ETUDE EXPLORATOIRE DE PROCEDURES D'ELEVES DE 7-8 ANS EN CALCUL MENTAL ADDITIF

Nadine Grapin[1], Françoise Chenevotot-Quentin[2], Laurence Ledan[3], David Beylot[1], Eric Mounier[1], Aline Blanchouin[4]

[1]UPEC, EA 4434, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), ULille UCP UPEC CYPU URN,[2]Univ. Lille, EA 4434, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), ULille UCP UPEC CYPU URN, [3]Université de Toulouse,[4]Centre de Recherches sur l'Education, les Apprentissages et la Didactique, Université de Bretagne Occidentale.

Mots clé : calcul mental, numération orale, numération écrite chiffrée, procédures.

Résumé : Notre recherche explore les procédures d'élèves de 7-8 ans pour déterminer mentalement la somme de deux entiers. Nous nous appuyons sur des éléments théoriques sur le calcul mental et les numérations écrite et orale pour déterminer les connaissances qui peuvent être mobilisées dans de telles procédures ; nous illustrons enfin avec quelques exemples la complexité à les inférer à partir des réponses, des gestes et du discours des élèves.

Alors que Gérard Vergnaud soulignait dès 2007 dans la préface de l'ouvrage de Butlen (2007) que « les recherches sur le calcul mental sont rares ; pourtant les programmes de l'enseignement élémentaire ne manquent guère, au cours des cent dernières années, d'insister sur l'importance du calcul », nous constatons que ce double constat reste d'actualité quinze ans plus tard, particulièrement au début de l'apprentissage des nombres et du calcul (3H-4H, élèves âgés de 6 à 8 ans[1]). En France, différentes évaluations à grande échelle (Chesné & Fisher, 2015 ; Ninnin & Pastor, 2020) révèlent par ailleurs des difficultés persistantes en calcul mental chez les élèves français en fin d'école élémentaire (élèves âgés de 11 ans). Enfin, plusieurs chercheurs (Butlen & Pézard, 2003 ; Butlen, 2007 ; Chesné, 2014) ont montré les bénéfices d'une pratique régulière en calcul mental sur la résolution de problèmes numériques de difficulté moyenne. L'enjeu d'une recherche sur le calcul mental en termes d'apprentissage est donc particulièrement important.

Notre recherche vise à explorer la façon dont les élèves de 7–8 ans (fin 3H – début 4H) procèdent pour déterminer mentalement des sommes. Après avoir rappelé quelques éléments théoriques sur le calcul mental et sur les numérations écrite et orale, nous présentons notre problématique. Nous étudions ensuite les procédures pour trouver la somme de deux entiers et montrons comment les connaissances sur les numérations peuvent être mobilisées. Nous illustrons enfin avec quelques exemples la complexité à inférer des procédures à partir de l'analyse de réponses d'élèves, de leurs gestes et de leur discours.

CALCUL MENTAL & NUMÉRATIONS ORALE ET ÉCRITE CHIFFRÉE

Le calcul mental

Le calcul mental est défini comme « une modalité de calcul sans recours à l'écrit si ce n'est, éventuellement, pour l'énoncé proposé par l'enseignant et la réponse fournie par l'élève » (MEN, 2016) dont la pratique doit être quotidienne à l'école élémentaire. Chesné (2014, p.192) élargit cette définition et considère le calcul mental comme étant « l'ensemble des activités qui consistent à effectuer des opérations avec des

[1] Grade 1 : 3H en Suisse romande, Cours Préparatoire (CP) en France – Grade 2 : 4H en Suisse romande, Cours Elémentaire 1ere Année (CE1) en France.

nombres, essentiellement sans aide matérielle externe ». En référence à Butlen & Masselot (2010), cités par Bourdin (2021) dans sa synthèse sur le calcul mental (2021, p.93), nous distinguons également « ce qu'il faut mémoriser ou automatiser (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure…) et ce qu'il faut être capable de reconstruire (et qui relève du calcul réfléchi) ». Ainsi, utiliser la décomposition additive des termes d'une somme pour la calculer relèverait du calcul réfléchi.

Nous retenons enfin que, dans une tâche de calcul mental, et dans l'activité qu'elle engendre, les nombres peuvent être convoqués par leur nom ou par leur écriture chiffrée dans l'énoncé du calcul ou du résultat demandé ; en revanche, par opposition au calcul en ligne, le calcul mental n'autorise pas d'écritures intermédiaires. Quelles sont alors les connaissances relatives aux numérations qui pourraient intervenir lors d'un calcul mental ?

Les numérations orale et écrite chiffrée

Mounier (2012) met en exergue l'aspect ordinal de la numération orale et montre que la comptine numérique utilisée en France peut être structurée à l'aide de repérants (vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts). Pour atteindre un repérant à partir du précédent, il faut utiliser soit la petite comptine (PC) de un à neuf, soit la grande comptine (GC) de un à dix-neuf (Fig. 1).

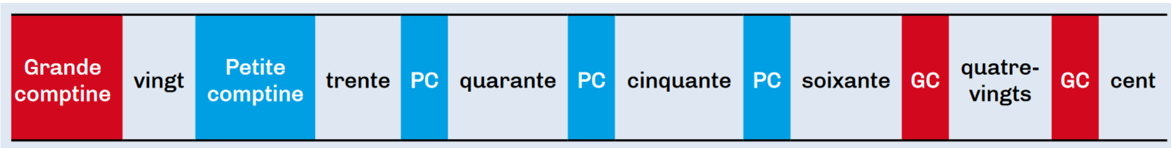


Fig. 1 : Structure de la numération orale (MEN, 2021, p.21)

Comprendre la façon dont la numération orale est structurée peut ainsi permettre de traiter certains calculs mentalement en mobilisant des principes arithmétiques additifs (trente-sept étant égal à trente plus sept) et multiplicatifs (quatre-vingts étant égal à quatre fois vingt). Nous verrons plus loin que des connaissances relevant de la numération orale peuvent être mobilisées pour calculer mentalement, même lorsque l'énoncé est proposé sous forme écrite chiffrée (à condition de savoir passer de l'écritures chiffrée au nom du nombre).

La numération écrite chiffrée repose sur deux principes (Tempier, 2010) : un principe positionnel (la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture chiffrée du nombre) et un principe décimal (dix unités d'un rang donné sont égales à une unité du rang supérieur). En calcul mental, ces deux principes peuvent être mobilisés, par exemple pour ajouter ou retirer un nombre entier de dizaines et multiplier ou diviser par dix, cent, mille.

Soulignons enfin que les connaissances sur ces deux systèmes de numération peuvent se construire indépendamment. Par exemple, il est possible d'écrire en chiffres le nombre d'éléments d'une collection sans pour autant connaître le nom du nombre et, inversement, il est possible de dire le nom du nombre d'éléments sans être capable de l'écrire en chiffres (Mounier, Grapin & Pfaff, 2020).

Problématisation

En arrivant au 3H (à 6 ans), les élèves ont rencontré le nom des nombres jusqu'à trente (sans que la numération orale n'ait fait l'objet d'un enseignement explicite) ainsi que l'écriture chiffrée de certains nombres (sans aborder les principes de la numération écrite chiffrée). Les programmes scolaires (MEN, 2020) et le guide à destination des enseignants (MEN, 2021) préconisent que les élèves de 3H apprennent la comptine numérique à partir de la petite et de la grande comptine ainsi que les principes de la numération écrite chiffrée. En outre, le guide précise que la compréhension des deux systèmes de numération « conditionne en particulier toutes les connaissances sur le calcul : les ressources de la numération orale pour le calcul mental, celles de la numération écrite chiffrée pour le calcul posé » (MEN, 2021, p.24).

Un autre enjeu de 3H consiste également à passer de procédures basées sur le comptage à des procédures de calcul. Si nous reprenons la distinction faite par Conne (1987), « les comptages s'apparentent aux dénombrements parce qu'ils utilisent comme support des systèmes symboliques figurant des quantités » et « les calculs traitent les opérations numériques reflétant les transformations et comparaisons des quantités » (p.1). Plus précisément, dans le cas de sommes, les élèves peuvent recourir au comptage ou sur-comptage un à un (sur les doigts), ce qui nécessite une connaissance spécifique, l'énumération[2] (Briand et al., 1999). Mais, pour calculer mentalement, les élèves peuvent aussi avoir automatisé les répertoires additifs ou mobiliser des décompositions additives. Cette distinction entre comptage et calcul se retrouve également chez Brissiaud (2003, p.146) et Charnay & Valentin (1991) qui, tous, insistent sur la nécessité de commencer par l'apprentissage des procédures de comptage avant d'aborder les procédures de calcul. Charnay souligne ainsi que les procédures de comptage sont « indispensables » pour de nombreux d'élèves au moins pour un temps ; Brissiaud argumente également que l'usage de collections témoins organisées dans le cadre du comptage favoriserait par la suite l'accès à des procédures de décompositions – recompositions lors du calcul. Ainsi, des procédures de comptage et de calcul risquent de cohabiter lorsque des élèves de ce niveau scolaire ont à déterminer la somme de deux nombres.

Etant donné que peu de résultats de recherche sur le calcul mental sont disponibles à ce stade de l'apprentissage, nous avons souhaité investiguer la façon dont les élèves procèdent pour déterminer une somme en étudiant la façon dont les connaissances relatives au comptage, à la numération orale et à la numération écrite peuvent être mobilisées.

Ces questions étant très générales, nous avons restreint notre champ numérique en choisissant de travailler sur des sommes de « petits nombres » (PN) et de « grands nombres ronds » (GNR). Nous considérons des PN comme étant inférieurs ou égaux à cinq (et par conséquent dont la somme est inférieure à dix) et des GNR comme étant des nombres égaux à un nombre entier de dizaines. Les GNR sont intéressants car les procédures pour déterminer la somme de deux GNR peuvent s'appuyer à la fois sur un comptage de dix en dix et sur du calcul à partir de résultats mémorisés (celles s'appuyant sur un comptage en unités risquant d'être inefficaces).

Nous allons ainsi nous intéresser, à travers l'étude des procédures, aux connaissances qui peuvent être mobilisées pour déterminer la somme d'une part de deux PN et d'autre part de deux GNR et à la façon dont nous pouvons inférer ces connaissances de l'observation des gestes de l'élève et de son discours. Dans la partie suivante, nous listons les procédures à la disposition des élèves de 7–8 ans (fin de 3H – début de 4H) et les connaissances sur lesquelles elles reposent. Enfin, nous exploitons cette analyse pour déterminer les procédures utilisées par des élèves : quels sont les indicateurs pertinents ? Une étude des réponses, des gestes et du discours de l'élève permet-elle de déterminer la (ou les) procédure(s) qu'il emploie ? Avec quelles certitudes ?

ETUDE DES PROCÉDURES

Nous décrivons *a priori* les procédures permettant de calculer la somme de deux PN et de deux GNR en distinguant quatre catégories de procédures déterminées selon les connaissances sur lesquelles elles s'appuient :

- celles qui reposent sur une perception globale des quantités (Brissiaud, 2003, p.109) ou la reconnaissance d'une configuration connue (P1) ;
- celles qui relèvent du comptage et qui s'appuient sur le nom des nombres (P2) ;
- celles qui s'inscrivent dans le calcul mental (P3) : calcul automatisé ou calcul réfléchi basé sur la décomposition additive de nombres ;

[2] Pour Briand et al. (1999, p.9), l'énumération est une connaissance qui est caractérisée par les tâches « d'inventaire » au cours desquelles il s'agit de « passer en revue tous les éléments d'une collection finie, une fois et une seule ».

- spécifiquement pour les GNR, celles qui s'appuient sur le nombre de dizaines (P4).

Nous avons choisi de présenter les procédures lorsque l'énoncé du calcul et le résultat sont sous forme orale et sans matériel ou support (l'élève ne dispose ni de bande numérique, ni de cube ou jeton, ni de dé…). Dans le cas d'une réponse attendue sous une forme écrite chiffrée, l'élève doit passer du nom du nombre à son écriture chiffrée. C'est pourquoi les procédures s'appuyant sur l'usage de collections d'objets ne seront décrites qu'à partir de collections de doigts. Nous les illustrons à l'aide d'exemples précisés au début de chaque paragraphe.

Procédure par reconnaissance immédiate (P1)

Dans le cas de PN, l'élève peut procéder par reconnaissance immédiate (Fig. 2) ; nous décrivons cette procédure à partir de deux exemples : *un*[3] plus *deux* et *quatre* plus *deux*.

P1 : Reconnaissance immédiate de la somme à partir de représentations mentales ou de configurations de doigts (sans comptage).

Exemples :

Pour *un plus deux*, l'élève visualise dans sa tête une première collection d'un objet et une deuxième collection de deux objets puis il reconnait globalement (Brissiaud, 2003, p.109) que cela forme une collection de trois objets. Il associe ensuite trois à *trois* (ou trois à *3*, puis à *trois*).

Pour *quatre plus deux*, l'élève représente sur une main *quatre* par connaissance des configurations de doigts à partir du nom du nombre puis sur l'autre main *deux* ; il reconnait six et dit *six*.

Connaissances en jeu :

- représentations mentales des petites quantités inférieures à 3 ;

- connaissance de différentes configurations de doigts pour les nombres de 1 à 10, c'est à dire association d'une quantité de doigts à un mot-nombre (sans passer par le comptage), par exemple associer quatre doigts à *quatre* à partir de la représentation ci-contre .

Fig. 2 : Reconnaissance immédiate (P1)

Précisons que « la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main » (MEN, 2021) est travaillée lors des niveaux scolaires précédents, certaines configurations de doigts étant plus fréquentes que d'autres (cinq et un *vs* quatre et deux).

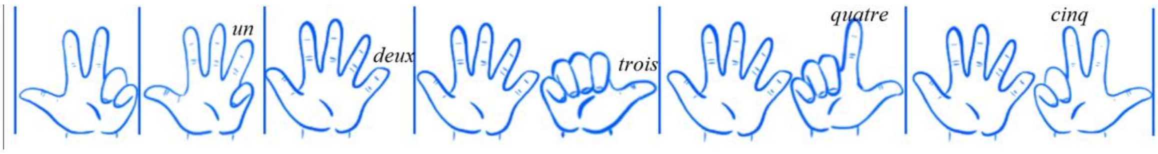
Procédures par comptage ou sur-comptage en appui sur le nom des nombres (P2)

Les procédures par comptage ou sur-comptage avec appui sur les doigts peuvent prendre différentes formes (Fig. 3) selon qu'il s'agisse de comptage un à un pour les PN ou de comptage de dix en dix pour les GNR (sans passer par les écritures chiffrées). Chaque doigt levé représente une unité dans le cas de PN et dix unités (ou une dizaine) dans le cas de GNR. Nous les illustrons avec les calculs respectifs de *trois* plus *cinq* (PN) et *trente* plus *vingt* (GNR).

[3] Les écritures en italique témoignent de la représentation du nombre choisie : *un plus deux* signifie que le calcul est donné oralement et *3* que le résultat est attendu sous forme d'écriture chiffrée. Les écritures droites réfèrent au nombre indépendamment de sa représentation.

<table>
<tr><td>P21 : Représentation sur les doigts d’une main d’un des termes de la somme par connaissance de configurations de doigts puis représentation sur les doigts de la même main, et si nécessaire de l’autre main, du second terme, par comptage en levant un doigt à chaque nouveau mot, puis…</td><td>… reconnaissance immédiate de la configuration

ou

… recomptage de l’ensemble des doigts</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemple PN : l’élève représente sur une main trois par connaissance des configurations de doigts puis il complète cette main en comptant un, deux et poursuit sur l’autre main trois, quatre, cinq. Il reconnaît ensuite huit et dit huit ou recompte de un en un l’ensemble des doigts levés et dit huit.


Exemple GNR : l’élève représente sur une main trente unités par trois doigts (pour trois dizaines) par connaissance des configurations de doigts puis il complète cette main en comptant dix, vingt. Il reconnaît ensuite cinquante et dit cinquante ou recompte de dix en dix l’ensemble des doigts levés jusqu’à cinquante.

</td></tr>
<tr><td>P22 : Représentation sur les doigts d’une main d’un des termes de la somme par comptage puis complétion de cette main et, si nécessaire, suite sur les doigts de l’autre main par comptage, puis…</td><td>…reconnaissance immédiate de la configuration

ou

…recomptage de l’ensemble des doigts</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemple PN : l’élève compte un, deux, trois en levant un doigt à chaque mot, puis il poursuit comme dans l’exemple de P21.

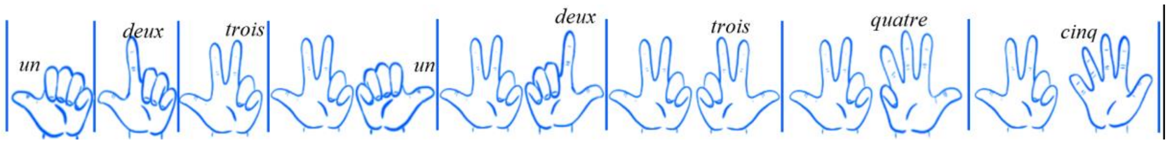

Exemple GNR : l’élève compte dix, vingt, trente en levant un doigt à chaque mot, puis il reprend avec l’autre terme de la somme, dix, vingt. Il poursuit comme dans l’exemple de P21.

</td></tr>
<tr><td>P23 : Représentation sur chacune des mains d’un des termes de la somme par comptage (nombre d’unités pour les PN ou nombre de dizaines pour les GNR) puis…</td><td>…reconnaissance immédiate de la configuration

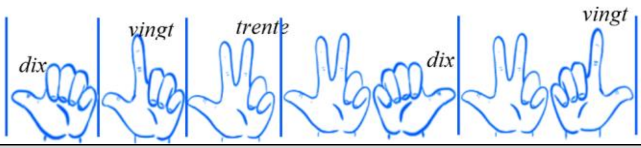
ou

…recomptage de l’ensemble des doigts</td></tr>
</table>

Exemple PN : l'élève compte *un*, *deux*, *trois* en levant un doigt à chaque mot, puis il compte *un, deux, trois, quatre, cinq* sur l'autre main et poursuit comme dans P21.



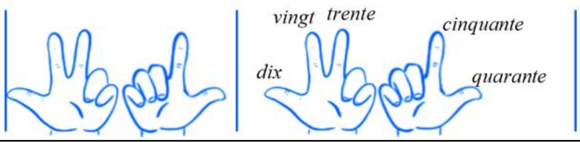
Exemple GNR : l'élève compte *dix*, *vingt*, *trente* en levant un doigt à chaque mot, puis il compte *dix*, *vingt* sur l'autre main et poursuit comme dans P21.



P24 : Représentation sur chacune des mains d'un des termes de la somme par connaissance de configurations de doigts puis recomptage de l'ensemble des doigts (nombre d'unités pour les PN ou nombre de dizaines pour les GNR)[4].

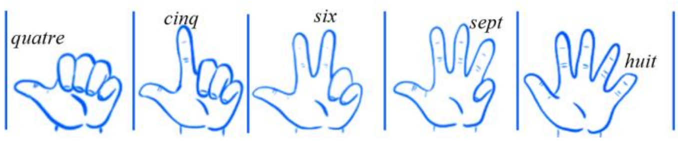
Exemple PN : l'élève lève spontanément trois doigts puis cinq doigts puis il compte un à un chacun des doigts et obtient *huit*.

Exemple GNR : l'élève lève spontanément trois doigts (pour *trente)* puis deux doigts (pour *vingt*) puis il compte de dix en dix l'ensemble des doigts levés jusqu'à *cinquante*.

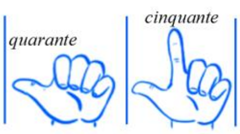


P25 : Sur-comptage à partir de l'un des deux termes de la somme (représentation sur les doigts d'un seul des deux termes de la somme).

Exemple PN : l'élève commence le sur-comptage à partir de *quatre* en levant successivement cinq doigts et dit *huit*.



Exemple GNR : l'élève commence le sur-comptage à partir de *quarante* avec la comptine de dix en dix en levant successivement deux doigts et obtient *cinquante*.



Connaissances en jeu pour les PN et les GN :

- connaissance de différentes configurations de doigts pour les nombres de 1 à 10 ;

[4] Si l'élève donne l'écriture chiffrée ou le nom de la somme (désignation orale) par connaissance de configurations de doigts, on se ramène à une procédure de type P1.

Connaissances en jeu pour les PN : - récitation de la petite comptine en levant simultanément un doigt à chaque mot énoncé ; **Connaissances en jeu pour les GNR :** - récitation de la comptine de dix en dix en levant simultanément un doigt à chaque mot énoncé ; - correspondance entre le repérant (par exemple *trente*) et le nombre de dizaines (par exemple, *dix* plus *dix* plus *dix) ;* - association entre un doigt et une dizaine.

Fig. 3 : Procédures par comptage ou sur-comptage (P2)

Les procédures P2 s'appuient principalement sur la connaissance de la numération orale (comptine des unités pour les PN et comptine de dix en dix pour les GNR). Précisons que, pour ces procédures, un élève n'a pas besoin de savoir qu'un doigt levé correspond à une dizaine ; par conséquent, à la différence des procédures P4 (Fig. 5), aucune connaissance relative à la numération écrite chiffrée n'est en jeu.

Procédures par calcul (P3)

Étudions désormais les procédures par calcul (Fig. 4) à partir de *cinq* plus *trois* (PN) et *trente* plus *vingt* (GNR).

P31 : Connaissance automatisée de la somme des nombres en commutant ou non les termes.
Exemple : l'élève sait que *cinq* plus *trois* ou *trois* plus *cinq* est égal à *huit 8* (PN) ; il sait que *trente* plus *vingt* ou que *vingt* plus *trente* est égal à *cinquante* (GNR).
P32 : Calcul réfléchi à partir de la décomposition additive d'un terme ou des deux.
Exemple : l'élève sait que *cinq* plus *trois* est égal à *cinq* plus *un* plus *deux*, puis il sait que *cinq* plus *un* est égal à *six* tandis que *six* plus *deux* est égal à *huit.*
Connaissances en jeu : Pour P31 : - les tables d'addition ; - les doubles dans le cas de la somme de deux nombres identiques ou ayant un écart de un. Pour P32 : - les décompositions additives des nombres. Pour P31 et P32 : commutativité de l'addition (éventuellement)

Fig. 4 : Procédures par calcul (P3)

Procédures par connaissance de la numération écrite chiffrée (P4)

Pour déterminer la somme de deux GNR, s'appuyer sur la numération écrite chiffrée est également possible. Nous l'illustrons avec *trente plus vingt* (Fig. 5).

P41 : Passer d'un GNR au PN correspondant au nombre de dizaines, ajouter des PN puis…	… passage du PN qui représente des dizaines au GNR par récitation de la comptine de dix en dix (en appui éventuel sur les doigts) et production de l'écriture chiffrée. **ou** … utilisation de la signification des chiffres dans l'écriture chiffrée.

Exemple : l'élève traduit *trente* en nombre de dizaines, c'est-à-dire en 3 dizaines et *vingt* en 2 dizaines, *trente plus vingt* est donc égal à 3 dizaines plus 2 dizaines, soit 5 dizaines ; soit il récite la comptine de dix en dix et dit *cinquante*, soit il écrit 50 (pour 5 dizaines) et dit *cinquante*.
P42 : Simulation mentale de l'algorithme écrit de l'addition posée et « pose dans la tête » de l'opération en colonnes en alignant les unités avec les unités et les dizaines avec les dizaines, puis en calculant la somme colonne par colonne[5].
Exemple : l'élève commence par traiter les unités 0+0 = 0 puis les dizaines 3+2=5, il écrit 50 et dit *cinquante*.
Connaissances en jeu : Pour P41 : - passage du nom du nombre à son écriture chiffrée et inversement (pour déterminer le nombre de dizaines à partir de son nom ou lire le nombre à partir de son écriture chiffrée) ; - somme de deux PN (3+2 dans l'exemple choisi) ; - numération écrite chiffrée (aspect positionnel) ; Pour P42 : - algorithme de l'addition posée.

Fig. 5 : Procédures par connaissance de la numération écrite chiffrée (P4)

Si nous avons présenté séparément chaque procédure, des procédures hybrides peuvent aussi apparaitre. Par exemple, pour calculer *trente plus vingt,* l'élève pourrait commencer par sur-compter de dix à partir de *trente* et dire *quarante* (P2 et comptine de dix en dix). Puis il pourrait poursuivre en sur-comptant de un et dire *quarante-et-un*, *quarante-deux* jusqu'à *cinquante* (P2 et comptine des unités).

Une telle finesse dans la description des procédures permet de les lier aux connaissances qui leur sont associées et, par conséquent, de pouvoir suivre leur évolution durant le processus d'apprentissage. Nous avons également montré la diversité des procédures à disposition des élèves pour calculer mentalement des sommes de PN ou de GNR mais aussi la façon dont les connaissances sur le comptage et les numérations peuvent être conjointement mobilisées. Cette description, présentée ici de façon synthétique, vient ainsi compléter celle de Brissiaud (2003). Etudions désormais comment nous exploitons cette analyse *a priori* pour déterminer la ou les procédures qu'un élève a employé pour calculer une somme.

MÉTHODOLOGIE

Notre expérimentation a été menée en début de 4H (octobre 2020) ; douze élèves ont passé trois séries de calculs mentaux individuellement avec un chercheur (Fig. 6).

Séries	PN	GNR
1	5+3 ; 3+2	30+20
2	5+2 ; 2+3	30+10
3	2+5 ; 3+5	20+30 ; 10+30

Fig. 6 : Sommes proposées

[5] D'après notre définition, P42 relève du calcul mental car l'élève n'écrit pas de calcul intermédiaire.

Le protocole expérimental s'est déroulé selon deux phases :

- 1ère phase : le chercheur a lu deux fois le calcul en invitant l'élève à écrire sa réponse sur une feuille ;
- 2ème phase : le chercheur a présenté le calcul en écriture chiffrée et a ensuite questionné l'élève sur la façon dont il a procédé pour donner le résultat.

Les réponses écrites des élèves ont été collectées et toutes les passations ont été filmées avec une caméra fixe dirigée sur le chercheur et l'élève ; les échanges entre le chercheur et l'élève ont été retranscrits et les gestes de l'élève (mouvement des doigts pouvant correspondre à un comptage sur les doigts notamment) ont été analysés.

Nos premières analyses ont pris en compte la réponse de l'élève et ses gestes lors de la phase 1 mais aussi son discours et ses gestes lors des échanges avec le chercheur durant la phase 2 ; des analyses complémentaires se sont appuyées sur d'autres observables tels que les relances du chercheur et la durée de traitement par l'élève.

PROCÉDURES ET CONNAISSANCES DES ÉLÈVES

Nous montrons dans cette partie la façon dont nous exploitons les éléments de l'analyse *a priori* pour déterminer les procédures de certains élèves sans revenir de façon exhaustive sur chacune d'elles. Dans certains cas, la cohérence au cours des phases 1 et 2 entre la réponse de l'élève, son discours, ses gestes, la durée de traitement pour déterminer la somme, nous permet de déterminer la procédure utilisée par l'élève et les connaissances associées. Mais, dans d'autres cas, l'analyse se révèle être plus complexe et les hypothèses quant aux procédures utilisées restent multiples.

Observables concordants pour repérer une procédure

Nous commençons par illustrer comment nos analyses permettent de repérer les procédures de certains élèves et les connaissances associées lorsque les observables choisis (discours, gestes, etc.) sont concordants.

Les procédures par comptage ou sur-comptage (P2) sont faciles à identifier lorsque l'élève utilise un support observable tel que ses doigts. Ainsi, lors de la phase1, il a été aisé de repérer la procédure de sur-comptage (P25) utilisée par M* pour le calcul *cinq plus deux* : il lève le pouce de la main gauche et chuchote *six* puis lève l'index de la main gauche et chuchote *sept* puis écrit *7*.

Un élève qui déclare connaitre le résultat par cœur ou qui semble s'appuyer sur du calcul réfléchi (procédure P3) ne peut être repéré que grâce à son discours (à condition qu'il corresponde au calcul qu'il a réellement effectué) lors de la phase 2. Par exemple, pour répondre à *deux plus cinq*, R* répète la somme et écrit immédiatement la réponse en phase 1. La rapidité de la réponse nous permet d'envisager une procédure par calcul (P3), peut-être automatisé (P31), ou une procédure par reconnaissance immédiate (P1).

En phase 2, R* explicite sa procédure :

> R* : Je savais déjà. Avant je savais que *cinq plus trois* est égal à *huit* et un jour je me suis dit et si on faisait moins *un* et plus *un*. Peut-être plein de truc par cœur et j'ai commencé à faire plein plein plein de calculs et ça fait pareil et après j'ai réussi à connaitre par cœur.

Même s'il reste complexe de déterminer de façon sûre la façon dont R* a procédé pour donner la somme, son discours lors de la phase 2 témoigne de connaissances relatives à la commutativité de l'addition (il calcule cinq plus deux), l'utilisation d'un résultat mémorisé (cinq plus trois est égal à huit) et du calcul réfléchi (cinq plus deux c'est un de moins que cinq plus trois).

Enfin, pour les GNR, il semble possible de repérer dans le discours de l'élève s'il raisonne sur des nombres d'unités ou des nombres de dizaines et déterminer par conséquent s'il utilise une procédure P4 basée sur l'écriture chiffrée des nombres. Par exemple, *trente plus dix* peut être vu comme *trente* unités plus *dix* unités ou comme *trois* dizaines plus *une* dizaine.

Pour ce calcul, B* explique : « En fait j'ai fait *trois* et après j'en ai rajouté *un* ça fait *quatre* et plus les *zéros* unités donc ça fait *quarante* » tandis que T* dit : « *Trente*, si tu rajoutes *dix*, on sait que ça fait *quatre*, alors tu rajoutes *zéro* ben ça fait *quarante* ».

B* et T* se ramènent à un calcul en nombre de dizaines même si ce nombre n'est pas toujours apparent dans leur discours. Contrairement à T*, B* utilise explicitement les nombres des dizaines (*trois* et *un)* mais il ne précise pas qu'ils réfèrent à des dizaines. En revanche, T* verbalise son explication avec *trente* et *dix* et c'est seulement lorsqu'il conclut que l'on comprend qu'il calculait en dizaines. Cette hypothèse est renforcée par la présence, dans le discours de chaque élève, du mot « zéro », ce qui renvoie à des connaissances liées à l'écriture chiffrée des nombres.

Observables discordants pour repérer une procédure

Nous poursuivons avec quelques exemples qui montrent toute la complexité à inférer des procédures à partir des données recueillies et des analyses effectuées.

Aucun élève ne verbalise explicitement le recours à des procédures de reconnaissance immédiate (P1). Étudions les gestes d'I* lorsqu'il doit donner la somme *cinq plus deux*. Lors de la phase 1, I* affiche d'un seul coup (environ une seconde) cinq doigts sur une main et deux doigts sur l'autre main (Fig. 7) et regarde le chercheur. I* écrit *7*.

Fig. 7 : Gestes de I* durant la phase 1

Est-ce qu'I* utilise la reconnaissance immédiate à partir des configurations de doigts (P1) ? Est-ce qu'il utilise une procédure de comptage ou de sur-comptage (P2) ? Plusieurs hypothèses sont possibles…

Lors de la phase 2, I* explique :

> I* : Parce que j'en ai *cinq* [montre ses cinq doigts de la main gauche] et j'en rajoute *deux* [montre l'index et le majeur de la main droite] ça va faire *sept* ou sinon si tu sais pas, bah tu comptes et ça fait *sept*.
>
> Chercheur : Et comment tu fais si tu sais pas ?
>
> I* : Ben en fait, moi, ben je le savais déjà que *cinq* plus *deux* ça faisait *sept*.

Lors de ces échanges, I* mentionne d'abord explicitement le fait de compter pour obtenir *sept*, ce qui laisserait penser à une procédure de sur-comptage à partir de *cinq* ou de comptage de l'ensemble des doigts levés pour obtenir *7* (P2). I* termine en évoquant un résultat automatisé (P31). Quelle procédure a-t-il utilisé ? A-t-il procédé par reconnaissance de la configuration de doigts ou le résultat 5 + 2 est-il automatisé ? Difficile de conclure ici puisque son discours sur sa façon de faire ne correspond pas à ses gestes. Cela pourrait être dû à un effet de contrat car, face aux relances du chercheur, l'élève semble finalement répondre en s'appuyant sur des connaissances relevant du calcul (résultats mémorisés) plutôt que sur la reconnaissance des configurations de doigts ; le calcul mental travaillé régulièrement en classe pourrait ainsi lui paraitre plus légitime. Cependant, à la différence de R* (dans la partie précédente) qui mentionnait explicitement des propriétés sur les nombres et les opérations, rien de tel n'apparaît dans le discours d'I*.

Avec des PN, il est donc difficile de déterminer si une somme est obtenue grâce à un calcul automatisé (P31), la visualisation mentale des quantités (P1) ou un sur-comptage rapide (P2). L'étude de sommes de nombres plus grands pourrait lever cette incertitude.

En l'absence de signes visibles, le repérage des procédures de comptage ou de sur-comptage (P2) est lui aussi difficile.

Par exemple, pour le calcul *vingt plus trente*, lors de la phase 2, S* explique :

> S* : J'ai mis *vingt* dans ma tête et après avec mes doigts j'ai fait *vingt-et-un* [il bouge le pouce], *vingt-deux* [il bouge l'index], *vingt-trois* [il bouge le majeur], jusqu'à *cinquante*.
>
> Chercheur : Je ne t'ai pas vu compter sur tes doigts.
>
> S* : Je l'ai fait dans la tête avec mes doigts.

S* verbalise-t-il la procédure qu'il a réellement utilisée ? S* a mis environ 24 secondes pour produire une réponse correcte, avec par moment de légers hochements de tête, et à d'autres moments des petits mouvements de la main droite (sa main gauche tient son crayon) ce qui pourrait renforcer l'hypothèse d'un recours à une procédure de sur-comptage (P25). Proposer des sommes avec des nombres de taille et de valeur différentes et étudier la corrélation entre le temps mis pour répondre et la taille des nombres pourrait venir conforter ou non cette hypothèse.

Le repérage des procédures s'appuyant sur le comptage ou sur-comptage de dix en dix nécessite d'être attentif aux gestes de l'élève en raison du recours fréquent aux doigts. Voici ce que nous observons pour L* lors de la phase 1 pour le calcul de *trente plus dix* : L* lève trois doigts sur la main gauche (pouce, index, majeur) et dit *trente*, il lève le pouce de la main droite et dit *trente plus dix, ça fait trois, et trente plus dix, ça fait quarante.*

En s'appuyant uniquement sur le discours, on pourrait penser que la procédure repose sur la connaissance d'un fait numérique (P31) ou de la numération écrite (P41) avec *trois* qui renvoie à trois dizaines. Or l'analyse des gestes (il lève d'abord trois doigts puis un doigt) montre qu'il s'appuierait plutôt sur la comptine de dix en dix pour effectuer du sur-comptage (P25).

Comment lever ce doute ? L'étude isolée d'une somme ne permet pas d'aller au-delà et il serait intéressant d'analyser les procédures de L* pour différentes sommes afin de rechercher si des procédures co-existent ou si certaines semblent prépondérantes.

Pour conclure cette partie, on pourrait croire que la procédure basée sur les connaissances sur la numération écrite (P4) traduirait une plus grande expertise de la part de l'élève que celles reposant sur la numération orale. Mais on peut se questionner sur la stratégie d'évitement des procédures de comptage qui pourrait être due à une comptine non suffisamment stabilisée chez certains élèves.

CONCLUSION : RÉSULTATS ET PERSPECTIVES

La description précise des procédures pour donner le résultat d'une somme avec des PN ou des GNR s'est révélée primordiale pour déterminer les connaissances des élèves.

Les observables que nous avons choisis (réponse produite, gestes et discours de l'élève, temps de réponse) ont permis, lorsqu'ils sont concordants, de retrouver chez les élèves observés certaines des procédures que nous avions déterminées a priori. En revanche, l'analyse se révèle être plus complexe lorsque l'interprétation des différentes données recueillies ne converge pas vers une même procédure.

Différentes raisons peuvent être avancées pour comprendre cela. D'abord, les élèves de 7-8 ans ne réussissent pas tous à formuler oralement leur procédure. Ensuite, face au chercheur qu'ils ne connaissent pas, ils peuvent souhaiter montrer qu'ils ont des connaissances (comme I* par exemple) et réaliser la tâche avec une procédure moins experte mais mieux maitrisée et pour autant expliquer qu'ils ont procédé différemment. Un décalage peut ainsi s'opérer entre la procédure effectivement utilisée par l'élève et celle qu'il décrit (ce décalage pouvant se retrouver également en classe lorsque l'élève décrit à l'enseignant et/ou à ses pairs une procédure qui lui a permis de trouver sa réponse). Le contrat didactique existant lors de la passation individuelle entre le chercheur et l'élève n'est pas de même nature que celui qui existe en classe et il est probable que les explications données par les élèves dans ce cadre ne soient pas de même nature que celles qui seraient avancées en classe. Face à un tel décalage, comme nous l'avons montré dans nos exemples, il peut néanmoins apparaître dans le discours de l'élève des éléments témoignant de connaissances avérées, en calcul par exemple.

Puisque, pour un même élève, l'analyse des observables lors de la résolution d'un calcul mental additif n'est pas toujours suffisante, nous cherchons actuellement à élargir l'étude de ses procédures à d'autres tâches de calcul mental (calculs soustractifs et compléments). Même s'il est difficile pour les enseignants de pouvoir s'appuyer au quotidien sur des faisceaux d'observables comme nous le faisons et de mener par conséquent de telles analyses, les sensibiliser à la pluralité des procédures existantes et aux connaissances qui leur sont associées devrait leur permettre de mener des mises en commun plus riches, de proposer des institutionnalisations adaptées mais aussi de penser précisément les évaluations des connaissances des élèves.

Bibliographie

Bourdin, C. (2021). *Le calcul mental au CP : un regard sur les pratiques enseignantes dans l'académie de Guadeloupe.* [Thèse de doctorat]. Université CY Cergy. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03353926

Briand, J., Lacave-Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D. & Goua-de-Baix, V. (1999). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N*, *66*, 7-22.

Brissiaud, R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer.* Retz.

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Presses universitaires de Franche-Comté.

Butlen, D. & Pézard, M. (2003). Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège. *Spirale, Revue de Recherches en Éducation*, *31*, 117–140.

Charnay, R. & Valentin, D. (1991). Calcul ou comptage ? calcul et comptage ! *Grand N, 50*, 11-20.

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental.* [Thèse de doctorat]. Université Paris Diderot.

Chesné, J.-F. & Fisher, J.-P. (2015). Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire. *Conférence de consensus « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire », CNESCO, novembre 2015.*

Conne, F. (1987). Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire. *Revue Math-École,128*, 2-12.

Ministère de l'Éducation Nationale (2016). *Mathématiques. Documents d'accompagnement des programmes de 2016. Le calcul aux cycles 2 et 3.*

Ministère de l'Éducation Nationale (2021). *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP.* https://eduscol.education.fr/document/3738/download?attachment

Ministère de l'Éducation Nationale (2021). *Programme d'enseignement de l'école maternelle. Bulletin Officiel n°25 du 24 juin 2021.*

Mounier, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique. Application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *17*, 27-58.

Mounier, E., Grapin, N. & Pfaff, N. (2020). Lire et écrire les nombres. Quelle place dans l'apprentissage des numérations au cycle 2 ? *Grand N*, *106*, 31-47.

Ninnin L.-M. & Pastor, J.-M. (2020). CEDRE 2008-2014-2019 Mathématiques en fin d'école : des résultats en baisse. *Note d'information de la DEPP*, 20.33.

Tempier, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au cycle 2. *Grand N*, *86*, 59-90.