exemple pour un type de tâches du PER du genre de tâches *Additionner*.

Les résultats globaux de cette analyse (Annexe 4) mettent en évidence que l'application *Mathéros* travaille essentiellement la progression d'apprentissage *Calculs* de l'axe thématique *Opérations* de MSN 23. Les tâches sont davantage en adéquation avec les finalités des degrés 5H, 6H, 7H et 8H du cycle 2. L'application *Calcularis*, quant à elle, propose des tâches qui tiennent compte des axes thématiques *Nombres* (MSN 12 et MSN 22) et *Opérations* (MSN 13 et MSN 23). Les tâches sont en adéquation avec les degrés 3H, 4H, 5H et 6H et partiellement avec les degrés 1H-2H et 7H-8H.

Une analyse plus fine des contenus selon un type de tâches donné permet de mettre en évidence des différences praxéologiques entre les applications numériques. Nous présentons un exemple (Tab. 4) de cette analyse sur le type de tâches « additionner deux nombres inférieurs ou égaux à 5 ».

Type de tâches : Additionner deux nombres inférieurs ou égaux à 5	
<i>Calcularis</i>	<i>Mathéros</i>
<p>Règle à calcul</p> 	<p>Addition - Nombres 1 à 5, J'apprends</p> 
<p>Tâche de l'élève : trouver le résultat de l'addition en s'aidant de la boîte en verre.</p> <p>Technique : dénombrement par surcomptage à partir du plus grand nombre.</p> <p>Technologie : l'addition comme transformation d'une collection</p>	<p>Tâche de l'élève : trouver le résultat de l'addition en s'aidant des collections de billes.</p> <p>Technique : dénombrement par recomptage.</p> <p>Technologie : l'addition comme réunion de deux collections</p>
<p>Calculatrice, Addition</p> 	<p>Addition - Nombres 1 à 5, J'apprends</p> 

<p>La tâche suivante proposée à l'élève s'appelle <i>Calculatrice</i>. Il s'agit de trouver le résultat de l'addition qui s'affiche. C'est le même type de tâches que la précédente mais sans la représentation des quantités avec les blocs.</p> <p>Les blocs réapparaissent dans le feedback donné à l'élève (Fig. 1a).</p> <p>L'objectif est de passer de procédures de dénombrement à la mémorisation des faits numériques.</p>	<p>La tâche suivante proposée à l'élève consiste à trouver le résultat d'une addition parmi plusieurs propositions. Le type de tâches est légèrement différent puisqu'il s'agit de « trouver le résultat parmi » et non de « produire le résultat ». La représentation avec les billes n'est plus accessible.</p> <p>L'objectif est de passer de procédures de dénombrement à la mémorisation des faits numériques.</p>
---	---

Tab. 4 : Analyse du type de tâches « Additionner deux nombres inférieurs ou égaux à 5 » dans les deux applications numériques

Cet exemple illustre une différence entre les deux applications numériques sur le choix de la technologie : *Calcularis* présente l'addition via la transformation d'une collection alors que *Matheros* la présente via la réunion de deux collections. Les techniques ne sont pas les mêmes (surcomptage *vs* recomptage), bien qu'elles soient toutes deux des procédures de dénombrement. Les quantités sont représentées par des ostensifs différents, des blocs ou des billes. L'analyse des organisations mathématiques sur ce type de tâches met en évidence que *Calcularis* propose toujours le même type de tâches pour travailler l'addition et les variables didactiques en jeu sont la présence ou non des blocs puis la taille des nombres. En revanche, *Matheros* propose trois types de tâches : produire un résultat, choisir un résultat parmi d'autres, décomposer un nombre (Fig. 2). Les variables didactiques sont la présence ou non des billes, la taille des nombres mais également le temps limité ou non pour donner la réponse.

Impact de l'utilisation des applications sur les progrès des élèves en calcul

Dans cette partie, l'effet de l'utilisation de *Calcularis* et de *Matheros* sur les progrès en calcul sera évalué et comparé grâce à l'analyse des résultats des élèves aux deux tests (fluence et calcul). Ci-dessous, nous détaillons les résultats obtenus à chaque test, pour chaque groupe, deux mois après le début de l'intervention puis quatre mois et demi après.

POUR LE TEST CALCUL – PROGRESSION À 2 MOIS

Les deux groupes (*Calcularis* et *Matheros*) progressent de manière statistiquement significative sur ce test, que ce soit en 5H ou en 6H. En comparant la progression des élèves des deux groupes (Fig. 4), on observe une progression plus importante chez les élèves du groupe *Calcularis* que chez les élèves du groupe *Matheros* en 5H. En 6H, les deux groupes progressent de façon similaire.

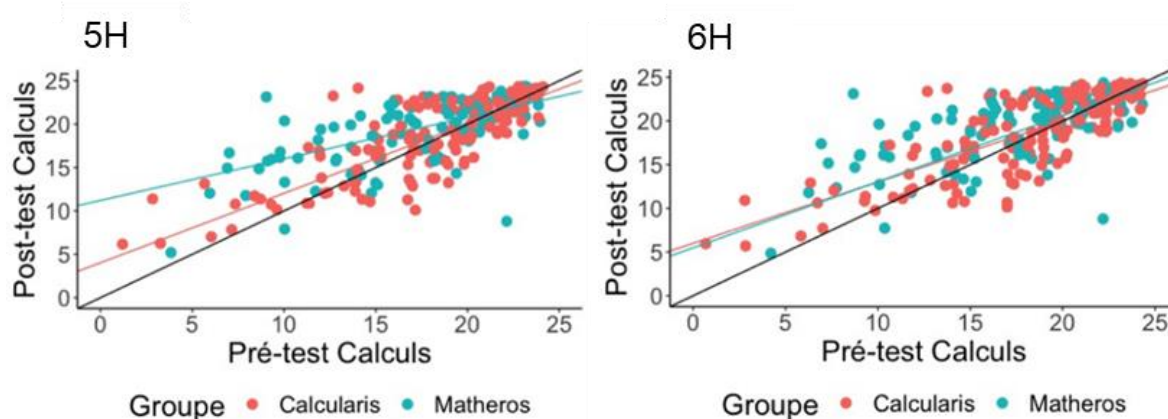


Fig. 4. Progression des élèves de 5H et de 6H par groupe entre le pré-test et le post-test pour le calcul

En abscisse, le score au pré-test (sur 24) et en ordonnée le score au post-test (sur 24). Chaque point représente les résultats d'un élève. Les droites sont les droites de régression linéaire représentant les progrès des élèves par groupe. La droite grise est la droite unité (même score au pré et post tests).

POUR LE TEST CALCUL – PROGRESSION À 4,5 MOIS

Les deux groupes (*Calcularis* et *Matheros*) progressent de manière statistiquement significative sur ce test, que ce soit en 5H ou en 6H. En comparant la progression des élèves des deux groupes, on n’observe plus de différence (Fig. 5).

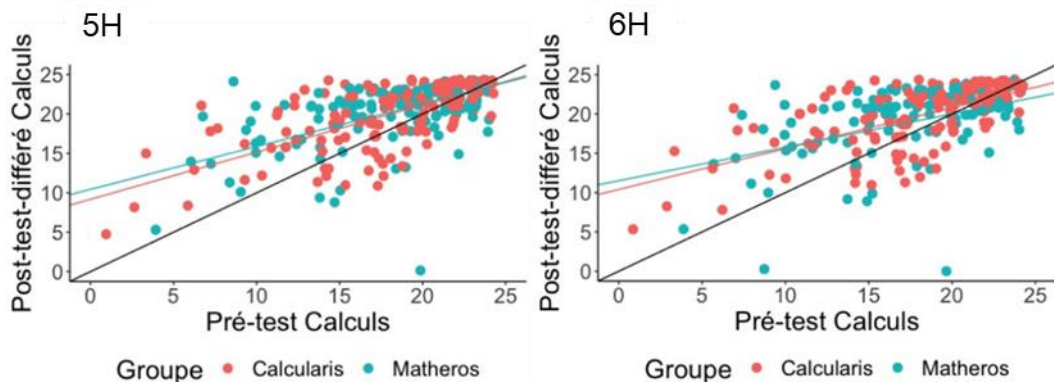


Fig. 5 : Progression des élèves de 5H et de 6H par groupes entre le pré-test et le post-test différé pour le calcul
 En abscisse, le score au pré-test (sur 24) et en ordonnée le score au post-test (sur 24). Chaque point représente les résultats d’un élève. Les droites sont les droites de régression linéaire représentant les progrès des élèves par groupe. La droite grise est la droite unité (même score au pré et post tests).

POUR LE TEST FLUENCE – PROGRESSION À 2 MOIS

Les deux groupes (*Calcularis* et *Matheros*) progressent de manière statistiquement significative sur ce test, que ce soit en 5H et en 6H. En comparant la progression des élèves des deux groupes sur le test de fluence, on n’obtient aucune progression significativement plus importante dans l’un des groupes, tant en 5H qu’en 6H (Fig. 6).

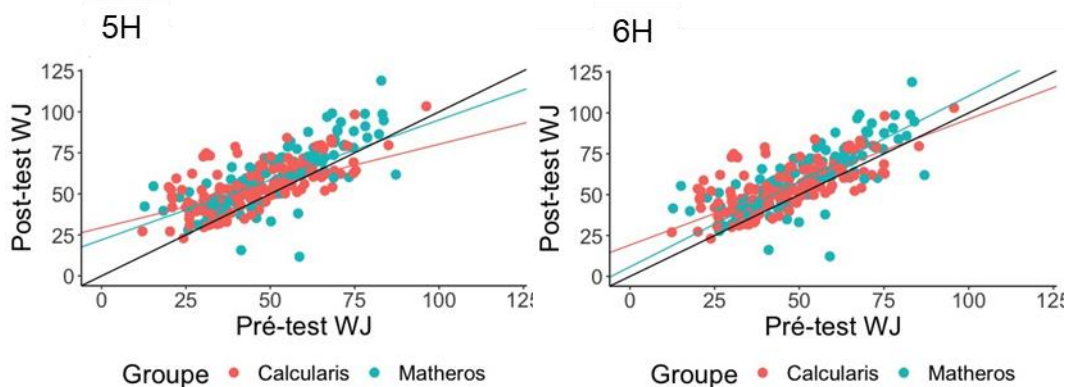


Fig. 6 : Progression des élèves de 5H et de 6H par groupes entre le pré-test et le post-test pour la fluence
 En abscisse, le score au pré-test (sur 160) et en ordonnée le score au post-test (sur 160). Chaque point représente les résultats d’un élève. Les droites sont les droites de régression linéaire représentant les progrès des élèves par groupe. La droite grise est la droite unité (même score au pré et post tests).

POUR LE TEST FLUENCE – PROGRESSION À 4,5 MOIS

Les deux groupes (*Calcularis* et *Matheros*) progressent de manière statistiquement significative à ce test, que ce soit en 5H ou en 6H. En comparant la progression des élèves des deux groupes sur le test de fluence (Fig. 7), on remarque une progression plus importante chez les élèves du groupe *Matheros* en 6H uniquement.

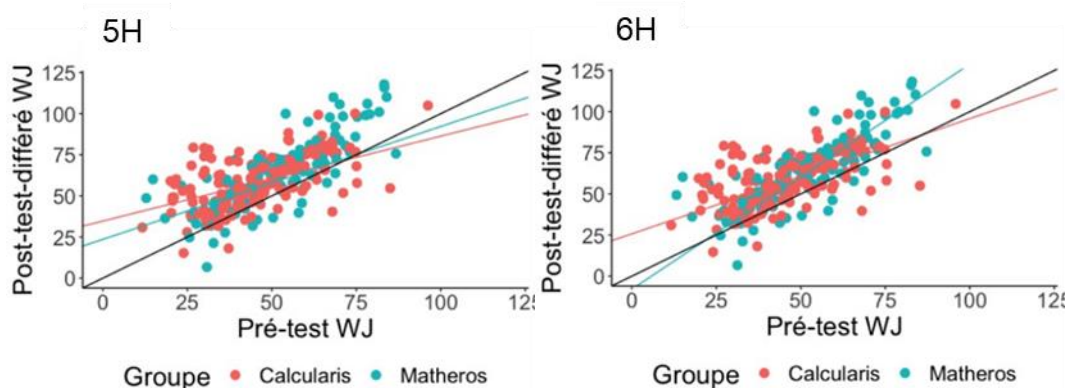


Fig. 7 : Progression des élèves de 5H et de 6H par groupes entre le pré-test et le post-test différé pour la fluence. En abscisse, le score au pré-test (sur 160) et en ordonnée le score au post-test (sur 160). Chaque point représente les résultats d'un élève. Les droites sont les droites de régression linéaire représentant les progrès des élèves par groupe. La droite grise est la droite unité (même score au pré et post tests).

ANALYSES DU TEST CALCULS

Nous avons fait une analyse plus fine des résultats obtenus au test *Calculs*, en fonction des cinq catégories (addition, soustraction, addition à trous, multiplication et moitié/double) et en fonction des valeurs des variables didactiques. Les résultats mettent en évidence que :

- la catégorie *Addition à trous* est celle qui présente le plus de difficultés aux élèves : lors du post-test, ces opérations sont réussies, en moyenne à 48% pour les 5H et 66% pour les 6H ;
- la catégorie *Soustraction* est présente également des difficultés aux élèves. En effet, lors du post-test, ces opérations sont réussies, en moyenne à 55% pour les 5H et 65% pour les 6H ;
- les autres catégories sont mieux réussies : lors du post-test, les additions sont réussies en moyenne à 86% pour 5H et 90% pour les 6H, les doubles et moitiés sont réussis en moyenne à 75% pour 5H et 79% pour les 6H et les multiplications sont réussies en moyenne à 88% pour 5H et 71% pour les 6H.

En ce qui concerne les progressions entre le pré-test et le post-test, on note des progressions statistiquement significatives, en 5H pour toutes les catégories sauf les *Addition à trous* et en 6H pour les catégories *Doubles et moitiés* et *Multiplication* uniquement. Le fait que les élèves de 6H ne présentent pas de progression statistiquement significative sur les additions s'explique par leurs résultats au pré-test déjà élevés. Il y avait donc peu de marge de progression possible. En revanche, pour les catégories *Soustraction* et *Addition à trous*, ces résultats montrent qu'ils restent en difficulté malgré l'utilisation des applications et l'enseignement. Il serait donc intéressant d'étudier davantage ces difficultés en analysant leurs procédures. Pour la catégorie *Addition à trous*, où aucun des groupes d'élèves (5H et 6H) ne présente de progression statistiquement significative, cela pourrait s'expliquer par les contenus des applications qui proposent moins ce genre de tâches que les autres.

En ce qui concerne la comparaison des résultats au test *Calculs* entre les deux applications (*Calcularis* et *Matheros*), l'analyse montre peu de différences. Nous avons uniquement relevé que :

- seuls les élèves de 5H ayant utilisé *Calcularis* progressent de manière significative dans la catégorie *Addition à trous* ;
- le groupe (5H-6H) ayant utilisé *Calcularis* obtient de meilleurs résultats que le groupe *Matheros* (5H-6H) au post-test différé sur les opérations dont le résultat est supérieur à 100 (variable didactique) ;
- le groupe (5H-6H) ayant utilisé *Matheros* obtient de meilleurs résultats que le groupe *Calcularis* (5H-6H) au post-test différé sur les opérations où il s'agit d'ajouter 9 (variable didactique).

Ces résultats semblent difficiles à expliquer sur la base des contenus des applications. Nous ne pouvons donc pas conclure à un effet de l'une ou l'autre des applications, de manière générale, sur les résultats en calcul des élèves, en fonction des catégories ou des valeurs de variables didactiques.

CONCLUSION & PERSPECTIVES

Les résultats de l'analyse des contenus de chaque application montrent qu'elles permettent toutes les deux de travailler des connaissances mathématiques du PER, avec toutefois quelques différences : *Matheros* propose essentiellement des tâches dans le champ du calcul pour les degrés 5H-8H alors que *Calcularis* propose également des tâches sur la construction du nombre pour les degrés 3H-6H et partiellement pour les degrés 1H-2H et 7H-8H. L'analyse des praxéologies pointe des différences entre les deux logiciels, notamment du point de vue des techniques et technologies mobilisées par les élèves. Cette analyse nous permet également de souligner que les tâches proposées par les applications ne suffisent pas à elles-seules pour l'enseignement du calcul. En effet, les procédures visées par les tâches (i.e. les techniques) ne sont pas assez variées. Le travail de mise en commun des diverses procédures proposées par les élèves et celui de l'analyse des erreurs ne sont en particulier pas pris en charge par ces applications. Ainsi, si ces applications permettent *a priori* d'exercer le calcul, elles doivent être considérées comme un outil supplémentaire à disposition de l'enseignant et non comme un substitut aux outils classiques (et non numériques).

Nos résultats, obtenus par des analyses statistiques, montrent que *Calcularis* et *Matheros* permettent à tous les élèves de progresser significativement en fluence et en calcul après une utilisation de six semaines et à un délai de quatre mois et demi. De plus, l'analyse comparative révèle que l'application *Calcularis* est plus efficace que l'application *Matheros* pour le calcul en 5H (après une utilisation de six semaines). Ce résultat est cohérent avec les résultats de l'analyse des contenus des applications puisque *Calcularis* cible les apprentissages de la fin du Cycle 1 et du début du Cycle 2 et reprend des notions de base sur le nombre (reconnaissance de différentes représentations du nombre, estimer la taille d'un nombre, ordonner des nombres, sens des opérations). On peut faire l'hypothèse que cela a permis aux élèves qui n'avaient pas totalement acquis les compétences en calcul du Cycle 1 de les travailler à nouveau et de progresser davantage que les élèves qui ont utilisé l'application *Matheros* qui n'ont pas eu la possibilité de retravailler ces notions de base. Notons que ce besoin de retravailler les bases du calcul a peut-être été amplifié par l'enseignement à distance du printemps 2020, dû à la pandémie Covid 19. En revanche, l'application *Matheros* est plus efficace à moyen terme (quatre mois et demi après l'utilisation de l'application) pour la fluence en calcul en 6H. Ce résultat peut être expliqué par les contenus proposés par l'application *Matheros* dont plusieurs sont des tâches avec un temps limité pour réaliser les calculs demandés. Cela peut ainsi favoriser la rapidité et l'aisance en calcul des élèves.

Pour résumer, les deux applications sont en adéquation avec les objectifs du PER pour les degrés 5H-6H. Les élèves qui ont utilisé l'une ou l'autre des applications progressent de manière significative en calcul. Ce résultat confirme les résultats de plusieurs études qui ont montré l'impact de *Calcularis* sur les apprentissages mathématiques d'élèves (Käser et al., 2013 ; Rauscher et al., 2016). En ce qui concerne l'utilisation *Matheros*, il n'existe pas, à notre connaissance, d'étude d'impact de son utilisation sur les apprentissages. La comparaison des progressions des deux groupes *Calcularis* et *Matheros* met en évidence des différences locales (dans l'un ou l'autre degré, dans l'une ou l'autre des compétences mathématiques testées) mais pas de manière globale. Ainsi, nous ne pouvons pas affirmer que l'une des deux applications est meilleure que l'autre pour améliorer les résultats des élèves en calcul en 5H-6H. Cependant, il s'agit d'une première étude évaluant l'impact de l'utilisation d'applications numériques en classe et il serait nécessaire de mener des analyses complémentaires et plus approfondies pour comprendre davantage leurs apports et limites pour l'enseignement du calcul.

Pour conclure, notre étude comporte plusieurs limites qui devront être prises en compte pour de futures recherches. La première limite est l'absence d'un groupe témoin. Nous ne pouvons donc pas relier les progrès des élèves en calcul uniquement à l'impact de l'application. La deuxième limite est la non

exploitation, par les enseignants, des données numériques mises à disposition (compétences travaillées, nombre d'erreurs, temps passé, etc.) par les applications. On peut faire l'hypothèse que l'amélioration des performances en calcul serait plus manifeste si ces données étaient davantage exploitées par les enseignants (par exemple à des fins de mise en commun ou d'analyses des erreurs). Pour cela, il serait nécessaire de dispenser une formation aux enseignants en amont. Ils auraient ainsi peut-être moins privilégié une utilisation de l'application comme un outil d'entraînement au profit d'un outil utile à la construction des apprentissages. L'importance de la formation et de l'accompagnement des enseignants pour l'intégration des outils numériques dans leurs pratiques ordinaires est soulignée par de nombreux chercheurs comme essentielle pour que ces outils numériques contribuent efficacement aux apprentissages des élèves en classe (Tricot & Chesné, 2020 ; Grugeon-Allys & Grapin, 2020). Un des prolongements de cette recherche serait ainsi de prendre en compte et analyser les pratiques enseignantes d'intégration d'un outil numérique pour les apprentissages. D'autre part, l'impact de ces applications pourrait être analysé sur des populations spécifiques, en particulier des élèves en difficulté d'apprentissage. Par exemple, Kucian et ses collègues (2013) ont montré l'apport de *Calcularis* pour améliorer les performances en calcul des élèves présentant des troubles et difficultés d'apprentissage en mathématiques. Des analyses complémentaires sont actuellement en cours pour étudier l'impact de l'utilisation de chaque application sur les progrès des élèves les plus aisés en calcul d'une part, et les plus faibles d'autre part. Cela permettra d'identifier si une application serait à privilégier pour favoriser les apprentissages en calcul de ces élèves, et d'observer si les écarts entre ces deux populations se resserrent ou au contraire se creusent. Cette information est primordiale si l'on veut promouvoir l'utilisation d'applications numériques en classe.

REMERCIEMENTS

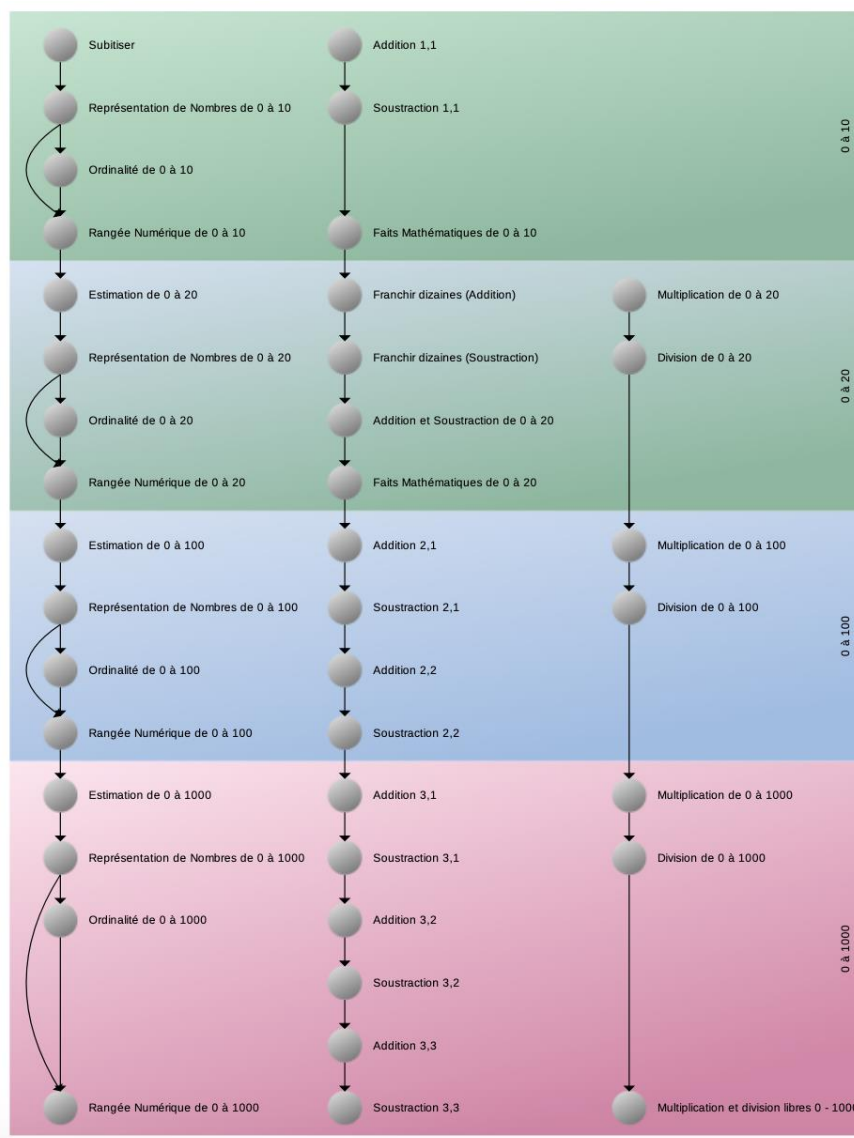
Nous remercions les directeurs et les directrices d'école, les enseignants et les enseignantes, les élèves des classes impliquées.

BIBLIOGRAPHIE

- Dellatolas, G., & Von Aster, M. (2006). *Zareki-R : batterie pour l'évaluation du traitement des nombres et du calcul chez l'enfant*. Paris : ECPA. Paris : ECPA.
- Grugeon-Allys, B. & Grapin, N. (2020). *Apport du numérique dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres, du calcul et de l'algèbre*. Paris : Cnesco.
- Käser, T., Baschera, G. M., Kohn, J., Kucian, K., Richtmann, V., Grond, U., ... von Aster, M. (2013). Design and evaluation of the computer-based training program *Calcularis* for enhancing numerical cognition. *Frontiers in Psychology*. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00489>
- Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., ... Nuerk, H. C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00516>
- Kohn, J., Rauscher, L., Kucian, K., Käser, T., Wyschkon, A., Esser, G., & von Aster, M. (2020). Efficacy of a Computer-Based Learning Program in Children With Developmental Dyscalculia. What Influences Individual Responsiveness? *Frontiers in Psychology*, 11, 1115. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01115>
- Kucian, K., Grond, U., Rotzer, S., Henzi, B., Schönmann, C., Plangger, F., ... von Aster, M. (2011). Mental number line training in children with developmental dyscalculia. *NeuroImage*. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.01.070>
- Rauscher, L., Kohn, J., Käser, T., Mayer, V., Kucian, K., McCaskey, U., Esser, G., & von Aster, M. (2016). Evaluation of a Computer-Based Training Program for Enhancing Arithmetic Skills and Spatial Number Representation in Primary School Children. *Frontiers in Psychology*, 7. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00913>
- Tricot, A. & Chesné, J.-F. (2020). *Numérique et apprentissages scolaires : rapport de synthèse*. Paris : Cnesco.
- Von Aster, M., Käser, T., Kohn, J., Kucian, K., Rauscher, L., & Vögeli, C. (2016). *Calcularis – Eine adaptive Lernsoftware zur Matheförderung*. In: M. Hasselhorn, W. Schneider, (Eds.) *Förderprogramme für Vor- und Grundschule, Tests und Trends – Jahrbuch der pädagogisch-psychologischen Diagnostik*. Göttingen: Hogrefe Verlag, (pp. 225–248). Hogrefe Verlag. <https://www.zora.uzh.ch/id/eprint/125586/>
- Woodcock, R., McGrew, K. S., & Mather, N. (2001). *Woodcock-Johnson tests of achievement*. Itasca, IL.

ANNEXE 1 – ORDRE DES TÂCHES DANS *CALCULARIS*

L'ordre des tâches proposées par *Calcularis* s'appuie sur le genre de tâches (proposé en colonne), le domaine numérique (proposé en ligne) et des valeurs de variables didactiques (par exemple franchissement de dizaine ou non pour l'addition).
















Par exemple, voici l'ordre des tâches proposées pour le champ additif :

Addition 1,1	Additionner deux nombres à un chiffre (sans passage de dizaine)
Soustraction 1,1	Soustraire un nombre à deux chiffres d'un nombre à un chiffre (sans passage de dizaine)
Faits mathématiques 0-10	Addition rapide de nombres à un chiffre avec un résultat à un chiffre
Passage dizaines addition	Additionner un nombre à un chiffre avec un nombre à un chiffre (au passage de dizaine)
Passage dizaines soustrac.	Soustraire un nombre à un chiffre d'un nombre à deux chiffres (au passage de dizaines)
Compter de 0-20	Additionner et soustraire des nombres dans la tranche de 0-20
Faits mathématiques 0-20	Addition rapide de nombres à un chiffre avec un résultat à deux chiffres
Addition 2,1	Additionner un nombre à deux chiffres avec un nombre à un chiffre
Soustraction 2,1	Soustraire un nombre à un chiffre d'un nombre à deux chiffres
Addition 2,2	Additionner un nombre à deux chiffres avec un nombre à deux chiffres
Soustraction 2,2	Soustraire un nombre à deux chiffres d'un nombre à deux chiffres
Addition 3,1	Additionner un nombre à trois chiffres et un nombre à un chiffre
Soustraction 3,1	Soustraire un nombre à un chiffre d'un nombre à trois chiffres
Addition 3,2	Additionner un nombre à trois chiffres et un nombre à deux chiffres.
Soustraction 3,2	Soustraire un nombre à deux chiffres d'un nombre à trois chiffres
Addition 3,3	Additionner un nombre à trois chiffres et un nombre à trois chiffres
Soustraction 3,3	Soustraire un nombre à trois chiffres d'un nombre à trois chiffres

ANNEXE 2 – ORDRE DES TÂCHES DANS *MATHEROS*

L'ordre des tâches proposées par *Matheros* (par défaut) s'appuie sur le genre de tâches (proposé en ligne), le domaine numérique et des valeurs de variables didactiques (par exemple franchissement de dizaine ou non pour l'addition). Chaque ceinture peut être modifiée par l'enseignant pour créer sa propre progression pour la classe ou pour différencier pour quelques élèves.

	CEINTURE N°1	CEINTURE N°2	CEINTURE N°3	CEINTURE N°4	CEINTURE N°5	CEINTURE N°6	CEINTURE N°7	CEINTURE N°8
COULEUR ASSOCIÉE								
ADDITION	Addition - Nombres de 1 à 5	Addition - Nombres de 1 à 10	Addition d'un chiffre à un nombre de deux chiffres	Addition de dizaines	Addition de centaines	Addition - Unité, dizaine, centaine	Addition de deux nombres	
SOUSTRACTION	Soustraction - Nombres de 1 à 5	Soustraction - Nombres de 1 à 10	Soustraction d'un chiffre à un nombre de deux chiffres	Soustraction de dizaines	Soustraction de centaines		Soustraction - Unité, dizaine, centaine	Soustraction de deux nombres
DOUBLE MOITIÉ		Doubles / Moitiés de 1 à 10		Doubles / Moitiés de 1 à 20		Doubles / Moitiés de 1 à 100		
MULTIPLICATIONS			Tables de 2 et de 5	Table de 10	Table de 3	Table de 4	Table de 6	Table de 7
COMPLÉMENTS			Complément à 10		Complément à la dizaine supérieur		Complément à 100	
MULTIPLES						Multiples 2, 5, 10		
X10, X100, ...								Multiplication par 10, 100 et 1000
DIVISION								Division par 10, 100 et 1000

	CEINTURE N°9	CEINTURE N°10	CEINTURE N°11	CEINTURE N°12	CEINTURE N°13
COULEUR ASSOCIÉE					
ADDITION	Addition et soustraction - Unité, dizaine, centaine		Addition d'un entier avec un décimal	Addition de deux décimaux	
SOUSTRACTION				Soustraction d'un nombre décimal à un entier	Soustraction de deux nombres décimaux
DOUBLE MOITIÉ			Quart, tiers, quadruple, triple		
MULTIPLICATIONS	Table de 8	Table de 9	Multiplication par 11	Multiplication par 12	Multiplication par 25
COMPLÉMENTS		Complément à 1000			Complément décimal vers entier supérieur
MULTIPLES		Multiples 25, 50			
X10, X100, ...	Multiplication par 20, 30, 200, ...			x10, 100, 1000 avec nombres décimaux	
DIVISION		Tables de division (2 à 10)	Division avec reste		Division par 10, 100, 1000 d'un nombre décimal

ANNEXE 3 – TESTS

3a. Fluence

Nom - Prénom : Classe :

FLUENCE

$1 + 7 =$	$5 - 2 =$	$8 + 1 =$	$5 - 0 =$	$2 + 7 =$	$1 + 5 =$	$1 - 1 =$	$1 + 4 =$	$2 - 2 =$	$3 - 1 =$
$4 - 3 =$	$1 + 1 =$	$6 - 3 =$	$3 + 0 =$	$3 - 2 =$	$4 - 4 =$	$1 + 2 =$	$6 - 1 =$	$0 + 0 =$	$4 + 2 =$
$3 - 3 =$	$6 + 1 =$	$5 + 3 =$	$3 - 0 =$	$4 - 2 =$	$4 + 3 =$	$2 - 1 =$	$2 + 2 =$	$4 - 1 =$	$0 + 5 =$
$9 - 3 =$	$7 + 7 =$	$10 - 6 =$	$3 + 9 =$	$6 + 2 =$	$7 - 4 =$	$5 + 5 =$	$8 - 3 =$	$0 + 8 =$	$5 - 1 =$
$8 + 6 =$	$9 - 4 =$	$8 + 2 =$	$7 - 2 =$	$10 - 2 =$	$4 + 4 =$	$5 - 3 =$	$4 + 8 =$	$8 - 1 =$	$6 + 6 =$
$1 + 3 =$	$10 - 10 =$	$5 - 4 =$	$5 + 7 =$	$6 - 2 =$	$8 - 6 =$	$9 + 1 =$	$6 - 6 =$	$3 + 3 =$	$5 + 2 =$
$7 + 3 =$	$1 \times 3 =$	$2 \times 2 =$	$10 - 5 =$	$8 - 8 =$	$4 \times 1 =$	$7 + 8 =$	$1 \times 5 =$	$0 \times 5 =$	$6 - 5 =$
$3 \times 0 =$	$6 + 4 =$	$9 - 2 =$	$2 \times 1 =$	$3 \times 2 =$	$5 + 9 =$	$0 \times 4 =$	$9 - 9 =$	$6 + 3 =$	$1 \times 1 =$

$9 + 7 =$	$6 \times 0 =$	$10 - 0 =$	$4 \times 3 =$	$1 \times 7 =$	$9 - 5 =$	$2 \times 4 =$	$5 + 6 =$	$3 \times 5 =$	$8 - 7 =$
$5 \times 2 =$	$9 - 6 =$	$1 \times 8 =$	$2 + 3 =$	$7 - 7 =$	$9 \times 1 =$	$5 + 4 =$	$3 \times 3 =$	$10 - 7 =$	$6 \times 2 =$
$7 \times 4 =$	$5 + 8 =$	$10 - 1 =$	$9 \times 3 =$	$8 - 2 =$	$6 + 9 =$	$4 \times 4 =$	$10 - 3 =$	$5 \times 8 =$	$1 \times 6 =$
$7 + 6 =$	$9 \times 2 =$	$7 \times 5 =$	$8 - 4 =$	$9 \times 5 =$	$8 \times 9 =$	$7 - 0 =$	$6 \times 4 =$	$9 + 2 =$	$10 - 8 =$
$6 \times 7 =$	$10 - 4 =$	$9 \times 9 =$	$7 - 1 =$	$5 \times 6 =$	$9 - 7 =$	$8 \times 2 =$	$5 - 5 =$	$6 \times 8 =$	$4 + 9 =$
$10 - 9 =$	$8 \times 4 =$	$4 - 0 =$	$6 \times 9 =$	$8 + 8 =$	$7 - 6 =$	$3 \times 8 =$	$9 \times 4 =$	$8 + 3 =$	$7 \times 7 =$
$7 - 3 =$	$8 \times 0 =$	$3 \times 6 =$	$9 + 9 =$	$8 \times 7 =$	$4 \times 5 =$	$9 - 8 =$	$8 - 5 =$	$6 \times 6 =$	$0 + 4 =$
$9 \times 7 =$	$4 + 7 =$	$5 \times 5 =$	$7 \times 3 =$	$6 - 4 =$	$7 - 5 =$	$8 + 9 =$	$7 \times 2 =$	$9 - 1 =$	$8 \times 8 =$

3b. Calculs

CALCULS (6P)

Effectue ces calculs.

Si tu ne sais pas, ce n'est pas grave, mets un ? dans la case.

$40 + 4 =$	$80 + 20 =$	$8 + 19 =$
$63 + 26 =$	$47 + 33 =$	$300 + 17 + 10 =$
$438 + 201 =$	$555 + 7 =$	$87 + 9 =$
la moitié de 120	le double de 55	$254 + 2005 + 17 =$
$1060 - 69 =$	$195 - 97 =$	la moitié de 70
le double de 225	$140 - 52 =$	$246 + \underline{\hspace{1cm}} = 1000$
$86 - 27 =$	$440 + \underline{\hspace{1cm}} = 1000$	$5 \times 200 =$
$10 \times 105 =$	$5 \times 110 =$	$4 \times 16 =$

CALCULS (5P)

Effectue les calculs.

Si tu ne sais pas, ce n'est pas grave, mets un ? dans la case.

$40 + 4 =$	$80 + 20 =$	$8 + 19 =$
$122 + 45 =$	$47 + 33 =$	$100 + 200 + 30 =$
$438 + 201 =$	$13 + 12 + 17 =$	$87 + 9 =$
$74 + 16 =$	$300 + 17 + 10$	$120 + 120 + 12 =$
la moitié de 40	le double de 25	la moitié de 100
le double de 55	$140 - 52 =$	$46 + \underline{\hspace{1cm}} = 100$
$86 - 25 =$	$440 + \underline{\hspace{1cm}} = 1000$	$5 \times 2 =$
$10 \times 10 =$	$2 \times 5 =$	$4 \times 3 =$

ANNEXE 4 – TABLEAUX DES RÉSULTATS DE L'ANALYSE DES CONTENUS DE CHAQUE APPLICATION

Analyse comparative
Tâches proposées par les applications en regard de la progression des apprentissages du PER

MSN 22 – Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres rationnels...	MSN 12 – Poser et résoudre des problèmes pour construire et structurer des représentations des nombres naturels...
Matheros Calcularts	Matheros Calcularts
MSN 22 – 25	MSN 12 – 15
NOMBRES	
Progression des apprentissages	
<p>Domaine numérique de travail : nombres naturels de 0 à 10'000</p> <p>7e – 8e années</p> <p>Dénombrement et extension du domaine numérique</p> <ul style="list-style-type: none"> Dénombrement d'une collection d'objets par X Estimation du nombre d'objets d'une collection X Constitution d'une collection ayant un nombre Comptage et décompte de 1 en 1, de 10 en 10, Exploration de l'infiniment grand <p>Comparaison et représentation de nombres</p> <ul style="list-style-type: none"> Comparaison, classement, encadrement et Représentation et lecture de nombres sur une Production d'un nombre plus petit ou plus grand Extraction du nombre entier de dizaines, <p>Ecriture des nombres</p> <ul style="list-style-type: none"> Passage du mot-nombre (oral ou écrit) à sa Passage du mot-nombre (oral ou écrit) à son <p>Exploration de différentes écritures de nombres</p>	<p>Domaine numérique de travail : nombres naturels de 0 à 200</p> <p>3e – 4e années</p> <p>Découverte, construction et utilisation du nombre</p> <ul style="list-style-type: none"> Expérimentation des premiers nombres, Dénombrement d'une petite collection d'objets, Constitution d'une collection ayant un nombre Estimation du nombre d'objets d'une collection X Comparaison de deux collections ou constitution Augmentation et diminution du nombre d'objets Mémorisation de la suite numérique (nombres <p>Utilisation des nombres (nombres familiaux)</p>
Matheros Calcularts	Matheros Calcularts
Matheros Calcularts	Matheros Calcularts

Analyse comparative Tâches proposées par les applications en regard de la progression des apprentissages du PER

MSN 23 – Résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs...	Matheros	Calculars	Matheros	Calculars	MSN 13 – Résoudre des problèmes additifs...	Matheros	Calculars	
Progression des apprentissages			Progression des apprentissages			Progression des apprentissages		
Domaine numérique de travail : nombres naturels de 0 à 10'000			Domaine numérique de travail : nombres naturels de 0 à 10			Domaine numérique de travail : nombres naturels de 0 à 20 en 3e et de 0 à 200 en 4e		
5e – 6e années			7e – 8e années			1re – 2e années		
Multiples, diviseurs, suites de nombres	X		Recherche des multiples et des diviseurs d'un nombre	X		Calculs		
Découverte de quelques critères de divisibilité : 2, 5, 10, 100			Utilisation de quelques critères de divisibilité : 2, 3, 5, 9, 10, 100			Utilisation du regroupage		
Reconnaissance et établissement de suites arithmétique			Reconnaissance, établissement de suites numériques et expression de leur loi de formation (progressions, multiples, puissances,...)			Utilisation du surcomptage		
Calculs			Calculs			Calculs		
Utilisation d'outils de calculs appropriés : calcul réfléchi, algorithmes, répertoire mémorisé, calculatrice	X		Utilisation d'outils de calculs appropriés : calcul réfléchi, algorithmes, répertoire mémorisé, calculatrice	X		Utilisation d'outils de calcul appropriés : calcul réfléchi avec possibilité d'utiliser un support (bande numérique, tableau des nombres,...), répertoire mémorisé, calculatrice	X	X
Utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité) et décomposition des nombres (additive, soustractive, multiplicativo) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace ainsi que pour donner des estimations	X		Utilisation des propriétés de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité), et décomposition des nombres (additive, soustractive, multiplicativo) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace ainsi que pour donner des estimations	X		Utilisation des propriétés du système de numération et de l'addition (commutativité, associativité, élément neutre) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace	X	X
Utilisation des algorithmes pour effectuer des calculs de façon efficace (addition, soustraction, multiplication)			Utilisation des algorithmes pour effectuer des calculs de façon efficace avec des nombres écrits sous forme décimale inférieurs à 10'000 : ...addition et soustraction dont les termes ont au plus 2 décimales ...multiplication dont les facteurs et le produit ont au plus 2 décimales ...division euclidienne dont le dividende est inférieur à 10'000 et le diviseur est inférieur à ...division dont le dividende (< 10'000) et le diviseur (< 100) ont au plus une décimale et le quotient au plus deux décimales			Mémorisation du répertoire additif de 0 + 0 à 9 + 9 Mémorisation du répertoire soustractif de 0 - 0 à 9 x 9	X	X
Mémorisation du répertoire soustractif de 0 - 0 à 19 - 9	X		Mémorisation du répertoire multiplicatif de 0 x 0 à 12 x 12	X		Mémorisation du répertoire soustractif de 0 - 0 à 9 - 0 Mémorisation du répertoire multiplicatif de 0 x 0 à 9 x 9	X	X

RMÉ POUR CELLES EST CEUX QUI
S'INTÉRESSENT À L'ENSEIGNEMENT DES
MATHÉMATIQUES !

Vous êtes invité à proposer des contributions en rapport avec l'enseignement des mathématiques ou des sciences (articles, narrations, expériences, comptes rendus, réflexions).

Les articles doivent parvenir en version électronique à la rédaction (voir www.revue-mathematiques.ch, consignes aux auteurs). Chaque article est examiné par le rédacteur responsable et envoyé anonymisé à deux relecteurs pour avis.

Les auteurs sont informés des décisions de la rédaction à propos de leurs contributions, qui peut les accepter avec ou sans demande(s) de modifications ou les refuser.

Tous les numéros sont consultables en ligne à partir du n° 1 depuis la rubrique *Consultation*.

Contact : revue.mathematiques@gmail.com

Site internet : www.revue-mathematiques.ch

Fondateur

Samuel Roller

Comité éditorial

Valérie Batteau

Cédric Béguin

Charlotte Bertin

Sylvia Coutat

Stéphanie Dénervaud

Thierry Dias

Julie Jovignot

Céline Vendeira Maréchal

Laura Weiss

Comité de rédaction

Luc Olivier Bünzli (HEP Vaud)

Maud Chanudet (Université de Genève)

Stéphane Clivaz (HEP Vaud)

Alain Collioud (HEP BEJUNE)

Sylvie Coppé (Université de Genève)

Audrey Daina (HEP Vaud)

Mickael Da Ronch (HEP Valais)

Christine Del Notaro (Université de Genève)

Michel Déruaz (HEP Vaud)

Marina De Simone (Université de Genève)

Jean-Luc Dorier (Université de Genève)

Stéphane Favier (Université de Genève)

Marie-Line Gardes (HEP Vaud)

Francesca Gregorio (HEP Vaud)

Claude Hauser (HEP BEJUNE)

Jana Lackova (Université de Genève)

Ismail Mili (HEP Valais)

Sarah Presutti (HEP Vaud)

Maquette

Sylvia Coutat