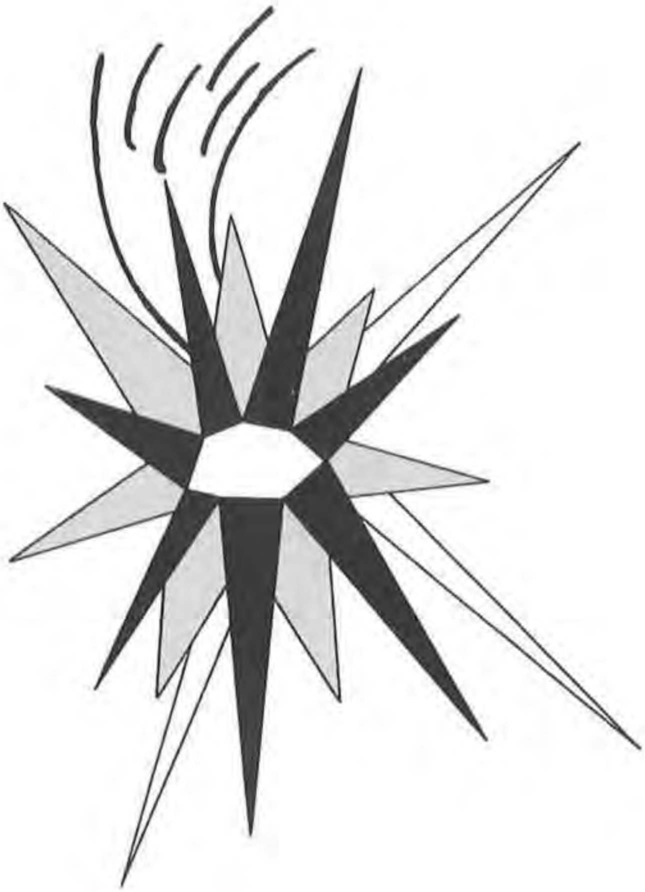
130



MATH ECOLE

NOVEMBRE 1987
26e ANNÉE

MATH-ECOLE 130
26e ANNÉE Paraît cinq fois par an NOVEMBRE 1987

Editorial

Je lis dans mon bureau un rapport fort bien présenté sur papier glacé:

«L'Instruction Publique a obtenu des résultats réjouissants durant ces dernières décennies. Spécialisée dans l'alimentation intellectuelle, elle a réussi une bonne implantation en Suisse romande, grâce à la concentration de ses moyens de production. Les plus petits villages ont leur point de distribution où un dépositaire tient à disposition de la clientèle la plupart de nos produits de base. Dans les localités plus importantes, nos magasins sont organisés par secteurs d'âges sous la responsabilité de plusieurs gérants. Il est vrai que notre entreprise jouit d'un certain monopole puisque les futurs citoyens et citoyennes, dès l'âge de six ans, sont nos clients obligatoires jusqu'à quinze ans. Mais notre dynamisme se mesure à la fidélité de nos clients adolescents dans les grandes surfaces que sont collèges, gymnases, écoles techniques et autres.

Notre entreprise a récemment occupé un nouveau créneau avec les retraités en créant les U3 (Universités du troisième âge) et nous souhaitons également nous implanter dans le marché des adultes actifs par des prises de participation dans la formation continue.

Si, au début du siècle, l'Instruction Publique était surtout connue par ses deux produits de base: orthographe et calcul, aujourd'hui, grâce à la diversification, c'est toute une gamme de produits que nous offrons en option. Notre principe consiste à éviter le gavage des cervaux en proposant une véritable gastronomie intellectuelle.»

Je pense à ma petite voisine qui se délecte des fiches de maths. Il faut la voir, malicieuse, décoder des groupements de groupements comme on déballe une friandise.

Vraiment l'Instruction Publique est un succès. Je me sens léger et ravi d'appartenir au personnel d'une telle entreprise.

Mais voici que survient ma petite voisine. Promue cliente de troisième année (elle a tout juste huit ans), elle revient de sa nouvelle succursale. Elle me tend une feuille pâlote polycopiée à l'alcool: un lot d'additions à faire en colonnes; c'est l'action du jour. Et elle se met à me réciter le mode d'emploi que lui a livré le gérant. «49 + 23 = ? Neuf plus trois, ça fait douze. Mais, **comme on n'ose pas mettre douze,** je fais un petit trait au-dessus du quatre; c'est la retenue...» Puis, plus rien... C'est la panne, sourcils froncés et bouche tombante...

Je me réveille nerveux et déçu, au moment où j'allais écrire une lettre de protestation à la Fédération romande des calculatrices.

Etait-ce vraiment un rêve? Ou bien la réalité dépasse-t-elle la fiction?

André Calame

Le jeu de la vie de J. Conway
et les pentominos

par Roger Délez, S.R.P.

Le jeu de la vie a été inventé par le mathématicien anglais J. Conway, inventeur de nombreux jeux mathématiques. Jeu très original, le jeu de la vie peut se jouer seul à l'aide d'un crayon et d'une feuille de papier quadrillé. Au début, mieux vaut jouer avec des pions sur un tableau quadrillé ou sur un damier.

Règles du jeu

On place quelques pions ou *cellules* sur le quadrillage et on observe ce qui se passe quand on applique à cette «colonie» les «LOIS DE LA GÉNÉTIQUE» définies par J. Conway.

Ces lois définissent les conditions dans lesquelles une cellule **NAÎT, VIT** ou **MEURT.**

Précisions

1	2	3
4	X	5
6	7	8

En supposant le tableau infini, chaque cellule (case) a 8 voisines:

- 4 cellules ont un côté commun
- 4 cellules ont un sommet commun

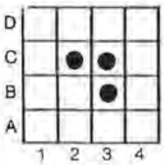
RÈGLES: Ces 3 règles s'appliquent simultanément à chaque coup.

1. **Une cellule VIT** (elle reste sur le tableau) si elle a DEUX ou TROIS cellules voisines.
2. **Une cellule MEURT d'isolement** (on ôte le pion du tableau) si elle a **moins de** DEUX voisines,
   ou **d'étouffement** si elle en a **plus de** TROIS.
3. **Une cellule NAÎT** dans une case vide si **TROIS cases voisines EXACTEMENT** sont occupées.

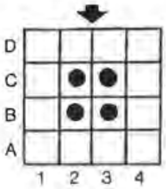
OBSERVONS CE QUI SE PASSE: (avec 3 cellules)

OBSERVONS CE QUI SE PASSE: (avec 3 cellules)

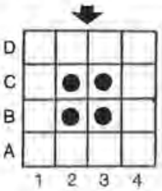
①



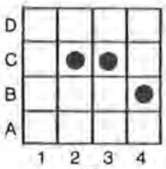
C2 vit
2 voisins
C3 vit
2 voisins
B3 vit
2 voisins
aucune mort
B2 naît
3 voisins



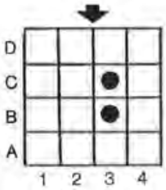
C2 vit
C3 vit
B2 vit
B3 vit
tous 3
voisins
aucune mort
aucune
naissance
Bloc stable
dès
la 2e génération



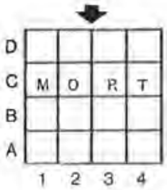
②



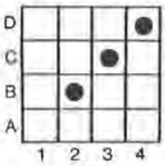
C2 meurt
1 voisin
B4 meurt
1 voisin
C3 vit
2 voisins
B3 naît
3 voisins



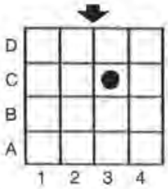
B3 meurt
1 voisin
C3 meurt
1 voisin
aucune
naissance
aucune vie
Mort à la
3e génération



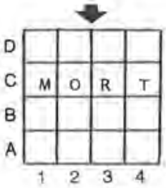
③



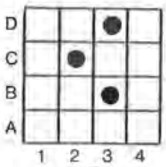
B2 meurt
1 voisin
C3 vit
2 voisins
D4 meurt
1 voisin
aucune
naissance



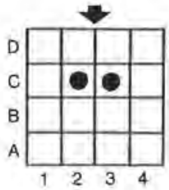
C3 meurt
aucun voisin
aucune vie
aucune
naissance
Mort à la
3e génération



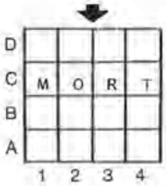
④



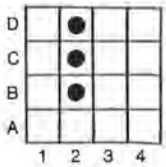
B3 meurt
1 voisin
C2 vit
2 voisins
B3 meurt
1 voisin
C3 naît
3 voisins



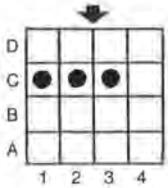
C2 meurt
1 voisin
C3 meurt
1 voisin
aucune vie
aucune
naissance
Mort à la
3e génération



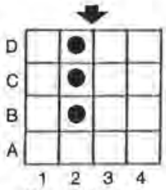
⑤



B2 meurt
1 voisin
C2 vit
2 voisins
D2 meurt
1 voisin
C1 naît
3 voisins
C3 naît
3 voisins

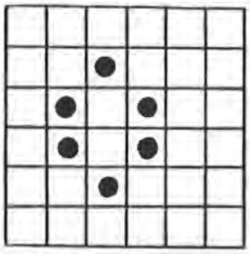


C1 meurt
1 voisin
C2 vit
2 voisins
C3 meurt
1 voisin
D2 naît
3 voisins
B2 naît
3 voisins

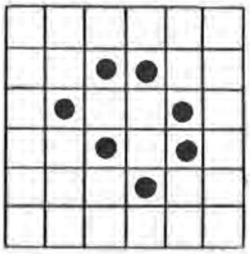


On obtient
le 1er
OSCILLATION en
2 coups !

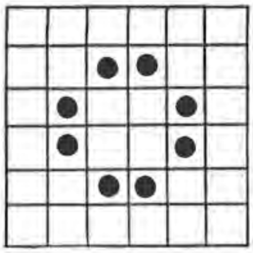
Il existe de nombreuses **configurations stables** dont voici 12 exemplaires.



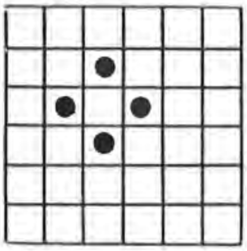
1. Ruche.



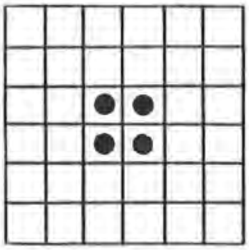
2. Miche de pain.



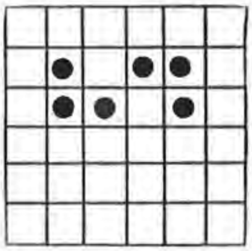
3. Etang.



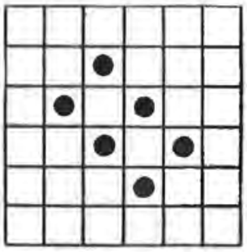
4. Boîte.



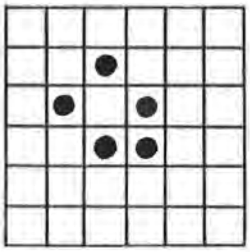
5. Bloc.



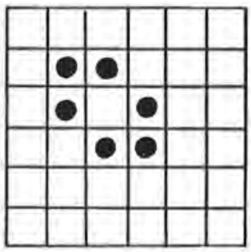
6. Serpent.



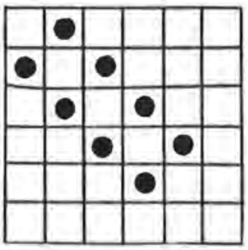
7. Canot



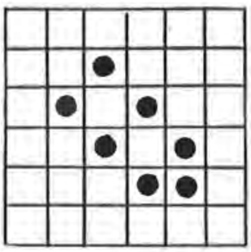
8. Barque.



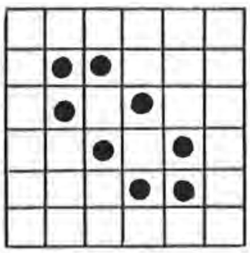
9. Chaloupe.



10. Péniche.

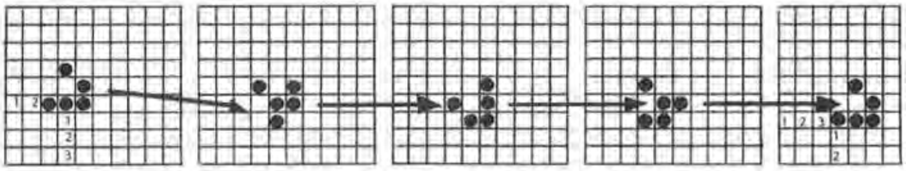


11. Barge.



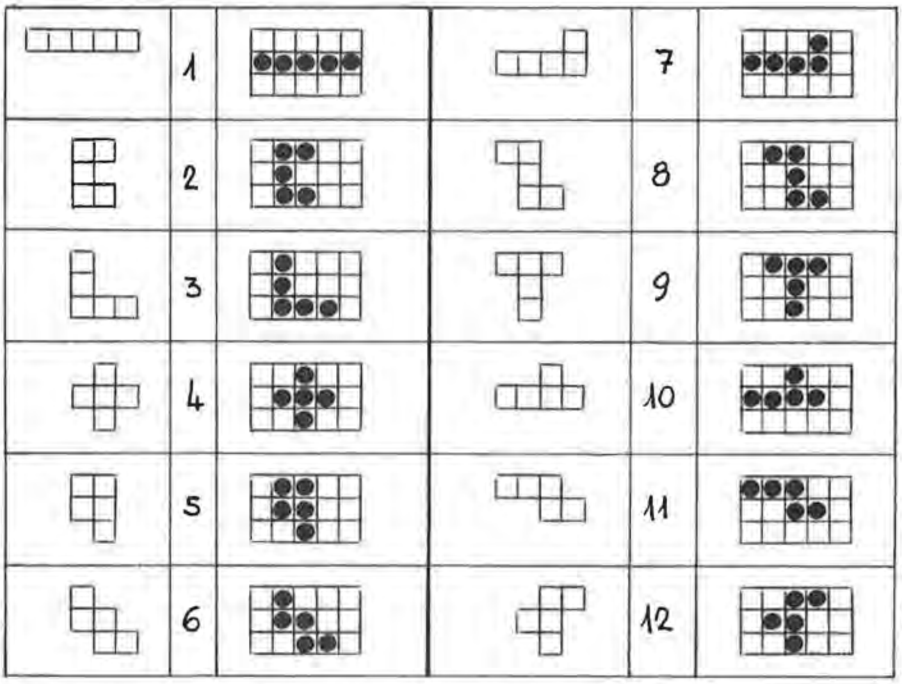
12. Vaisseau.

Voici une colonie de **5 pions** qui est l'une des découvertes les plus amusantes du jeu. J. Conway l'appelle «LE PLANEUR». En effet la colonie se déplace sur le tableau, et en 4 générations elle retrouve sa configuration initiale déplacée d'une case vers la droite, et d'une case vers le bas.



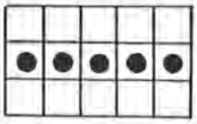
Pour ceux d'entre vous qui veulent en savoir plus sur ce jeu, je conseille vivement l'article de I. Kloumova-Fuchs, pp. 61 à 70, de l'ouvrage intitulé «Mathématiques venues d'ailleurs», divertissements mathématiques en U.R.S.S. Ed. Belin, juillet 1982.

Venons-en aux pentominos:

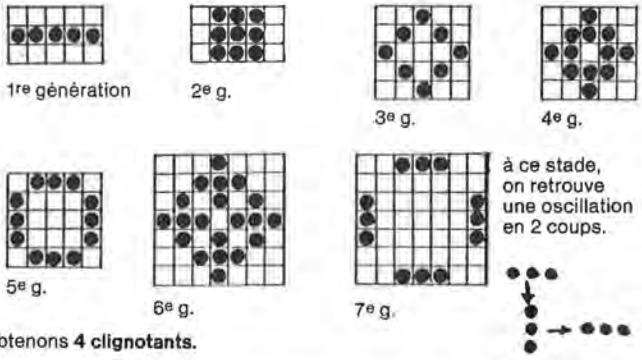


Que deviennent chacune de ces 12 configurations en appliquant les 3 règles du jeu de la vie de J. Conway? Essayez d'abord et consultez les pages suivantes ensuite. Bonne chance! Et bien du plaisir!

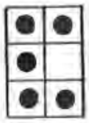
Intéressons-nous à la vie des 12 pentominos



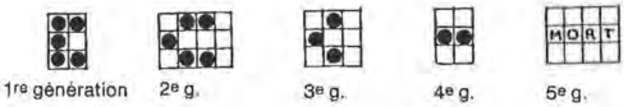
1

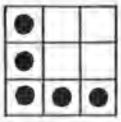


Dès la 7e génération, nous obtenons **4 clignotants.**

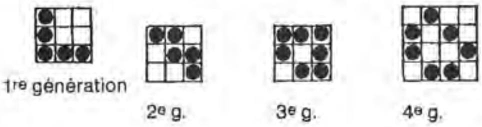


2



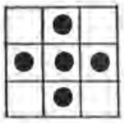


3

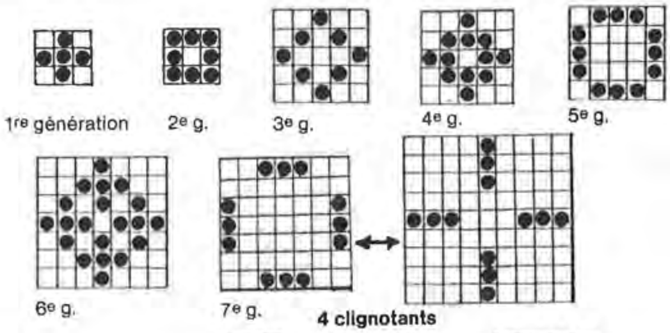


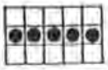
à la 4e génération on obtient une des 12 configurations stables:

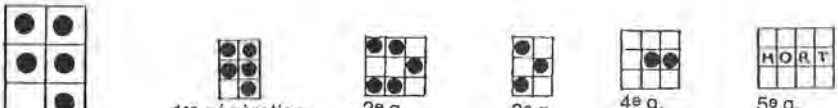
La miche de pain



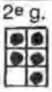
4

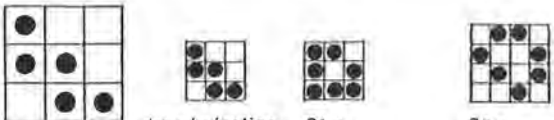


Remarque: dès la 3e génération,  se comporte comme 



1re génération 2e g. 3e g. 4e g. 5e g.

5 Remarque: dès la 2e génération,  se comporte comme  (inversé).



1re génération 2e g. 3e g.

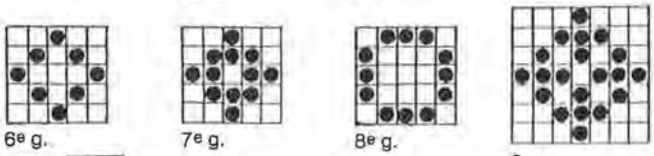
à la 3e génération, on obtient une des 12 configurations stables: **La miche de pain.**

6

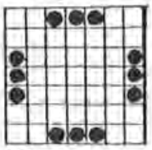
Remarque: Le  correspond au  à la 2e génération (inversé).

7

1re génération 2e g. 3e g. 4e g. 5e g.

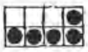


6e g. 7e g. 8e g. 9e g.

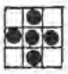


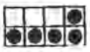
10e g.

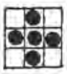
à partir de la 10e génération on obtient à nouveau **4 clignotants.**

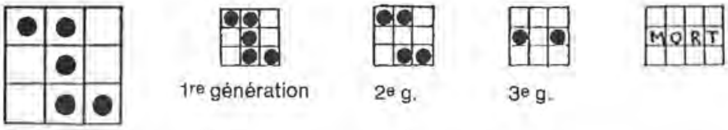
Remarques: Le  à la 6e génération se comporte comme

le  à la 3e génération

et le  à la 3e génération aussi.

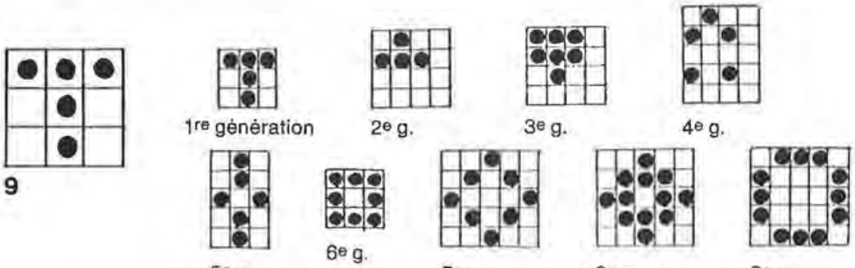
Mais le  à la 5e génération se comporte aussi comme

le  à la 2e génération.



1re génération 2e g. 3e g.

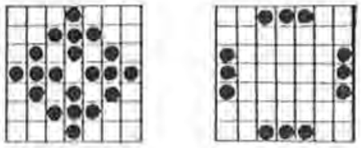
8



1re génération 2e g. 3e g. 4e g.

5e g. 6e g. 7e g. 8e g. 9e g.

9



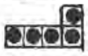
à partir de la 11e génération, on obtient à nouveau **4 clignotants.**

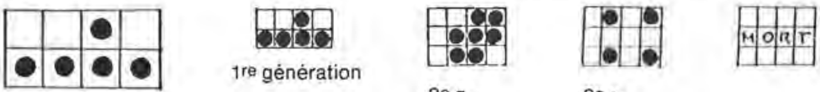
10e g 11e g.

Remarques: Le comportement du 

a) à la 7e génération est identique à  à la 3e;

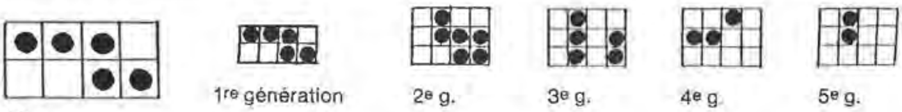
b) à la 6e génération est identique à  à la 2e;

c) à la 5e génération est identique à  à la 4e (inversé).



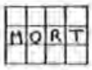
1re génération 2e g. 3e g.

10



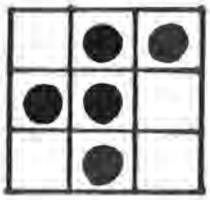
1re génération 2e g. 3e g. 4e g. 5e g.

11



6e g.

Gardons pour la bonne bouche le **12**



Que va-t-il se passer?...
«des tas de choses»
«des masses de transformations»...

Faisons confiance à J. Conway

«Cette configuration devient une colonie stable après

1103 générations!

L'ordinateur nous apprendrait que cette colonie stable est formée de:

8 blocs	4 miches de pain
4 clignotants	4 barques
4 ruches	4 vaisseaux

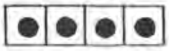
En espérant que cet article vous permettra de vous familiariser un peu avec le jeu de la vie, je souhaite vivement qu'il vous entraîne dans les méandres d'une recherche fabuleuse.

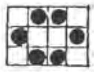
En guise de conclusion je dirai simplement:

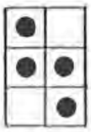
Du jeu de la vie de J. Conway
Aux pentominos de Golomb
Comme pour l'œuf de Colomb
Y penser, vraiment il fallait.

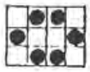
Sur le jeu de la vie il y a encore beaucoup à dire. Si vous en désirez plus, à vous de nous l'écrire.

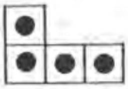
Annexe: quelques exercices: (Essayez... courage!...)

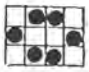
 → ?

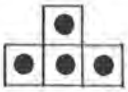
solution:  **ruche** à la 3e génération

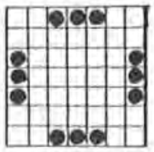
 → ?

solution:  **ruche** à la 3e génération

 → ?

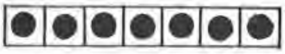
solution:  **ruche** à la 4e génération

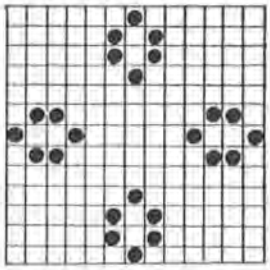
 → ?

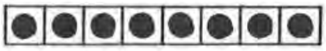
solution:  **4 clignotants** à la 10e génération.

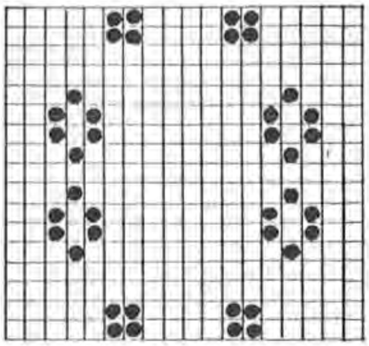
 → ?

solution: **Mort** à la 12e génération.

 → ?

solution:  4 **ruches** à la 15e génération.

 →

solution: 

4 blocs et
4 ruches
à la 49e
génération...

Entre comptage et calcul

Une deuxième étape d'un périple menant des dénombrements aux calculs en colonne

par François Conne

1. Introduction

Dans le numéro 128 de Math-Ecole, j'ai présenté un article (Comptage et écriture des égalités dans les premières classes d'enseignement primaire) qui proposait, au sujet des opérations numériques élémentaires, une terminologie personnelle. Dans cette deuxième partie je vais poursuivre mon cheminement et montrer comment ce cadre de référence peut rendre compte d'observations de classe à propos des calculs numériques. Ici les exemples seront tirés de deux recherches, l'une américaine de Madell [2] et l'autre de moi-même sur les égalités lacunaires [3, 4]. Je projette, lors de prochains articles, de poursuivre mon périple en examinant la question des calculs assistés par un algorithme, c'est-à-dire les calculs écrits en colonne.

Je rappelle, sans les développer ni donner ici d'exemple, les définitions que je proposais dans mon précédent article. Le lecteur pourra s'y référer pour des exemples relatifs aux comptages, ou alors attendre un peu pour la présentation de plusieurs exemples de calculs numériques variés.

1.1 Définitions

Dénombrement: Une collection d'éléments étant présente, le dénombrement est une opération permettant de déterminer la quantité numérique qui lui est associée. Cette opération consiste à coupler l'énumération des éléments de la collection à celle des signes numériques (en particulier les noms de nombres organisés dans la comptine). Le dernier signe énuméré représentera la quantité.

Calcul: Opération traitant les transformations des signes numériques reflétant les transformations et les comparaisons des quantités.

Calcul – *comptage:* Ici le calcul se fait par le recours à un enchaînement de dénombrements. La donnée du signe numérique est préalable à celle de la quantité qui n'est qu'un auxiliaire au calcul. Différents types de figurations des quantités peuvent être utilisées.

Calcul *numérique:* Calcul ne comportant pas de dénombrement mais opérant au niveau même des signes numériques. Une telle opération se fait par le recours à un ensemble de relations numériques codifiées (répertoire d'opérations élémentaires, table des opérations) ainsi qu'à des règles de numération présentées.

Sous forme de règles de disposition et d'écriture des signes et de leurs transformations et dérivées des propriétés numériques élémentaires: associativité, commutativité, distributivité, inverses, éléments neutres.

Nous verrons par la suite que les calculs numériques se scinderont encore en deux classes: les calculs numériques symboliques et les calculs numériques assistés par un diagramme. Ceci sera à peine esquissé dans cet article mais fera l'objet du troisième épisode.

1.2 Deux idées à retenir

1. Deux idées président à toute cette construction. La première est celle de **diriger l'étude des activités numériques par celle des échafaudages symboliques** qui leur sont associés. En effet, ce qui fait la distinction entre dénombrement, comptage et calcul, ce sont les objets que l'on traite (manipule): des objets concrets, réels, pris pour eux-mêmes ou représentant une quantité (pensez à la jolie expression française: «Quelle quantité cette collection d'objets représente-t-elle?». Le mesuré venant à représenter le mesurant) ou des signes numériques de toutes sortes, organisés en dispositions plus ou moins élaborées.

Cette idée est exprimée dans mon premier article comme une clause de présentation alors qu'elle est plus. En effet, elle représente pour moi une clé de synthèse entre différents aspects de nos travaux genevois, J. Brun et moi-même.

Analyse de manuels (méthodologies et fiches d'élèves), observation de classe, recueil de protocoles de leçons, de productions d'élèves lors d'entretiens ou de travaux écrits, observation des maîtres au travail, de leur propres productions didactiques telles que: explications, moyens d'assurer la réussite, etc. et enfin gestion de situations mathématiques; pour tout ceci, la référence aux signes et symboles associés fournissait un solide point de repère.

Deux confirmations sont venues ensuite à ce choix. Tout d'abord l'élaboration théorique de Gérard Vergnaud, dont le lecteur pourra lire avec profit un article consacré aux notions de concepts et schèmes [5]. Dans l'enseignement des mathématiques on ne s'occupe pas tant des schèmes de pensée que des concepts, dûment identifiés dans une construction scientifique (les mathématiques). Comme le fait remarquer G. Vergnaud (p. 249) «le terme conceptuel est restrictif parce qu'il suppose un usage explicite de signifiants». Tel est donc le critère qui distingue concept et schème et il est donc normal, dans le cadre d'études didactiques, de s'appuyer sur les signifiants et leurs montages. Une confirmation seconde vient alors en droite ligne de ces considérations, mais elle se situe à l'autre extrémité de la chaîne, à savoir les observations que nous avons pu faire du travail en classe. Il s'avère en effet que de larges pans du travail effectif des élèves échappent à l'observation des enseignants. Je l'ai montré dans mon travail de thèse [6]. Or ceci est étonnant car, il faut le dire, l'observation et la récolte de faits originaux sont choses faciles! Or il semble bien que le point décisif qui conditionne de tels recueils d'observation tient à l'intérêt que l'on portera aux signes et aux significations que les élèves (et les maîtres) leur attribuent ou s'essayent à leur attribuer. Ce que nous rappellent les psychologues tels G. Vergnaud, c'est qu'il ne faudrait pas préjuger du caractère arbitraire et conventionnel des signifiants pour méconnaître qu'ils sont l'objet d'un enjeu essentiel. Mais ici la *fonction psychologique* vient se heurter à l'idée qu'on se fait communément de la *fonction didactique*. L'enseignement vise à instituer des significations communes et prédéfinies par la discipline enseignée, son histoire et les usages actuels qui en sont faits dans la société. Donc l'échange pédagogique risque toujours de se crisper sur les signifiants pris comme des termes objectifs, à signification univoque et invariante, auxquels on aura alors tôt fait de faire jouer le rôle de critères d'acquisition.

Une attitude opposée visant à tout ramener à des significations concrètes et ne jamais considérer les signes comme des objets en soi, faisant partie du monde extérieur, revient finalement au même puisqu'à la crispation sur des thèmes on substitue leur dissolution sous «le concret». L'harmonisation des fonctions psychologiques et didactiques conférée aux signifiants demande donc plus qu'une décentration des enseignants, elle demande que leurs regards (et leur rôle) soient reconsidérés.

2. La seconde idée précise ceci sur l'exemple des calculs numériques. Il est bien clair que le nombre et les transformations numériques procèdent des quantités concrètes. Ceci assure qu'étant donnés des signes numériques, il est toujours possible de leur associer des collections concrètes. Mais ceci n'entraîne en aucun cas que les **traitements numériques eux-mêmes soient une émanation directe des traitements des quantités concrètes.**

Ces calculs par exemple sont pour la plupart des traitements numériques spécifiquement adaptés aux signes sur lesquels ils opèrent (les systèmes de signes associés aux calculs sont eux-mêmes multiples et hiérarchisés). Certes on peut, nous l'avons vu, recourir à des dénombrements auxiliaires pour effectuer tel ou tel calcul (ce sera alors un comptage), certes on peut aussi montrer, avec des quantités concrètes, des modèles concrets de ces opérations symboliques. Le modèle des bases et des opérations groupe et code en est un exemple fameux. Mais alors, le modèle est forcément aussi élaboré, si ce n'est plus que ce qu'il modélise, **l'illustration concrète ne permet pas de remonter l'échelle des complexités et de l'élaboration.**

Que le lecteur ne s'effraye pas trop vite de cette introduction abstraite, les exemples viendront à l'appui de ces considérations. Je voulais simplement esquisser les grandes lignes du point de vue adopté dans toute cette série d'articles.

Des exemples, j'en ai déjà fourni un certain nombre à propos de recherches personnelles. Je reprendrai ici deux aspects de la question pour vous introduire à la distinction nouvelle que je ferai à propos des calculs numériques, distinction qui fera l'objet des articles suivants. Mais auparavant je désire discuter ici les interprétations d'autres chercheurs, américains, Labinowicz et Madell.

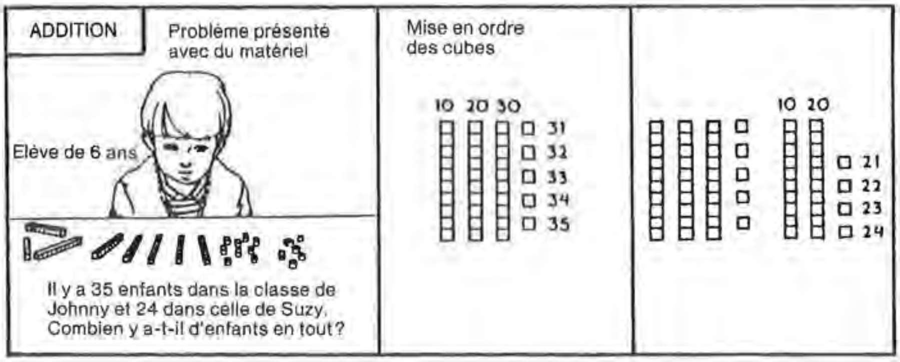
En fait, je profite de ce que M. Ed. Labinowicz a publié l'an passé un ouvrage très intéressant à propos de l'enseignement des activités numériques élémentaires en 1P, 2P, 3P, 4P. Livre dont je vous conseille la lecture (si vous lisez l'anglais) [7]. En effet, ses deux principales qualités sont: a) La présentation de beaucoup de données d'observation et de recherche. b) Les exemples et contre-exemples nombreux présentés et commentés par l'auteur permettant à l'enseignant d'apprendre à s'entretenir et à questionner les élèves, d'une manière adéquate pour l'observation.

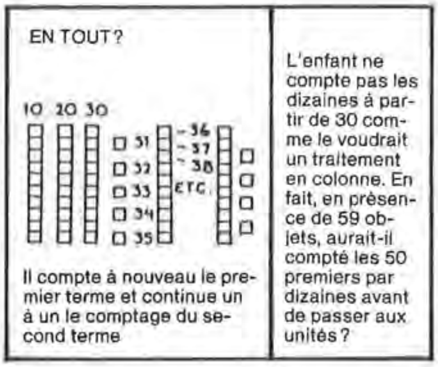
J'ai alors eu l'idée qu'il serait bon de présenter ici un passage de cet ouvrage, tout en réexaminant les interprétations de Labinowicz selon le point de vue que j'ai adopté.

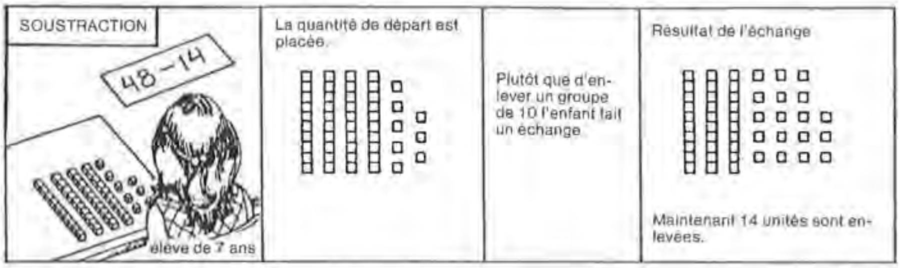
2. Les observations de Madell telles que les rapporte Ed. Labinowicz

Dans son livre Ed. Labinowicz consacre une large place aux problèmes de l'enseignement de la numération et des calculs en colonne. Il note les difficultés que ces derniers représentent pour des élèves de 1P, 2P et note aussi que bien des variantes existent à ces calculs. Dans cette perspective, il s'intéresse aux observations faites par Madell dans une école où justement ces méthodes de calcul standard ne sont pas enseignées et où on peut voir des élèves travailler «spontanément», à leur manière, les calculs élémentaires. Labinowicz rapporte alors les conclusions principales des travaux de Madell [3]. Examinons-les tour à tour.

1. Dans leurs raisonnements précoces (spontanés) les élèves ne procèdent pas colonne par colonne. Voici deux exemples de Labinowicz:







Les élèves de 1re et 2e primaire sont généralement incapables de penser les quantités de la seconde dizaine (de 11 à 19) comme une dizaine plus quelques unités.

Je ne suis pas étonné de ces exemples. Mais j'aimerais les interpréter selon les termes que j'ai définis. S'attendre à ce que les élèves procèdent colonne par colonne ou comptent séparément les barres de dix et les cubes unités, ce serait s'attendre à un calcul de la part de l'élève portant sur ces symboles (la disposition barres/cubes selon le matériel Dienes). Or ce que font les élèves, c'est ceci: Une première quantité symbolisée (représentée) avec des barres de dix et des cubes unités. Puis l'autre est ajoutée, ou ôtée, en énumérant un à un des cubes unités (selon la comptine), c'est-à-dire au moyen d'un comptage. Ici les cubes sont plus un support pour le comptage (qui permet à partir des nombres de dénombrer une quantité) que la représentation des quantités: 24 (élèves à ajouter), 14 (à soustraire). Les problèmes sont donc ramenés à des dénombrements. Ce sont des collections de jetons que les élèves traitent **en premier lieu,** puis, ensuite, secondairement, ils les symbolisent (ils représentent ces quantités) en barres et cubes. Dire ceci, est alors dire que dans le contexte de cette tâche, **rien n'obligerait ni même n'engagerait l'élève à ne pas compter, mais à calculer directement.** Ceci illustre donc très bien la seconde idée exposée ci-dessus. Et montre qu'il n'y a pas de passage simple (direct) entre procédure traitant un niveau symbolique et procédure traitant un autre niveau symbolique. On ne devrait donc pas s'attendre à ce que spontanément les élèves en viennent à procéder séparément colonne par colonne.

2. Comment faire alors que des procédures élaborées de calcul viennent à se substituer aux comptages?

Il y a bien des façons de faire, et la plus simple de celles-ci semble bien être de mettre les élèves en situation de ne pas pouvoir s'appuyer sur des dénombrements. Mais le second exemple de Madell est alors très instructif. Voici comment Labinowicz le présente:

«Même quand l'élève procède dans son calcul colonne par colonne, c'est sans exception de gauche à droite.»

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\,46 \\ \hline \cancel{7}2 \\ 8 \end{array}$$

La somme de la colonne des dizaines est inscrite avant de passer aux unités.

Cette méthode peut exiger une modification du chiffre écrit en premier lieu.

7 diz.

$$\begin{array}{r} 36 \\ +46 \\ \hline \end{array} \longrightarrow$$

La somme des dizaines est retenue de tête jusqu'à ce que la colonne des unités soit examinée pour voir s'il y a une dizaine en sus.

La Méthode «naturelle» la plus efficace.

$$\begin{array}{r} 36 \\ +46 \\ \hline 8 \end{array}$$

Les unités sont d'abord estimées et toute dizaine en sus est introduite dans la somme des dizaines. Puis on revient aux unités.

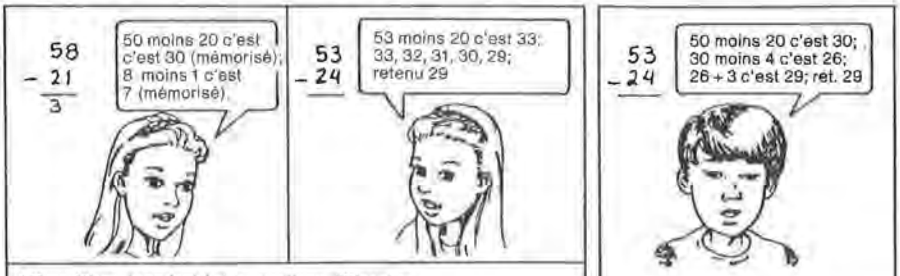
Ce niveau n'est atteint que par peu d'enfants. Aucun enfant n'a montré une procédure systématique de droite à gauche quand il travaille de lui-même.

Ce qui est intéressant dans cet exemple, c'est qu'il met en évidence le fait qu'une partie du travail se fait mentalement, alors que, dans le cadre d'un calcul standard de droite à gauche on en ferait l'économie. Ici l'élève s'appuie sur le découpage du nombre en colonne, et il traite son calcul à ce niveau (il l'organise selon). Nous n'avons donc plus affaire à un comptage mais à un calcul numérique. Mais ce découpage en colonne semble supporter le découpage oral du prononcé des nombres plutôt que d'être traité pour lui-même. Ainsi donc, ici, l'élève traite les signes numériques (critère pour un calcul numérique) mais se ramène aux noms des quantités, à la numération orale, et pas tellement à la numération écrite. Or la numération orale procède bien à ce découpage qui va des «grandes unités aux petites»: ... millier → centaine → dizaine → unité, et ceci correspond à l'écriture gauche → droite, et au sens de la lecture. Si mon interprétation s'avère correcte (dans certains cas) on voit à nouveau que rien dans la situation présentée n'oblige les élèves à procéder selon l'algorithme standard. Et à ce propos une note de Labinowicz dit: «selon Levin (1981) [8], les techniques standards actuelles de calcul écrit telles que l'ordre droite → gauche et le système de retenue ont été développées afin d'éviter à avoir à barrer (ou effacer) des résultats intermédiaires partiels.» Par exemple, si on procède de droite à gauche dans

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\ 46 \\ \hline 82 \end{array}$$

on s'évite les corrections que présente le dessin de Labinowicz. Ceci revient à dire que certaines règles de calcul ne s'expliquent que relativement à un niveau symbolique donné, et donc qu'on ne saurait en retrouver ni la trace, ni la raison à un niveau inférieur. De nouveau, nous avons une illustration de la seconde idée présentée dans mon introduction. Ainsi donc l'ordre de calcul droite → gauche adopté par les algorithmes (+, – et ×) standards ne peut pas vraiment s'expliquer à l'aide de jetons, ni à celle du recours à la numération orale. *Mais autre chose apparaît, c'est que généralement différents systèmes de signes sont présents ensemble.* Ici ce sont les signes écrits et les signes oraux du prononcé des nombres. Sous cet aspect, il convient d'examiner avec précision sur quoi portent les traitements effectifs du sujet. Mais de plus, c'est par le jeu entre différents systèmes de signifiants que s'opère le passage d'un type de traitement à un autre. Le lecteur se rapellera de quelques exemples que j'avais donnés dans mon précédent article [1] à propos du comptage.

3. L'exemple suivant que propose Labinowicz montre en outre que, selon la situation, selon les données, les procédés de calcul changent.



Même élève répondant à des questions différentes

Labinowicz insiste en outre pour dire que ces procédures sont adaptées à la situation. C'est-à-dire que l'élève ne procède pas à une série invariable d'opérations comme le stipule un algorithme standard mais qu'il module en «choisissant» des relations variées et certaines complexes (ainsi: $53 - 24 = 29$ $50 - 20 = 30$, $30 - 4 = 26$, $26 + 3 = 29$, jeu de soustraction/addition).

Une adaptation particulièrement fréquente (d'après Madell) tient à ce que: «les méthodes des élèves dans la retenue et l'emprunt leur permettent d'éviter d'avoir affaire à des résultats partiels plus grands que dix.»

De nouveau ici, ce sont peut-être les procédures de calcul mental qui prédominent. Mais ce qui est plus important à noter, c'est la variété de tels «trucs» de calcul numérique que l'on peut observer. Certains sophistiqués nous amenant à nous exclamer: «oups! c'est bien tordu!», d'autres au contraire forçant notre admiration: «fallait y penser!» Ainsi ces trucs se caractérisent-ils par le fait qu'ils ne sont pas aussi déterminés que dans le calcul en colonne. Car dans ce cas (algorithme standard) je ne peux pas effectuer l'opération $3 - 4$ sans emprunter à la colonne adjacente toute une dizaine alors que je n'ai besoin que d'une seule unité. Je dois passer par $13 - 4$ (et pas $10 - 1 \rightarrow 4 - 4$). Cette différence est notée par Madell. Il constate que ceci (le passage de $3 - 4$ à $13 - 4$) n'est pas nécessaire au résultat (c'est évident) et que les élèves trouvent d'eux-mêmes des façons de s'en passer (c'est évident mais pas assez reconnu). Labinowicz explique ceci de la façon suivante: «Pour des soustractions avec retenue, Madell constate qu'il n'a jamais vu un enfant qui, lorsqu'il travaillait pour lui-même, aurait effectué l'échange de dix, et prononcé: de 4 aller à 13, il y a 9. Ces enfants avaient des méthodes efficaces pour contourner la difficultés de l'échange ainsi que la nécessité de connaître toutes les décompositions (additions) des nombres de 11 à 19.»

Mais ces procédures adaptées peuvent être systématisées elles-mêmes et aboutir à un algorithme [1]. Madell rapporte ainsi le cas d'un élève de 2e primaire qui procédait ainsi:

$$\begin{array}{r} 8371 \\ -3754 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 8000 - 3000 & = 5000 \\ 700 - 300 & = 400 \\ 5000 - 400 & = 4600 \\ 70 - 50 & = 20 \\ 4600 + 20 & = 4620 \\ 4 - 1 & = 3 \\ 4620 - 3 & = \underline{4617} \end{array}$$

Cette formalisation est très simple, elle est fort intéressante car elle montre que ce qui pourrait être considéré comme une erreur (inverser le calcul dans $700 - 300$ par exemple), si elle apparaissait au cours d'une résolution se voulant standard:

$$\begin{array}{r} 8371 \\ \underline{3754} \\ 5423 \end{array}$$

peut aboutir au contraire très efficacement. Je reviendrai encore sur cet exemple.

[1] Le mot est utilisé ici dans un sens très restrictif de *procédure fixe* pour toutes les soustractions et non dans une acception générale qui verrait dans tout calcul un algorithme sous-jacent. Je ne m'arrêterais pas à une question de mots. Je veux seulement contraster entre les calculs «adaptés» selon les données et des calculs tout déterminés.

2.2 Conclusion de cette discusion

a) La description que je propose en termes de *dénombrement, comptage, calcul numérique* est pertinente; de même, les idées exposées à ce sujet trouvent confirmation.
b) Nous entrevoyons que les élèves développent des procédures adaptées de calcul, qui varient de cas en cas. Elles ne sont pas déterminées à l'avance comme les méthodes de calcul écrit standard mais reposent sur un ensemble de relations riches et variées pour traiter des difficultés qui se présentent.
c) Pour ce faire, les élèves jouent sur plusieurs registres de présentations symboliques.
d) Certains de ces calculs, lorsqu'ils sont systématisés et qu'ils trouvent une disposition type, produisent des «algorithmes» (procédure fixe et prédéfinie sur une classe de problèmes) non standard.

3. Exemples des classes en Suisse romande (la génération spontanée d'algorithmes en classe)

3.1 Calcul mental / calcul écrit, une mauvaise distinction

La distinction que j'ai laissée entrevoir est reconnue. Classiquement on l'attribue au calcul «mental», ce qui est peu satisfaisant. En effet, tout comme les procédures de calcul en colonne standard, les procédures de calcul mental peuvent être fixées, formalisées et dans ce cas la seule chose qui différencie «calcul mental» et «calcul écrit» c'est le registre symbolique sur lequel chacun s'appuie. Système de désignation orale des nombres, ou système de désignation écrit. Mais de plus, tous les calculs écrits ne sont pas standardisés, ni toujours prédéfinis. Par exemple un calcul comme 298 + 45 = 248 + ... 95 procède par transformation ad hoc d'écriture, qui est ici une bonne astuce.

Dans mon prochain article, je reviendrai très en détails sur la distinction entre deux types de calculs numériques: prédéterminés par un algorithme (explicite) ou non. Cette distinction a un caractère général, et je voudrais maintenant, pour terminer, le montrer sur des exemples moins familiers que ceux décrits auparavant. Dans l'observation du travail en classe, on peut «voir jouer» ces distinctions spontanément, c'est-à-dire sans qu'elles aient été prévues par le projet d'enseignement.

3.2 Où une sur-notation crée un algorithme

Il est important d'examiner dans le travail de la classe les traitements symboliques. Par exemple, le maître veut expliquer quelque chose à ses élèves et il en vient à noter au-dessus des écritures de donnée quelques signes accompagnant son explication et qui devraient aider l'élève à retrouver ce qu'il doit faire et dans quel ordre. Prenons par exemple les tâches de calcul impliquant l'écriture d'égalités incomplètes du type $a+b=c+...$ et $a+b=...+c$ (ou ce qui revient strictement au même, des étiquettes: $\boxed{a+b}$ $\boxed{c+...}$ et $\boxed{a+b}$ $\boxed{...+c)}$ à compléter. J'ai déjà évoqué ceci dans d'autres publications [3, 6], mais je vais y revenir ici pour un aspect bien précis. On peut en effet donner un algorithme (explicite) pour résoudre toutes les questions de ce type:

1. effectuer la somme $a+b$
2. décomposer la somme obtenue selon $\underline{c}$
3. inscrire le résultat trouvé en 2 dans la lacune.

Ce procédé marche toujours, avec bien entendu quelque lourdeur. Par exemple s'il s'agissait de résoudre le calcul: $298+45=95+...$ Il ne serait pas très «malin» de calculer 343 par $343-95=248$ (même si on sait utiliser de tête les relations $100-2=98$, $100-5=95$, soit dit en passant type de relation systématiquement utilisé par le calcul avec boulier).

Les observations que j'ai faites en classe montrent que ces exercices sont difficiles pour les élèves de 1re primaire. L'interprétation en termes de comptage les fait osciller entre diverses «lectures» et ils ne peuvent pas décider (ni comprendre) laquelle est correcte mathématiquement. Ainsi $3+5=...+2$ peut être compris comme la demande de la somme $3+5+2$ (la réponse inscrite sera alors 10) ou autrement, comme un calcul enchaîné $3+5=.8.+2$, voire d'autres encore (cf [3, 4]).

Les enseignants qui ont à faire à ce type de difficulté modifient d'eux-mêmes les notations. Ainsi par exemple $a+b=...+c$ devient $\widehat{a+b=}...+c$ (ou encore $a+b=...+c$, $\boxed{a+b}$ $=$ $\boxed{...+c,}$ etc.) où tous ces nouveaux signes indiquent à l'élève quelle opération effectuer en premier, et quelles données prendre tout d'abord en compte $(a+b)$. Cette «entrée» dans le calcul permettant alors de déterminer toute la suite du calcul.

Ces «trucs» d'enseignants sont tout à fait efficaces. Ils aident réellement bien des élèves à se fixer une interprétation univoque de l'écriture. Mais que devient-elle maintenant? Elle s'éloigne de son «origine mathématique». Des signes qui n'ont pas cours hors de la classe sont introduits. De plus l'écriture sert à induire une certaine vection (celle de l'algorithme); on indique quoi faire à quel moment, dans quel ordre et aussi à quels signes porter attention en premier dans la donnée. Cette écriture transformée devient alors nettement plus un *diagramme* qu'une simple relation mathématique fragmentaire à reconstituer.

En résumé: pour aider les élèves à fixer une interprétation parmi d'autres possibles, les maîtres transforment l'écriture d'égalité lacunaire en diagramme et indiquent par là même un algorithme de résolution qui garantit à tout coup la solution, malgré une lourdeur certaine. Bien entendu, ceci n'est pas très habile, didactiquement parlant car cela «souffle» à l'élève l'interprétation qu'il devrait trouver de lui-même.

3.3 Calcul et répertoire de relations

Voyons maintenant un autre aspect tout aussi intéressant. Dans ma recherche sur les égalités lacunaires j'avais proposé aux élèves des égalités «bi-lacunaires» a + ... = ... , ... + a = ... et autres... [3, 4]. Dans ce cas les élèves doivent produire deux nombres pour leur réponse. Ceci donne une certaine marge pour la réponse. On pourrait penser que les élèves commencent par choisir un premier nombre qu'ils prennent comme donnée auxiliaire puis déterminent le deuxième nombre de la réponse:

Ex.:	3 + ... = ...	3 + .4. = ...	3 + .4. = .7.
ou	5 = ... + ...	5 = .3. + ...	5 = .3. + .2.

L'examen des réponses des élèves a cependant révélé autre chose. Les élèves ont tout d'abord déterminé (selon la place de la donnée numérique, ou/et selon la place du signe =) l'opération à faire (composition/décomposition). Puis leurs réponses se cantonnent dans un ensemble restreint de relations numériques qu'ils connaissent bien sans doutes: compositions/décompositions avec le nombre 1, doublons, nombres consécutifs. Ceci aurait réduit notablement les possibilités de réponse (on n'a pas par exemple: 5 + .12. = .17.!) et bien entendu facilite la détermination de leur réponse.

Du point de vue du calcul on peut dire que les élèves ont réduit la classe des problèmes (des égalités) à résoudre. Ils pouvaient le faire, la consigne les laissait libres. Mais il y a plus, ces items ont bien révélé la façon dont les élèves envisagent l'écriture, et l'aspect séquentiel surtout. Ceci veut dire que, comme je l'expliquais dans mon article précédent [1], l'écriture est vraiment prise comme code d'un calcul effectué par comptage.

En résumé: la donnée de calculs non univoquement déterminés (une seule donnée numérique pour un calcul) aura révélé la façon dont les élèves interprètent l'écriture d'égalités ainsi que la référence dans l'accomplissement de leur tâche à un *répertoire* de relations numériques bien connues des élèves (leur facilitant la tâche).

4. Conclusion de cet épisode

Dans cet article, j'ai précisé la portée des définitions proposées précédemment. J'ai dégagé les idées centrales. Puis j'ai montré comment ceci pouvait servir de cadre d'interprétation et d'outil d'analyse pour divers résultats de recherche ou d'observations en classe. Ces exemples m'ont amené à introduire de nouvelles distinctions et de nouveaux termes: algorithme, diagramme, répertoire de relations numériques... termes que je définirai, illustrerai et commenterai abondamment par la suite.

Bibliographie

[1] CONNE François, *Comptage et écriture des égalités lacunaires dans les premières classes de l'enseignement primaire.* Math-Ecole n° 128, Genève 1987.

[2] MADELL Robert, *«Addition and Subtraction - What do Children naturally do?»* Paper presented at the National Council of teachers of mathematics annual meeting, San Diego, 1978.

[3] CONNE François, *Une épreuve de calcul en première primaire.* Interactions didactiques, 1984, n° 6. F.P.S.E. Université de Genève.

[4] CONNE François, *Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques.* A paraître.

[5] VERGNAUD Gérard, *Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation.* Psychologie française, 1985, n° 30-3/4, pp. 245-252.

[6] CONNE François, *La Transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire.* Thèse de doctorat F.P.S.E., Université de Genève.

[7] LABINOWICZ Ed. *Learning from children.* New beginnings for teaching numerical thinking. 1985. Addison-Wesley Pub. Company. Menlo Park California.

[8] LEVIN James, *«Estimation Techniques for Arithmetic: every-day Math and Mathematics Instruction.»* Educational Studies in Mathematics 12 (1981): pp. 421-34.

De l'arithmético-géométrie à la «Construction» d'une formule

par Lucia Grugnetti Cagliari (Trad. de l'italien par Tiziana Donatelli)

Introduction

A travers les nombres abstraits, les pythagoriens ont pu établir une liaison entre nombre et figure et entre deux des quatre branches parmi lesquelles ils avaient divisé la science; les nombres abstraits étaient, en effet, arithmético-géométrie.

A ce propos, Nicomaco de Gerasa (philosophe néo-pythagoricien, vivant près de Jérusalem vers la fin du premier siècle après J.-C.) dit, au chapitre XII de son second livre «Introductio arithmeticas»: «... la théorie de ces nombres est en outre en parfait accord et harmonie avec leur représentation géométrique.»

C'est à Diophante [1] et à son œuvre mineure «sur les nombres polygonaux» que nous devons le point final sur les connaissances acquises par les Grecs dans ce domaine, sans avoir la possibilité de pouvoir distinguer avec certitude quelle est la proportion de cette œuvre due à son auteur et celle due à ses prédécesseurs.

[1] Le plus grand algébriste grec ayant vécu au 3e siècle après J.-C. Né à Alexandrie, son action principale est, à notre connaissance, l'Arithmétique, ouvrage à l'origine en 13 volumes, parmi lesquels nous avons reçu les 6 premiers.

Cependant, le premier intérêt pour les nombres abstraits est normalement attribué aux pythagoriciens, dans le but d'expliquer la nature au travers du nombre (de Pitagora di Samo et de son école) [1].

L'arithmético-géométrie des pythagoriciens a constitué l'objet d'une unité didactique développée en 1re année secondaire (7e CO – élèves de 11 ans) dans le courant de cette année scolaire.

Grâce à cet argument, des idées inhérentes aux nombres naturels ont été reprises (naturellement dès l'école primaire) par les élèves d'un point de vue nouveau et pour certaines raisons, d'un point de vue peut-être plus stimulant.

En outre l'argument développé même sur le plan historique, a permis un approfondissement interdisciplinaire très naturel et fluide.

L'objectif final de l'ensemble didactique dont l'expérimentation, sur les nombres triangulaires, est citée, a été celle de la «construction» d'une formule générale.

La méthodologie utilisée a été de type interactif (dans le sens de discussions ouvertes élèves-enseignants et élèves-élèves) où le rôle de l'enseignant a été essentiellement provocatif. Il s'est agit, dans ce sens, d'une activité guidée. On aurait pu introduire la thématique et se limiter à observer l'activité spontanée des élèves. Même en attachant une importance incontestable aux activités de ce genre, nous pensons que, dans certains cas, il est assez productif de «forcer un peu la main», avec évidemment les précautions nécessaires et si possible sous forme de jeux. Les passages qui peuvent paraître artificiels perdent une grande partie de leur artificialité là où ils deviennent la trame d'un jeu, d'un défi.

La problématique

L'aboutissement de l'objectif «construction d'une formule» est-il trop ambitieux pour des élèves de 11 ans?

A cet âge, un élève peut-il «découvrir» une formule ou plutôt arrive-t-il à la construire? et encore, après l'avoir construite, en comprend-il pleinement la signification?

Avec l'expérience que nous avons effectuée, bien que très partielle étant donné qu'elle a été conduite dans une seule classe, nous avons commencé à analyser cette problématique.

Pour le moment, nous pouvons observer que les élèves jouent volontiers avec les nombres et arrivent à faire des observations intéressantes sur les propriétés

[1] L'Unité des pythagoriens, la monade, était un point géométrique de dimension finie, un atome, et cette unité-monade se répartissait dans la nature suivant des modèles ordonnés, créant l'ordre naturel, l'univers.

d'une succession, qui les amènent à découvrir la règle pour augmenter la succession même (objectif intermédiaire de l'unité didactique).

Les élèves ne seraient pas arrivés spontanément à la formule $T = \frac{n}{2}(n+1)$; mais bien guidés ils y sont parvenus et nous croyons pouvoir affirmer qu'ils se sont surtout rendu compte de la «commodité» d'une telle formule, comme il est «pratique» de recourir à la formule pour trouver l'aire d'un rectangle sans devoir compter chaque fois les «carrés».

L'expérience

L'expérience a été conduite dans une classe de 1re année secondaire (7e) au cours de trois rencontres de deux heures chacune.

Les élèves étaient au nombre de 25 et l'expérience a été menée par moi-même avec la collaboration de Gemma Orru, enseignante de branches scientifiques de la classe, de deux autres enseignants de branches scientifiques de la même école et de l'enseignant d'éducation technique de la classe.

Les trois phases de l'expérience sont les suivantes:

1. Introduction à caractère historico-géographique:
   les pythagoriens: quand et où ont-ils agi?
2. Des quatre premiers nombres triangulaires représentés au moyen de points à $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$.
2. «Construction» de la formule$T = \frac{n}{2}(n+1)$.

Arrêtons-nous un instant sur les phases 2 et 3.

Phase 2

En classe, une discussion est lancée à partir de ces représentations géométriques:

Les remarques les plus fréquentes des élèves sont: «elles ressemblent à des triangles»; «les points forment des triangles».

Un moment après: «puis-je écrire un chiffre pour chaque figure: 1,2,3,5?»

A partir des remarques des élèves un chiffre s'associe à chaque représentation.

Etant donné qu'ils «forment des triangles» on leur donne le nom de *nombre triangulaires.*

Objection:

«1 est uniquement un point, ce n'est pas un triangle»

Discussion animée

«1 est un triangle très petit»;

«1 est un triangle très aplati».

Il subsiste un doute!

On demande de retranscrire les dessins sur le cahier.

Il y a difficulté à comprendre comment dessiner le «6» à partir du «3».

Quelqu'un préfère cette solution:

«parce que l'on peut partir du 3 et prolonger les côtés pour arriver à 6 et à 10»

«et comment construire les châteaux de papier?»

«Quel est le nombre triangulaire suivant le 10?»

Les tentatives pour trouver la réponse sont de type géométrique.

«De combien de points sera formé le nombre triangulaire suivant 15?»

«Et le suivant?»

Quelqu'un commence à dessiner. D'autres discutent et observent les figures déjà faites:

«Moi je m'amuse; je construis la figure et je compte»

«Je me fatigue à dessiner tous ces triangles»

«C'est un peu long!»

Une fillette dit:

«Etant donné qu'en partant de 1 pour arriver à 3 il faut deux points et que de 3 à 6 il en faut 3 et de 6 à 10 il en faut 4 ...;... on peut ainsi comprendre que les nombres triangulaires vont en escalier».

«Je ne comprends pas très bien ce que tu veux dire par: les nombres triangulaires vont en escaliers».

«En escalier, comme cela»:

1
1 et 2
1 et 2 et 3
1 et 2 et 3 et 4

Un autre enfant propose:

1
1+2
1+2+3
1+2+3+4

Et un autre:

1
1+2
1+2+3
1+2+3+4
1+2+3+4+5

«c'est plus rapide comme ça; avec les dessins c'est plus long!»

«Si avec T_1 on indique le premier nombre triangulaire (1), avec T_2 le deuxième (3), avec T_3 le troisième (6) et ainsi de suite, qui peut dire de combien de points est formé T_{20} ?»

Quelqu'un se précipite pour écrire: +1+2+3+4+5+6 ...

D'autres discutent.

Une fillette écrit:
$T_1 = 1$
$T_2 = 1+2$
$T_3 = 1+1+3$
$T_4 = 1+2+3+4$
$T_5 = 1+2+3+4+5$

J'ai compris

T_2 se termine par 2,
T_3 se termine par 3,
T_4 se termine par 4,
alors T_{20} se terminera par 20!

Un enfant dit:

«alors je peux savoir que T_{1000} finira par 1000!»

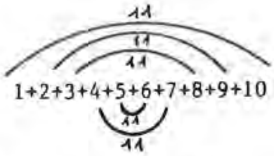
Chaque élève a donné son propre exemple: ils ont compris

Entre temps, un enfant a écrit:

«T_{10}: 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10; le total est-il toujours 11?»

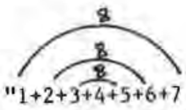
«Dans quel sens?»

Comme ça»



«Et si nous écrivons:

1+2+3+4+5+6+7 ?»



Mais il reste le 4!»

Discussion

A nouveau le même enfant:

«4 c'est la moitié de 8!»

Un autre: «tout le monde sait ça!»

«Je voulait dire: 4+4=8; attends... 4×2=8»

«moi, j'ai compris; c'est la moitié de 8»

«Retournons à T_{1000}.

T_{1000} = 1+2+3+ ensuite?

Comment pouvons-nous écrire?»

«T_{1000}: 1+2+3+4+5+6+ jusqu'à 1000»

«T_{1000} «1+2+3+4+5+6 ... 1000 ici il faut mettre +?»

Discussion

«Avant les autres numéros, il a +, donc je le mets également devant 1000!»

Il a été convaincant!

«Et si je veux écrire une somme analogue pour un nombre triangulaire quelconque?»

«Dois-je dire de quel nombre il s'agit? par exemple T_{30}!»

«Puis-je écrire $T_{\text{numéro quelconque}}$?»

«Ça va; mais c'est un peu long d'écrire de cette manière; essayons d'abréger!

Avec la lettre T nous avons indiqué un nombre triangulaire; avec la lettre n nous indiquons un nombre naturel quelconque; qu'en pensez-vous?»

«De cette manière c'est plus rapide!!!»

«Alors... $T_n = ?$»

Presque tous les élèves répondent correctement.

Il sera nécessaire de vérifier la compréhension effective dans d'autres mesures.

Phase 3

Je lance un défi:

«Avec un nombre triangulaire quelconque, voyons qui arrive à dire le premier de combien de points il est formé;

Je joue aussi!»

Une fillette propose le nombre triangulaire T_{30}.

Tous se précipitent pour écrire la succession et faire le total.

Moi, je dis: 465!

Ils me regardent perplexes:

«Vous calculez très rapidement!!!»

«Mais les totaux étaient si nombreux»

«Essayons encore»

«T_{28}»

«406»

«Je suis sûr qu'il y a un truc!»

«C'est vrai, il y a une méthode un peu plus rapide, ... plus facile pour arriver au résultat»

«Jouons encore ensemble».

Le résultat de l'activité qui suit est l'implication de toute une classe cherchant à exprimer le nombre 3 dans diverses formes pour pouvoir arriver à $T_2 = 3 = \frac{2}{2}(2+1)$.

Certes, écrire le nombre 3 sous la forme $\frac{2}{2}(2+1)$ est artificiel en soi; mais si l'on a l'habileté didactique de faire «jouer» les élèves avec le nombre 3, qui devient un héros et qui peut être exprimé dans toutes les formes qu'eux proposent, ce n'est plus artificiel.

Au cours du jeu, il y aura certainement quelques élèves qui proposeront les expressions $3 = 2+1$ et $3 = 1 \cdot 3$; de là on peut passer (comme l'a proposé l'enseignante qui participe au jeu) à:

$$3 = 1 \cdot (2+1).$$

Cette dernière sera l'une des multiples possibilités d'exprimer le nombre 3.

On joue ensuite avec le nombre 1, et l'on arrive à:

$$1 = 2:2 \text{ (ou } 1 = \frac{2}{2});$$

à ce niveau, on peut franchir le pas final:

$$3 = \frac{2}{2}(2+1).$$

On peut suivre le même chemin pour écrire le nombre triangulaire $T_4 = 10$ comme $\frac{4}{2}(4+1)$ et le nombre $T_6 = \frac{6}{2}(6+1)$ et ainsi de suite.

On travaille initialement avec les nombres triangulaires pairs T_2, T_4, T_6, T_8, ... pour ne pas introduire immédiatement une division à reste.

Retournons en classe:

«Nous avons écrit:

$$T_2 = \frac{2}{2}(2+1)$$

$$T_4 = \frac{4}{2}(4+1)$$

$$T_6 = \frac{6}{2}(6+1)$$

Comment pouvons-nous exprimer T_{20}?»

Discussion

«dans T_2 il y a $\frac{2}{2}$ et 2+1

dans T_4 il y a $\frac{4}{2}$ et 4+1

dans T_6 il y a $\frac{6}{2}$ et 6+1

On discute encore

Finalement quelqu'un écrit:

$$T_{20} = \frac{20}{2}(20+1);$$

les autres sont d'accord.

Pour m'en assurer, je demande que chacun donne un exemple.

Je demande ensuite: «comment peut-on écrire la formule

T_{1000}» ?

Tous écrivent immédiatement:

$$T_{1000} = \frac{1000}{2}(1000+1)$$

et calculent pour savoir de combien de points il est formé

«c'est rapide!!» observe un enfant.

«Voilà le truc!»

Cette phase est plutôt délicate, du fait que les élèves peuvent penser qu'à partir de chaque cas particulier on peut en déduire une règle générale. Il est donc important de présenter immédiatement un contre-exemple.

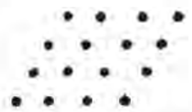
Si l'on considère l'ensemble 3,5,7,17,19 des nombres premiers, les élèves auraient tendance à identifier les nombres premiers aux nombres impairs.

En introduisant dans l'ensemble le nombre 9, qui est impair mais non premier, les élèves peuvent se rendre compte que la déduction initiale n'est pas confirmée.

A propos de la formule $T_n = \frac{n}{2}(n+1)$, nous l'avons rencontrée également en géométrie:

«Si l'on pose à côté d'un nombre triangulaire le même nombre triangulaire renversé,

on obtient un parallélogramme.



De combien de lignes le parallélogramme ci-dessus, est-il composé?»

«c'est simple, il est formé de 4 lignes»

«Combien de points y aura-t-il sur chaque ligne?»

Les enfants comptent:

«5»

«si je regarde la ligne du haut, il y a un point pour le premier triangle et 4 point pour le second».

«Je peux donc écrire 4+1»

«De combien de points le parallélogramme est-il formé?»

«de 4×5 point; c'est-à-dire de 20 points»

«de 4×(4+1) points».

«De combien de points un des deux triangles est-il formé?»

«assez compté!!!»

Certains discutent

«Si les points sont trop nombreux je me fatique à compter; cependant je peux trouver le nombre de points du parallélogramme comme je l'ai fait auparavant, après je sais qu'un triangle est la moitié d'un parallélogramme».

«Donc si le parallélogramme a comme dans la figure donnée $4 \times (4+1)$ points, combien de points a le triangle?»

«je dois diviser le nombre de points du parallélogramme par 2»

«Nous pouvons donc écrire

$$\frac{4 \times (4+1)}{2}$$

«Le même raisonnement est-il possible pour tout autre nombre triangulaire?»

Discussion

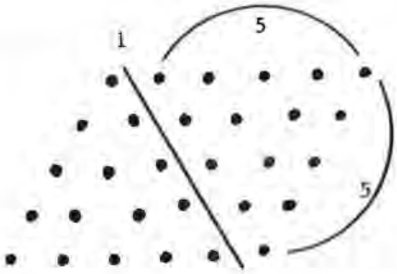
«Par exemple, un nombre triangulaire formé de 20 lignes, combien de points contient-il?»

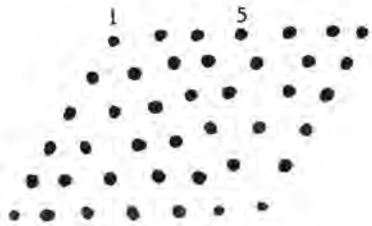
«je fais comme avant:

$$de\ \frac{20 \times (20+1)}{2}$$

A ce moment, nous nous sommes demandé si le principe était effectivement acquis et si la formule était employée automatiquement.

Les représentations géométriques de certains élèves nous amènent à choisir la première hypothèse. Quelques enfants ont, en effet, proposé des représentations comme celles-ci:





Pour conclure, nous pensons qu'il serait intéressant qu'une expérience du même type puisse être conduite dans des classes de réalité sociale différente de la nôtre et que les résultats puissent ensuite être confrontés et discutés.

J. A. 1211 GENEVE 6

TABLE DES MATIÈRES

Abonnements:

Suisse: F 15.—, Etranger F 17.—, CCP 12 - 4983. Paraît 5 fois par an. Service de la Recherche Pédagogique; 11, r. Sillem, CH 1207 Genève. (Tél. (022) 35 15 59).

Adresse: Math-Ecole; 11, rue Sillem, Ch-1207 Genève; CCP 12 - 4983

Imprimerie Fiorina, 1950 Sion