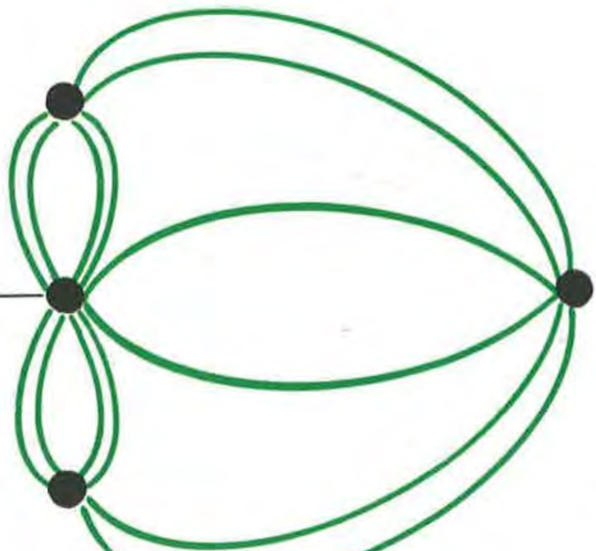
56



MATH ECOLE

JANVIER 1973

11e ANNÉE

Un choix exceptionnel de matériel didactique

Blocs d'attributs (Blocs logiques) en différentes exécutions.

Blocs multibases
Edition Dienes et édition en couleurs (se rapportant aux réglettes Cuisenaire).

Réglettes Cuisenaire

Balance algébrique

Matériel pour exercices ensemblistes:
gommettes, animaux miniatures en bois, jetons en carton, etc.

Logimath
Boîte à fiches perforées pour l'apprentissage de l'usage des fiches d'ordinateurs.

Matériel en papier velouté
pour l'emploi au tableau molleton.

Demandez nos prospectus spéciaux

Franz Schubiger, 8400 Winterthour
Mattenbachstrasse 2

MATH ECOLE 12e ANNÉE JANV. 1973 56

Objectifs

Tout le monde en parle. Et avec raison.
Benjamin S. Bloom de Chicago avec sa «*Taxonomie des objectifs pédagogiques*» [1] a, l'un des tout premiers, posé le problème et fourni des éléments de solution. D'autres, dont R.-F. Mager [2], ont suivi et, avec eux, les auteurs de «cours programmés».
L'élève apprenant doit savoir ce qui est attendu de lui, il doit connaître l'objectif qu'on se propose de lui faire atteindre. Il doit ensuite, après avoir fait l'effort d'apprendre, pouvoir évaluer son ouvrage en comparant ce qu'il a fait avec ce qui était attendu, avec l'objectif lui-même.
Cette manière de faire est résolument réaliste et efficace. On sait ce qu'il faut vouloir; on peut mettre au point les instruments du pouvoir; on peut enfin contrôler et corriger.
Dans cette perspective, «Math-Ecole» publie aujourd'hui deux textes. Le premier, de Y. Tourneur, de Mons, traite de la définition des objectifs et de sa valeur; il introduit la présentation d'un modèle élaboré aux USA.
Le second est le fruit du travail des sous-groupes «Objectifs de l'enseignement du français» et «Objectifs de l'enseignement mathématique» appartenant tous deux au *Conseil de la réforme et de la planification scolaires* du canton de Vaud. Leurs membres sont Mesdames Meyer et Renaud, Messieurs Bernet, Delessert, Gallay et Lipp. La publication de ce texte, considéré par leurs auteurs comme provisoire, a été autorisée par Monsieur Jean Mottaz, secrétaire général du DIP du canton de Vaud. «Math-Ecole» lui exprime sa gratitude.

S. R.

[1] Bloom (Benjamin S. et ses collaborateurs), «*Taxonomie des objectifs pédagogiques*», tome 1. Domaine cognitif. Traduit de l'américain par Marcel Lavallée, Education nouvelle, 342, Terrasse-St-Denis, Montréal, 1969.
Krathwohl (David R.), Bloom (Benjamin S.) et Masia (Bertram B.), «*Taxonomie des objectifs pédagogiques*», tome 2. Domaine affectif. Id., 1970.

[2] Mager (Robert F.), «*Comment définir des objectifs pédagogiques*», traduit et adapté par G. Décote, Paris, Gauthier-Villars, 1971.

Taxonomie des objectifs cognitifs en mathématique:

Etude du modèle de la «National Longitudinal Study of Mathematical Abilities» (NLSMA)

par Y. Tourneur, Fac. des Sc. Psychopédag., Univ. Mons

La définition des objectifs

Faut-il encore insister sur l'importance de la formulation des objectifs dans l'enseignement?
La question mérite d'être posée.
Toute action suppose des buts à atteindre. L'action éducative n'échappe pas à cette évidence. Et pourtant cette exigence fondamentale est rarement rencontrée dans la pratique pédagogique. Les raisons en sont multiples: insouciance des administrateurs à assurer une évaluation objective de rentabilité; référence insuffisante aux objectifs dans les plans d'étude qui sont presqu'exclusivement des relevés de matières à enseigner (les buts qui s'y trouvent explicités le sont en termes de déclarations d'intentions, de finalités générales et non d'actions éducatives directement réalisables et observables); recherches insuffisantes, des pays francophones du moins, dans le domaine de l'opérationalisation des objectifs spécifiques à chaque discipline, etc.
Nous voyons essentiellement deux apports de la formulation précise des objectifs.

A. Assurer la fidélité de la communication entre les administrateurs, le corps inspectoral et les enseignants

Les inspecteurs se plaignent volontiers de n'être pas compris par leurs maîtres. Les maîtres en retour se lamentent quelquefois de l'arbitraire des critiques qui leur sont adressées.
Le tout est de savoir ce que l'on veut. Par exemple, exige-t-on du maître qu'il transmette convenablement une information exacte qui concerne un programme imposé et identique pour tous *ou bien* souhaite-t-on que son enseignement mobilise les activités mentales supérieures (transfert, résolution de problèmes, créativité) et suscite des attitudes positives vis-à-vis de la discipline? Lesquelles? Sous quelles formes? A quel moment?
On s'aperçoit que déjà à ce stade de la réflexion, un choix s'impose qui n'est guère formulé explicitement dans les instructions transmises aux professeurs.

Le divorce existe à bien d'autres niveaux, notamment entre les objectifs (souvent implicites) visés par le corps inspectoral et les critères courants utilisés pour leur évaluation (tenue du journal de classe, du cahier de préparation; adéquation du matériel didactique; effet de halo produit par la personnalité du maître; organisation disciplinaire de la classe, etc.).
La communication des objets attendus, si elle ne résout pas tous les problèmes, permettrait de préciser ce que chacun attend de l'autre et éviterait les conflits hiérarchiques, si préjudiciables au moral des éducateurs quel que soit le niveau de leurs responsabilités.

B. Permettre une meilleure information des élèves sur les objectifs d'un cours

S'il n'est pas toujours possible que l'enseignant et ses élèves définissent ensemble leurs objectifs, il n'en reste pas moins nécessaire que les élèves connaissent sans ambiguïté ce que l'on attend d'eux.
Dans l'état actuel, l'élève et l'étudiant disposent de plusieurs sources divergentes d'informations sur les objectifs: le programme, les condisciples plus âgés, les questions d'examen.
L'examen constitue sans doute l'information la plus efficace. On peut cependant regretter que, située après l'apprentissage, cette information vienne trop tard à moins qu'elle ne permette, dans une perspective d'évaluation continue, une meilleure adaptation du travail des élèves aux exigences des évaluations ultérieures.
La transmission aux intéressés des objectifs précis et des instruments destinés à vérifier s'ils seront atteints doit évidemment se faire avant le départ de l'apprentissage. Elle contribue à développer l'initiative chez l'élève, le rend plus apte à juger lui-même ses performances, eu égard aux objectifs, et autorise les démarches personnelles auto-correctives avant même qu'elle ne s'imposent par un constat d'échec possible au test diagnostic.

Tiré de «*Mathematica & Paedagogica*», numéro 57, 1972, pp. 341-343.

Objectifs communs au français et à la mathématique

par Mmes Meyer et Renaud et MM. Bernet, Delessert, Gallay et Lipp

Introduction

Notre travail s'est borné aux objectifs de l'enseignement pour l'ensemble des degrés actuellement couverts par l'école enfantine, l'école primaire, le collège et le gymnase. Il nous a paru d'emblée qu'il fallait renoncer à donner une liste exhaustive des objectifs considérés. Certains d'entre eux, en effet, chevauchent les objectifs généraux de l'enseignement. D'autres ne se conçoivent bien qu'en relation avec une méthode d'enseignement. D'autres, enfin, plus limités, constituent déjà les éléments d'un programme.

Nous pensons qu'il est préférable d'esquisser une méthode permettant de classer les objectifs déjà formulés, de prospecter systématiquement et de classer à leur tour les objectifs qui n'ont pas encore trouvé de formulation explicite.

Pour classer les divers objectifs, il nous a semblé possible de nous placer à *quatre niveaux* successifs, passant graduellement des attitudes les plus fondamentales aux pouvoirs strictement techniques.

Les objectifs seront présentés niveau par niveau.

Pour chaque niveau, nous présentons d'abord les objectifs communs à l'enseignement du français et de la mathématique, puis, sur un même plan, les objectifs spécifiques de chacune de ces disciplines. A l'intérieur de chacune de ces classes, les objectifs sont proposés en vrac.

Les objectifs précédés d'un astérisque concernent les élèves qui se feront une spécialité professionnelle de l'usage des mathématiques, ou de l'activité littéraire.

Dans les douze rubriques résultant de l'ordonnance choisie, nous aimerions faire figurer:

— les objectifs principaux qu'on ne doit jamais oublier;
— certains objectifs secondaires, qu'on a parfois tendance à oublier;
— quelques objectifs qui gagnent à être présentés sous une forme un peu inhabituelle;
— des exemples susceptibles d'éclairer le contenu de la rubrique envisagée.

Objectifs

Niveau I: Attitude générale, comportement général

L'école doit:

Objectifs communs
— Apprendre à penser par soi-même.
— Donner envie d'y voir clair.

— Donner envie «de faire par soi-même».
— Donner envie de se corriger.
— Préparer à la recherche, à l'exécution en équipe.
— Ne pas éteindre la curiosité de l'enfant, ni son esprit d'initiative, d'invention, ni son imagination.
— Donner l'envie et le goût de communiquer.
— Donner à l'élève confiance en ses possibilités.

Objectifs spécifiques au français
* Susciter et développer chez ceux qui en sont capables l'envie et le goût de la création littéraire.
— Présenter la création littéraire sous toutes ses formes et donner accès au domaine de la littérature.
— Donner envie de lire et de connaître le domaine littéraire; de comprendre de grandes œuvres, de les interroger, de dialoguer avec elles; de lire et de connaître d'autres auteurs.

Objectifs spécifiques à la mathématique
— Permettre de situer la démarche mathématique parmi les démarches intellectuelles.
* Susciter et développer chez ceux qui en sont capables l'envie et le goût de faire des mathématiques.
* Donner aux futurs mathématiciens des informations sur l'activité du mathématicien.
* Faciliter le dialogue entre les usagers de la mathématique.

Niveau II: Prise de conscience de son activité mentale

L'élève doit s'exercer à:

Objectifs communs
— Décider, décider en connaissance de cause, ou malgré certaines lacunes d'information.
— Déterminer les présupposés, les a priori d'un discours, son domaine de validité.
— Choisir, choisir au mieux.
— Reconnaître qu'on peut, qu'on doit choisir, qu'on a choisi, qu'on se réserve de choisir.
— Prendre conscience de ses lacunes, d'un défaut d'information; reconnaître qu'il faut s'informer.
— Aller en quête d'informations, les organiser.
— Transmettre des informations, en vérifier la transmission.
— Déterminer un but, une succession de buts, un programme.
— Mémoriser pour un instant.
— Oublier à volonté.

— Rechercher une analogie, l'exploiter, ne pas en abuser.
— Observer et exploiter des rencontres imprévues.

Objectifs spécifiques au français
— Prendre conscience de divers niveaux de langues; de la spécificité de la langue écrite et de la langue orale; de la nécessité d'adapter son discours à son destinataire et à une situation donnée.
— Distinguer entre l'objet et son référant, entre «signifiant» et «signifié», entre langue et métalangue.
— Prendre conscience qu'on peut créer librement dans le domaine de l'expression.
— Constituer à volonté un vocabulaire cohérent.
— Faire passer ou non dans son discours l'expression de sa sensibilité.
— Prendre conscience des ressources offertes par l'usage d'un style personnel.

Objectifs spécifiques à la mathématique
— Adopter, consciemment une convention de langage, de figuration, d'omission ou d'identification.
— Choisir un code, en préciser la clé, l'essayer, le transmettre, l'adapter.
— Faire fonctionner un codage, en distinguant l'objet de son image dans le code.
— Changer de convention et de code.
— Choisir librement.
— Désigner un objet par une lettre.
— Créer à volonté un vocabulaire cohérent.
— Considérer la mathématique comme une fabrique de codages.
— Considérer la mathématique comme système d'autocodages.
— Observer que certains faits relèvent de conventions unanimes entre mathématiciens, que d'autres relèvent de l'initiative personnelle.

Niveau III: Acquisition de méthodes de pensée et d'action

L'élève doit apprendre à:

Objectifs communs
— Ordonner suivant un critère donné ou choisi.
— Classer suivant un critère donné ou choisi.
— Comparer suivant un critère donné ou choisi.
— Déduire suivant un critère donné ou choisi.
— Ordonner des déductions.
— Analyser les hypothèses implicites d'une déduction.
— Choisir des hypothèses pour une conclusion donnée.
— Imiter.
— Localiser une difficulté.
— Mémoriser.

— Observer.
— Décrire.
— Questionner.
— Imaginer des variantes.
— Enregistrer rapidement une information.
— Reconnaître qu'il y a une faute.
— Dépister une faute.
— Se placer à différents niveaux d'abstraction.
— Condenser un texte.
— Conduire un travail de longue haleine.

Objectifs spécifiques au français
— Créer, composer par analogie.
— Chercher méthodiquement la démarche la plus adéquate.
— Traduire en schémas.
— Consulter des ouvrages de référence.
— Assimiler rapidement une nouvelle définition.

Objectifs spécifiques à la mathématique
— Extrapoler.
— Inventer par analogie.
— Organiser des tentatives de solutions.
— Illustrer par des diagrammes.
— Consulter de la documentation mathématique.
— Assimiler rapidement une nouvelle définition.
* Supporter de longs développements mathématiques.
— Prendre un représentant dans une classe, ne pas oublier que c'est un représentant.
— Prévoir les changements impliqués par une modification de critère.
— Inférer le plausible.
— Constituer des stocks d'expériences.
— Soumettre une solution à l'expérience, à la vérification.
— Estimer le succès, apprécier l'adéquation.
* Imaginer un contre-exemple mathématique.

Niveau IV: Pouvoir technique

L'élève doit:

Objectifs communs
— Savoir écouter.
— Savoir parler.
— Savoir lire.
— Savoir écrire.
— Savoir expliquer.

— Etre capable de suivre un exposé fait par un autre que son maître.
— Garder en mémoire des faits utiles.
— Pouvoir s'assurer qu'un objet vérifie ou non une définition.
— Savoir définir.
— Savoir travailler seul.

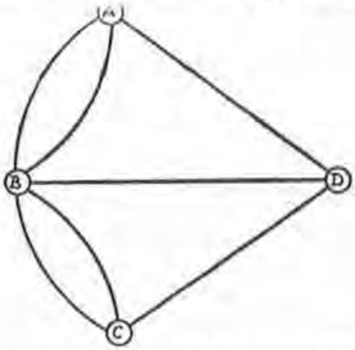
Objectifs spécifiques au français
— Savoir lire et utiliser un dictionnaire.
— Acquérir une élocution claire.
— Acquérir de l'aisance dans son expression orale.
— Acquérir la faculté d'improviser.
— Augmenter sa rapidité de lecture.
— Acquérir une orthographe correcte (pour les mots appartenant au français fondamental).
— Maîtriser les structures syntaxiques fondamentales.
— Acquérir un style personnel.

Objectifs spécifiques à la mathématique
— Savoir lire et utiliser diverses tables numériques.
— Acquérir le sens de l'espace.
— Assimiler la notion de repérage dans un ensemble.
— Exécuter divers schémas de calcul qui peuvent aller de l'addition des entiers à l'intégration d'une équation différentielle.
— Pouvoir effectuer des opérations de tête.
— Pouvoir utiliser divers codages mathématiques en vue de prévisions ou de descriptions portant sur des systèmes non mathématiques.
— Savoir évaluer, prévoir une incertitude.
— Pouvoir appliquer un théorème.
— Formuler un problème.
— Etre capable de présenter une solution.
— Etre informé de l'existence, des pouvoirs et des limites des ordinateurs.
— Savoir qu'il peut apprendre des mathématiques tout seul.
* Savoir faire une démonstration par récurrence.
* Pouvoir employer d'une manière cohérente quelques notions d'infini mathématique.
* Savoir reconnaître et employer la notion de «linéarité».
* Etre capable d'exposer un fait mathématique à un camarade moins bien informé.
* Admettre qu'on ne peut pas connaître toutes les mathématiques.

Qu'est-ce qu'un problème sans solution ?

par Georges Leresche,
professeur à l'Ecole des sciences sociales et politiques, Université de Lausanne

Dans un récent numéro de «Math-Ecole» [1], on trouvait, en dernière page, un commentaire du dessin de la couverture qui pouvait surprendre à plus d'un titre et qui avait presque valeur de contre-exemple au thème principal de ce numéro: «La mathématique et la langue».
Il y était question du célèbre problème des ponts de Koenigsberg: au XVIIIe siècle, cette ville était partagée, par la Spregel, en quatre quartiers distincts reliés par des ponts selon le schéma suivant, qu'on appelle un graphe:



Les *sommets* A, B, C, D représentent les quartiers, et les *arêtes*, les ponts, passages obligés pour aller d'un quartier à un autre. Lors de leur promenade dominicale, les bourgeois de Koenigsberg essayaient de faire un tour de ville qui les ramenât chez eux après avoir passé une fois exactement sur chaque pont. L'échec systématique de ces tentatives avait posé le problème de la possibilité de réaliser une telle performance. La question est donc simple: «Est-il possible de faire un tour de ville — sous-entendu: avec retour au point de départ, c'est-à-dire un *circuit* — empruntant une fois exactement chaque pont?».
En quoi cet énoncé, qu'aurait pu formuler textuellement l'homme de la rue, est-il un *problème*, qu'appellera-t-on *solution* d'un tel problème? Quelle importance y a-t-il à répondre clairement à ces questions:

a) sur le plan du langage scientifique;
b) sur le plan du langage commun (l'homme de la rue);
c) sur le plan de la pédagogie, voire de la psychologie?

Et tout d'abord, comment ce problème fut-il formulé et commenté dans «Math-Ecole»? Voici:

«... problème...: peut-on ou ne peut-on pas faire un tour dans la ville «de Koenigsberg qui permette de passer une fois exactement sur chaque «pont? Le problème, étudié par le mathématicien bâlois Euler, n'a pas «de solution. En revanche, il a une solution quand on se demande si on «peut passer deux fois exactement sur chaque pont...»

On remarquera d'abord la forme équivoque de la question double [2], que l'on devrait traduire logiquement par «est-il possible ou impossible de faire...», et à laquelle la réponse serait: «oui! il est possible ou impossible de faire un tour» etc.

Car en définitive, comme il n'y a qu'un nombre fini de façons de combiner les différentes traversées des ponts, une très brève expérimentation permettra de conclure soit qu'il est possible de faire un circuit selon les conditions prescrites, soit que c'est impossible; «il est possible de faire un tour de ville en passant une fois exactement sur chaque pont» est une proposition *décidable*, c'est-à-dire qu'elle est soit vraie, soit fausse.

Mais ce n'était, de toute évidence, pas ainsi qu'il fallait comprendre le texte cité, qui se voulait plutôt une succession de deux questions: «est-il possible de faire...?», suivie comme souvent dans la langue parlée, d'un surcroît d'interrogation: «ou bien est-ce impossible?». On est alors ramené à la formulation correcte, puisqu'il suffit de répondre à l'une des deux questions.

Il est clair que la formulation même d'un problème est importante pour l'interprétation correcte de la réponse. Sur le plan du langage scientifique, c'est évident: c'est plus évident encore sur le plan pédagogique.

On voit ici qu'*il y a un problème* parce qu'on énonce une proposition dont on ne sait, a priori, si elle est vraie ou fausse; on le fait sous forme d'une *question à réponse oui ou non* [3].

Mais on retiendra aussi qu'il y a deux manières essentiellement distinctes de formuler la question:

Q_1: est-il possible de...?
Q_2: est-il impossible de...?

Optons provisoirement pour la forme Q_1. Le commentaire poursuit: «Le problème... n'a pas de solution». Or Euler en a donné la solution en montrant que la réponse à la question Q_1 est *non*. Il y a donc divorce manifeste entre le langage scientifique et le langage de l'homme de la rue, voire du pédagogue, car c'est ici *la réponse négative* qui *est interprétée comme non-solution*. La suite du commentaire le montre bien: «en revanche...»; on modifie le problème [4] et, en gardant la même forme interrogative, la réponse est *oui*, d'où le «... il a une solution».

Il y a ici une *valorisation de la réponse oui* aux dépens du non, et sans doute aussi, une valorisation de la forme Q_1 aux dépens de Q_2. Y a-t-il au moins une raison valable de préférer Q_1 à Q_2? Certainement pas, car dans «le passage de la situation concrète à l'expression orale» ce qui doit être traduit, c'est l'échec de toute tentative de faire un circuit empruntant une fois chaque pont.

C'est la question Q_2 qui traduit le plus immédiatement l'expérience concrète. Et alors la réponse est *oui.*
Le scientifique, en principe, se garde de ces valorisations dont l'origine est peut-être psychologique. Mais il est capital que l'on s'en garde aussi dans une pédagogie active. Sur ce point, *il y aurait toute une réflexion à faire pour se dégager de schémas évidemment transmis, de génération en génération, par l'école.*
Cette remarque est une conclusion provisoire. Il me paraît intéressant d'examiner plus généralement ce qu'on appelle solution d'un problème.
En algèbre élémentaire, résoudre — dans **R**, par exemple — l'équation

(1) $x^2 + x - 2 = 0$

c'est trouver un certain ensemble, ici $\{-2 ; 1\}$ dont les éléments, substitués à x, donnent une identité. Par abus de langage, les nombres — 2 et 1 sont souvent appelés les solutions de l'équation. Le mathématicien parle plutôt des *racines* de l'équation. Ainsi, résoudre, dans **R** l'équation (1), c'est trouver *l'ensemble* des racines réelles. On remarquera qu'on se donne un référentiel, **R**, et que le problème est résolu dès qu'on a trouvé cet ensemble. Cet ensemble peut être vide — par exemple pour l'équation

(2) $x^2 + x + 2 = 0$

C'est de nouveau un abus de langage que de dire que, dans **R**, l'équation (2) n'a pas de solutions. En réalité, on a résolu le problème dès qu'on a montré que l'ensemble des racines est vide.
On apporte donc la réponse non à la question «L'équation (2) a-t-elle des racines dans **R**?» et on argumente, en s'appuyant sur la théorie existante des nombres réels, pour convaincre de la validité de cette réponse. Finalement, c'est dans cette argumentation que réside l'intérêt de la solution, et non dans le fait que la réponse soit ou non affirmative.
On le voit, il n'y a pas que dans le commentaire de tout à l'heure qu'il y a ambiguïté sur l'usage du mot solution.
Essayons alors de voir ce que pourrait être un problème qui n'aurait pas de solution. Nous partirons de trois exemples célèbres.

Exemple 1. Un ensemble E est dit infini dénombrable s'il est isomorphe à l'ensemble **N** des entiers naturels (c'est-à-dire s'il existe une application bijective de **N** sur E). L'ensemble des nombres réels, **R** n'est pas dénombrable. On dit qu'il a la puissance du continu, et de même pour tout ensemble isomorphe à l'ensemble **R**. On peut ordonner les différentes puissances d'infini.
Problème: existe-t-il, dans ce contexte, une puissance intermédiaire à celles de **N** et de **R**? Ce problème a été résolu il y a une dizaine d'années [5]: dans la théorie mathématique existante, la réponse est: ni oui, ni non! Plus précisément: sans contradiction avec la théorie existante, on peut introduire comme nouvel axiome soit qu'il existe une puissance intermédiaire entre l'infini dénombrable et le continu, soit qu'il n'en existe pas.
Exemple 2. Le grand théorème de Fermat dit: pour tout entier naturel $n \geq 3$, l'équation

$$x^n + y^n = z^n$$

n'a pas de racines entières strictement positives.
Les travaux considérables faits depuis trois siècles conduisent à penser que cette proposition est vraie — mais aucune démonstration n'en a encore pu être faite!
Ainsi on suppose qu'ici la proposition est décidable, qu'elle est vraie, mais le problème *n'a pas encore de solution!*

Exemple 3. Peut-on résoudre une équation algébrique de degré quelconque par radicaux (c'est-à-dire, intuitivement, par des méthodes algébriques analogues à celles mises en œuvre pour les équations du 2e degré)? La réponse est *non,* dès que le degré de l'équation est supérieur à 4, et c'est là une solution, d'ailleurs admirable par les méthodes de démonstration qu'elle met en œuvre. Remarquons que la forme de la question («est-il possible...») est ici suggérée par les résultats positifs obtenus successivement en degré deux, puis trois, puis quatre.

De ces trois exemples, nous retiendrons:

1. Un problème est une question posée dans le référentiel d'une théorie existante. La réponse peut avoir plusieurs «valeurs»: oui, non, indécidable, on ne sait pas à l'heure actuelle, voire même: ça dépend: (J'ai entendu R. Thom, dans un exposé, énoncer une proposition et déclarer: «il y a un contre-exemple, mais c'est un théorème!» Il y avait une pointe d'humour dans cette déclaration, sans doute aussi une prise de position implicite contre la rigueur-à-tout-prix, aux dépens de l'ouverture vers de nouvelles voies de recherche ou de nouveaux problèmes).
2. Il y a solution lorsqu'on a établi que la proposition est décidable, et qu'on en a trouvé la réponse — le oui et le non *ayant la même valeur affective* — ce qui suppose une argumentation, une démonstration.
3. Il y a aussi solution lorsqu'on a montré que la proposition est indécidable dans la théorie existante, ce qui conduit à étendre la théorie.

Finalement, pour le scientifique comme pour le pédagogue, *une attitude ouverte est indispensable.* On ne peut valoriser un type de formulations aux dépens d'un autre, ou un type de réponse par rapport à un autre. La formulation d'un problème doit rester proche de l'expérience qui l'inspire. Sinon on projette une connaissance abstraite, reformulée et rapidement dogmatique, qui stérilise l'esprit de recherche.

[1] «*Math-Ecole*» numéro 54 (sept. 1972): «La mathématique et la langue».
[2] Cette formulation est d'ailleurs reprise de l'article «La topologie à l'école primaire», «*Math-Ecole*» numéro 44 (sept. 1970), p. 10.
[3] Nous avons ainsi une définition implicite de ce qu'est un problème, et on pourrait montrer que cette définition est générale: un problème peut être formulé par une suite de questions à réponse oui-non.
[4] Les nouvelles conditions du problème sont d'ailleurs incomplètes, ce qui enlève beaucoup d'intérêt à la question.
[5] *P. Cohen:* The independance of the continuum hypothesis. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50 (1963) et 51 (1954).

La construction du nombre à virgule

par Raymond Hutin; Service de la recherche pédagogique, Genève

1. Le nombre à virgule

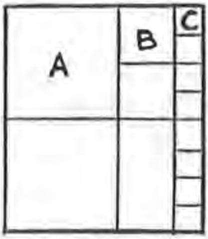
L'approche du nombre à virgule constitue un prolongement direct des activités numériques en différentes bases et des jeux sur les échanges. La notion de virgule est étroitement liée à l'idée de mesure. Il s'agit donc de faire prendre conscience à l'enfant que, dans toute mesure, le choix de l'unité est effectué de manière arbitraire et résulte d'une convention. Dans cette perspective, la virgule apparaît comme un instrument de codage particulier permettant de désigner l'unité de mesure initiale.

Prenons un exemple dans le système décimal: la même mesure de longueur peut s'exprimer, selon l'unité choisie:

— en m	1,245
— en dm	12,45
— en cm	124,5
— en mm	1245

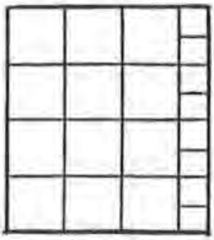
Dans le même esprit, la mesure d'une surface peut s'effectuer au moyen d'unités de mesure carrées.

I



A B C
2 4 8

II



A B C
12 8

III

A B C
56

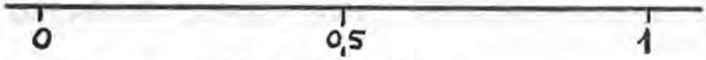
Par un échange permettant d'obtenir le moins de pièces possible, chaque figure équivaut à 3 A et 2 B.

Le choix d'une écriture de mesure arbitraire permet différents types d'écriture.

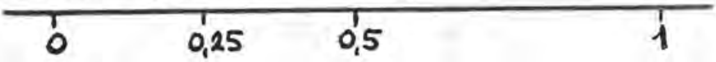
L'unité choisie est:

		A	B	C	
— A		3,	2	0	
— B		3	2,	0	
— C		3	2	0	
¼ de C		3	2	0	0
le quadruple de A	0,	3	2	0	
etc.					

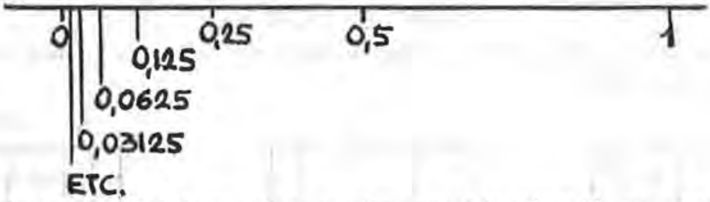
Jusqu'ici, la virgule n'apporte pas autre chose qu'une manière différente de coder les nombres entiers. On pourrait très bien imaginer que, dans toute mesure, l'unité choisie soit toujours la plus petite possible, ce qui supprimerait la nécessité d'utiliser une virgule.
Les premières séries de recherches et d'exercices auront pour objectif l'assimilation de ce nouveau type de codage et la compréhension de son caractère arbitraire.
Cependant, nous ne pouvons nous limiter à ce seul aspect du nombre à virgule qui doit aussi être envisagé dans la perspective d'une approche des nombres réels. Un exemple permettra de mieux préciser les choses: la désignation des points d'une ligne.
Appelons 0 et 1 les deux extrémités d'un segment de droite. En base dix, le point médian se notera 0,5.



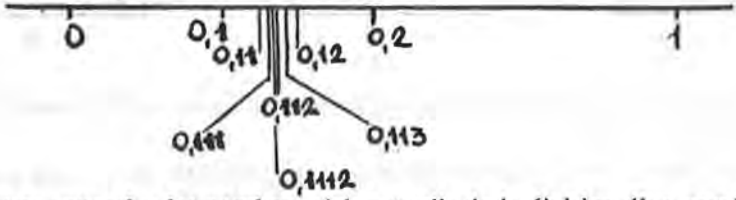
Plaçons un nouveau point médian entre 0 et 0,5



Répétons plusieurs fois cette opération.



Il est évident que, entre deux points aussi rapprochés soient-ils, on pourra toujours placer un nouveau point et que le nombre des décimales sera de plus en plus grand.
La même situation apparaît dans une base autre que dix.
Exemple: Base quatre.



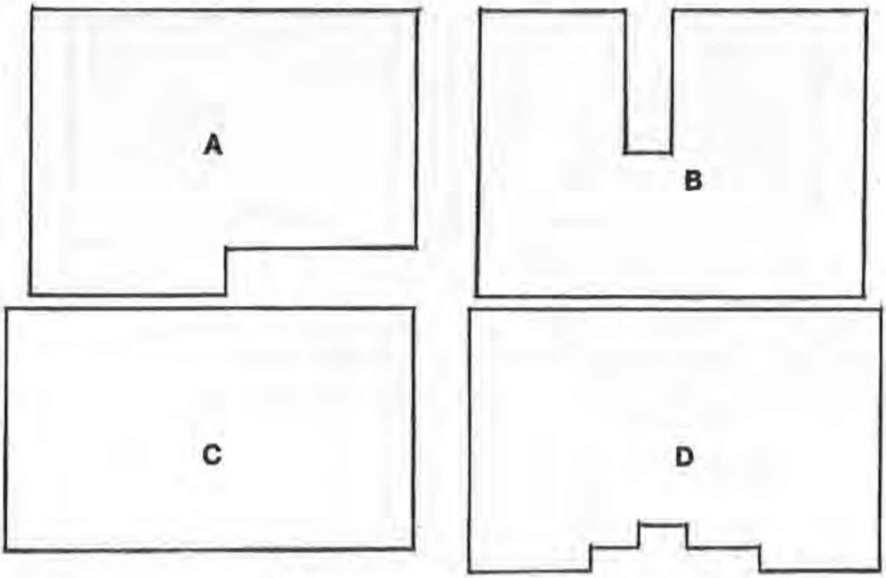
Une autre approche des nombres réels est celle de la division d'un nombre par un autre. Le quotient exact d'un nombre entier par un nombre entier n'est pas toujours un nombre fini.

Exemples:
10 : 3 = 3,333 . . .
23 : 7 = 3,28571428 . . .

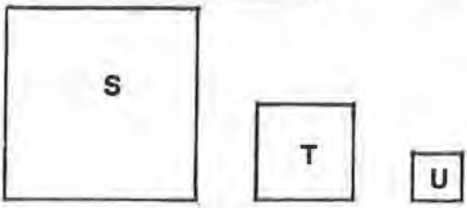
Sans négliger cette seconde approche qui fera l'objet d'exercices intéressants en sixième année, c'est surtout sur la première, liée à la notion de mesure, que l'on s'attardera en cinquième année.

2. Approche de la virgule par la mesure de surfaces

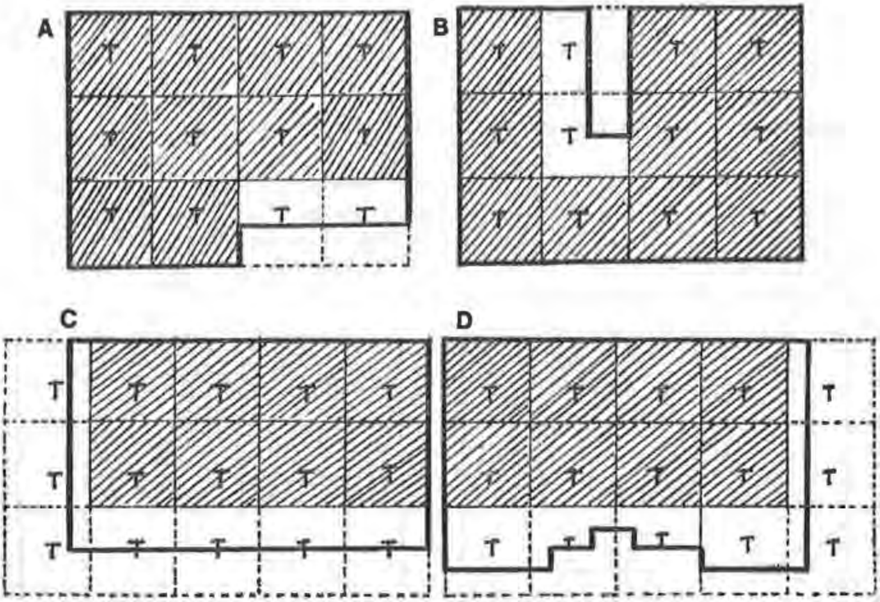
Il existe de nombreux moyens d'effectuer la mesure de surfaces en utilisant des figures qui se regroupent selon différentes bases. Nous choisirons un exemple utilisant la base quatre. Les enfants, répartis en petits groupes de travail, reçoivent le dessin de quatre figures A, B, C et D. Celles-ci sont à mesurer avec des éléments de trois tailles différentes: S, T et U.



Unités de mesure:



On commence par faire évaluer la dimension des figures. Sans mesurer, laquelle semble la plus grande, la plus petite?
Après avoir constaté la difficulté de donner une réponse à cette question, on propose aux enfants de mesurer ces figures, par excès et par défaut, au moyen des unités T.



L'aire de A vaut plus de 10 T mais moins de 12 T
L'aire de B vaut plus de 10 T mais moins de 12 T
L'aire de C vaut plus de 8 T mais moins de 15 T
L'aire de D vaut plus de 8 T mais moins de 15 T

Autre notation:

$$10\ T < \text{Aire de A} < 12\ T$$
$$10\ T < \text{Aire de B} < 12\ T$$
$$8\ T < \text{Aire de C} < 15\ T$$
$$8\ T < \text{Aire de D} < 15\ T$$

Les informations recueillies ne permettent pas encore de déterminer quelle est la figure la plus grande. Les élèves vont utiliser les éléments U pour tenter de préciser la mesure.

Sans difficulté (il sera peut-être utile, pour faciliter la tâche des enfants un peu maladroits de coller les pièces au fur et à mesure), on obtiendra:

Aire de A = 10 T; 4 U
Aire de B = 10 T; 5 U

La notion d'échange intervenant pour diminuer le nombre des pièces, on arrivera à:

Aire de A = 2 S; 3 T; 0 U
Aire de B = 2 S; 3 T; 1 U

B est donc plus grande que A.

Un nouveau problème surgit à propos de C et de D. Les éléments U sont trop grands pour que l'on puisse obtenir une mesure exacte. Dans ces tâtonnements, l'enfant sera amené à découper les unités U en 4 parties égales pour obtenir de nouvelles unités plus petites. Appelons-les V. On obtient:

Aire de C	=	8 T; 8 U; 10 V	=	2 S; 2 T; 2 U; 2 V
Aire de D	=	8 T; 6 U; 26 V	=	2 S; 3 T; 0 U; 2 V

Nous pouvons maintenant récapituler l'information obtenue et introduire la virgule pour séparer les pièces que nous avions au départ de celles qui ont été obtenues par découpage.

	S	T	U	V
Aire de A	2	3	0	
Aire de B	2	3	1	
Aire de C	2	2	2,	2
Aire de D	2	3	0,	2

Dans une autre leçon, le même travail sera effectué en ne fournissant que les unités S et T. Les élèves devront donc faire plus de découpage et, si les figures sont les mêmes, ils obtiendront:

Aire de A	2	3		
Aire de B	2	3,	1	
Aire de C	2	2,	2	2
Aire de D	2	3,	0	2

La répétition de ce genre d'activité dans des bases diverses permettra de faire bien comprendre le rôle de la virgule.

3. La numération d'une liste de mots

Voici une autre manière de préparer l'idée de nombre à virgule. Le travail commence en leçon collective et peut se poursuivre en activité de groupe ou individuelle.
Une liste de mots, par exemple des noms d'animaux, est inscrite au tableau noir. Il s'agit de les numéroter dans l'ordre alphabétique et selon une certaine base de numération. Choisissons la base trois.

1. aigle
2. baleine
10. canard
11. dromadaire

12. écrevisse
20. lapin
21. marmotte
22. panthère
100. zèbre

On demande ensuite aux enfants de trouver de nouveaux noms d'animaux:

âne, chat, cheval, éléphant.

Comment les intercaler dans la liste sans modifier la numération initiale?

1.	aigle		
		1,1	âne
2.	baleine		
10.	canard		
		10,1	chat
		10,2	cheval
11.	dromadaire		
12.	écrevisse		
		12,1	éléphant
20.	lapin		
	etc.		

Peut-on trouver d'autres noms d'animaux pour que la numération soit régulière?

1.	aigle		
		1,1	âne
		1,2	...
2.	baleine		
		2,1	...
		2,2	...
10.	canard		
		10,1	chat
		10,2	cheval
11.	dromadaire		
		11,1	...
		11,2	...
12.	écrevisse		
		12,1	éléphant
		12,2	...
20.	lapin		
		20,1	...
			etc.

Ce système de numération permet-il de placer un nom entre chat et cheval?

— Bien sûr! 10,11 chaton (ou 10,12).

Reprenons le même jeu en base dix:

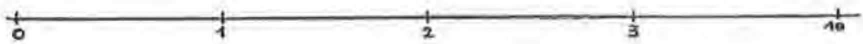
1. aigle
   - 1,1 âne
   - 1,2 ânesse
   - 1,3 anguille
   - 1,4 antilope
   - 1,5 ara
   - 1,6 araignée
   - 1,7 . . .
   - 1,8 . . .
   - 1,9 . . .
2. baleine
   - 2,1 baudroie
   - 2,2 bélier
   - etc.

Est-ce possible d'ajouter à notre liste le mot «bécasse»? Il portera le numéro 2,11.

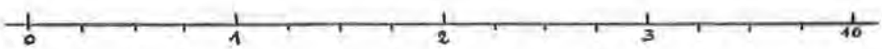
— Le mot alouette? Attention, il sera numéroté 1,01 (une discussion approfondie sera nécessaire pour faire comprendre l'impossibilité d'une autre écriture). Et le mot «abeille»? (toute écriture commençant par 0, . . . pourra être acceptée).

4. Le codage des points d'une ligne

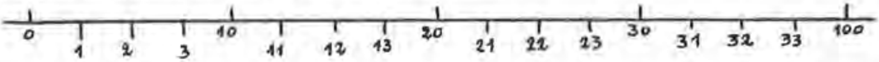
Prenons, comme point de départ, une ligne dont quelques points sont codés en base quatre.



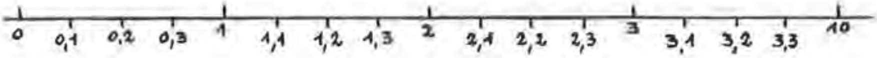
Les élèves proposeront peut-être de transformer l'ancienne unité et de la considérer comme un groupement, ce qui constitue une excellente réponse.



Le segment est divisé en quatre parties égales. Peut-on diviser chacune de ces parties en quatre et coder les nouveaux points?



On pourra cependant leur faire remarquer que, si le codage est correct, l'unité de base n'est plus la même, d'où la nécessité d'une nouvelle écriture qui permet de conserver cette unité.

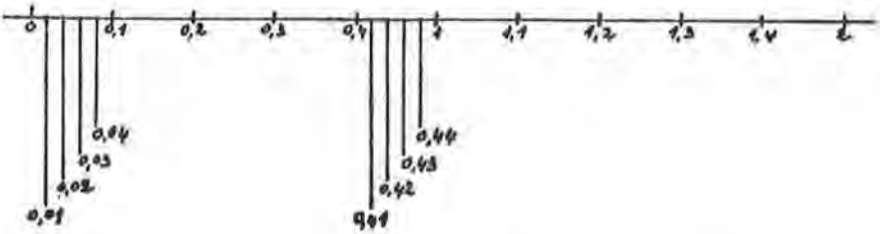


A partir de ce codage, l'égalité des notations 1 et 1,0 — 2 et 2,0 — etc. pourra être mise en évidence.

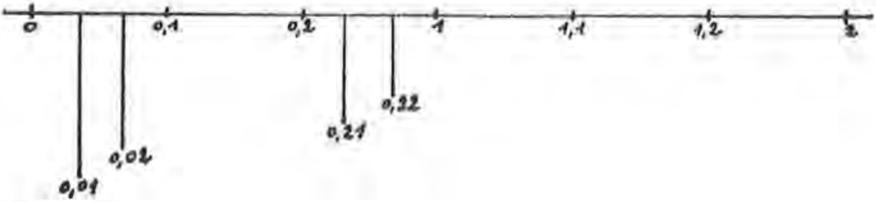
Plusieurs recherches du même type, dans des bases différentes, feront prendre conscience de la relation entre la base de numération et les possibilités de division du segment.

Exemples:

Base cinq



Base trois



Base dix

5. La division dans un jeu d'échange

Le partage d'une collection en plusieurs sous-collections selon une certaine règle d'échange donne encore un moyen de faire apparaître la notion de virgule. Deux exemples permettront d'en comprendre la raison.

a) Règle d'échange à base cinq.

> Un disque vaut cinq triangles
> Un triangle vaut cinq carrés.

La collection initiale comprend 2 disques et 4 triangles. On désire la partager en 7 parties égales.

2 4 0 : 7 =

2 0

```
2  4  0
 └►10
   14
```

La collection initiale comprend 2 disques et 3 triangles.

2 3 0, : 7 =

1 4, 1 2

```
2  3  0,
 └►10
   13
 — 7
   6
    └►30
    — 28
       2
        └►10
        —  7
           3
            └►15
            — 14
               1
```

etc.

La division euclidienne est achevée. Il reste 2 carrés.
Pour continuer, il faut choisir de nouvelles pièces. Ce choix est marqué par la virgule.

b) Règle d'échange à base dix.

```
2  3   0,  ........           : 7
                              ---------------------------
                                3  2, 8  5  7  1  4  ...
 ↳20
  23
— 21
   2
   ↳20
    14
     6
     ↳60
    — 56
        4
        ↳40
       — 35
           5
           ↳50
          — 49
              1
              ↳10
             —  7
                 3
                 ↳30
                — 28
                    2 ←—— Est-il nécessaire de poursuivre?
                    ↳...  Quels seront les chiffres suivants
                          du quotient?
```

6. Les opérations arithmétiques sur les nombres à virgule

Lorsque les activités décrites ci-dessus auront fait l'objet d'un nombre suffisant d'exercices, le passage des opérations sur les nombres entiers aux opérations sur les nombres à virgule pourra s'effectuer sans difficulté. La question de la division a déjà été abordée.
L'enfant comprendra aisément que, dans l'addition et la soustraction, la présence de la virgule ne change rien au mode de calcul.
Il reste donc à envisager un cas plus difficile, la multiplication de deux nombres à virgule l'un par l'autre. Cette opération peut donner lieu à une recherche intéressante dans le domaine de la mesure des surfaces.

Exemple:

$4 \times 2 = 8$

$4{,}5 \times 2 =$
$(4 \times 2) + (0{,}5 \times 2)$

$4{,}5 \times 2{,}5 =$
$(4 \times 2) + (0{,}5 \times 2) + (0{,}5 \times 4) + (0{,}5 \times 0{,}5)$

Cependant, le problème peut être abordé plus simplement en faisant appel à la notion d'encadrement.

$4 < 4{,}5 < 5$ $\qquad$ $2 < 2{,}5 < 3$
$4 \times 2 = 8$ $\qquad$ $5 \times 3 = 15$
$45 \times 25 = 1125$

Le produit de 4,5 par 2,5 est plus grand que 8 et plus petit que 15. Donc ce produit ne peut être que 11,25

Table de multiplication

par G. Charrière, Service de la recherche pédagogique, Genève

«Deux et deux quatre
quatre et quatre huit
huit et huit font seize...
Répétez! dit le maître
Deux et deux quatre
quatre et quatre huit
huit et huit font seize.
Mais voilà l'oiseau-lyre
qui passe dans le ciel
l'enfant le voit
l'enfant l'entend
l'enfant l'appelle:
Sauve-moi
joue avec moi
oiseau!
...................»

(Page d'écriture,
Jacques Prévert, Paroles).

La possession de la table de multiplication est une nécessité. Pendant longtemps, on s'est contenté de faire réciter la trop célèbre litanie: «une fois deux, deux; deux fois deux, quatre; trois fois deux, six; ... etc.».
S'il est vrai que la plupart d'entre nous a appris «son livret» par cette méthode et est encore capable de l'utiliser, il faut bien reconnaître que pour beaucoup, la simple recherche d'un produit ou des facteurs d'un produit donné a consisté, pendant longtemps, à se réciter mentalement toute une strophe de la litanie. Ainsi pour trouver, par exemple, combien font 7 fois 3, il fallait revenir à la famille de produits (table des trois) «une fois trois, trois; deux fois trois, six; ...» et arriver à y situer le «7 fois 3» demandé.
C'est, croyons-nous, un grand progrès que de pouvoir associer directement à deux facteurs donnés leur produit, ou de pouvoir imaginer les facteurs possibles d'un produit donné.
Ce but était, il est vrai, souvent atteint traditionnellement; mais au prix d'un énorme travail de répétition («drill») fastidieux et trop souvent inefficace.
Nous nous proposons d'arriver au même but d'une manière plus agréable (jeu) et peut-être pédagogiquement plus valable, puisque ce sera par la découverte (concrètement) de certaines propriétés arithmétiques (et aussi esthétiques!) du tableau de Pythagore, propriétés qui permettront de simplifier le calcul mental.

Le tableau de Pythagore

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

Le tableau de Pythagore se présente sous la forme d'un carré comprenant 9 colonnes et 9 lignes, sans aucun autre nombre que les facteurs.
On a ainsi 81 cases, dont 9 sont grises (hachures).

N.B. — Le choix de 9 × 9 (et non 12 × 12 par exemple) est évident!

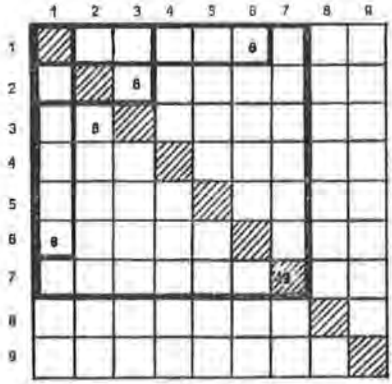
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Nous disposons de 81 cartons sur lesquels se trouvent inscrits les produits.

On peut remarquer que:

5 produits	(6, 8, 12, 18, 24)	se présentent quatre fois	:	20 cartons
4 produits	(4, 9, 16, 36)	se présentent trois fois	:	12 cartons
22 produits	(2, 3, 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 27, 28, 30, 32, 35, 40, 42, 45, 48, 54, 56, 63, 72)	se présentent deux fois	:	44 cartons
5 produits	(1, 25, 49, 64, 81)	se présentent une fois	:	5 cartons

d'où 36 produits répartis sur 81 cartons



Où peut-on placer le carton $\boxed{6}$?

— Ici! car 2 fois 3 font 6; mais aussi là, car 1 fois 6 fait 6, et encore...

On constate, et c'est là une vérification facile et utile, que 6 est le nombre de cases du rectangle délimité par la ligne 2 et la colonne 3, etc.

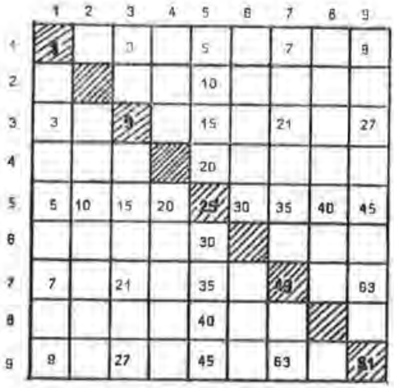
Et le $\boxed{49}$?

Un très bon exercice consiste à placer dix cartons, puis vingt et davantage, en finissant par les nombres les plus élevés.

Les directives peuvent changer: par exemple, placer tous les produits qui se terminent par un *zéro*.

Ou bien, tous les produits *impairs* (on remarquera qu'il y a beaucoup moins de produits impairs que de produits pairs; pourquoi?).

Ou encore, tous les produits se terminant par un 2; un 8; un 5; etc.

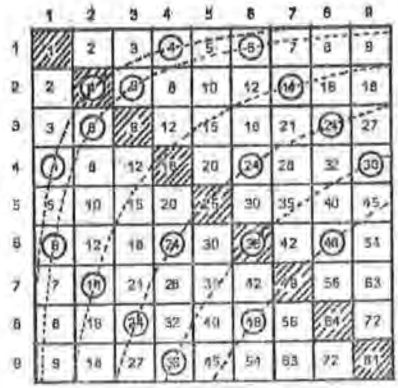


Des exercices de ce type permettront petit à petit de remarquer des propriétés arithmétiques qui ne sont certainement pas dénuées d'intérêt. D'autre part, la symétrie permet un contrôle toujours facile.

On arrivera, peu à peu, à observer la répartition en hyperbole des produits. En effet, les 4 cases où l'on peut poser le carton $\boxed{6}$ se trouvent sur une hyperbole ($x \cdot y = 6$). Il en est de même des 3 cases valant $\boxed{36}$

des 2 cases valant $\boxed{48}$

etc.



En cherchant la place d'un produit, le regard décrit naturellement une de ces hyperboles.

On remarquera que tous les produits situés au-dessus (à gauche) de la «ligne 24», par exemple, sont inférieurs à 24, et ceux qui sont situés au-dessous (à droite) sont supérieurs à 24. On entrevoit dans cette activité une approche de la division.

Avouons que la recherche et la découverte des nombreuses propriétés du tableau de Pythagore sont des activités qui, sans aucun doute, nous ont familiarisé avec les «tables de multiplication»...
Pourquoi ne pas en profiter pour jouer un peu?

Jeux individuels ou à plusieurs

Reprenons le tableau et les 81 cartons-produits retournés et bien mêlées (ils constituent le talon).

«Jeu solitaire»: Prenons dans le talon 40 cartons au hasard. Choisissons dans le talon, un carton supplémentaire et plaçons-le dans une case convenable du tableau. A partir de ce carton, il faut essayer de placer les autres (les 40 choisis) sur le tableau, en les posant un à un dans une case *libre adjacente* à une case déjà occupée (2 cases sont adjacentes si elles se touchent par un bord). Le fait de remplir une case grise («carré parfait») (ou deux, ou trois...) donne droit de remettre, à la fin de la partie, un carton (ou deux, ou trois...) dans le talon.
Le but du jeu est, bien évidemment, de se défaire de ses 40 cartons. Essayez!

«Jeu à plusieurs»: On place sur le tableau, trois cartons pris au hasard dans le talon. Puis chaque joueur (un «joueur» pouvant être un groupe d'élèves qui collaborent) reçoit:

15 cartons s'il y a 2 joueurs
10 cartons s'il y a 3 joueurs
8 cartons s'il y a 4 joueurs
6 cartons s'il y a 5 joueurs

Les joueurs placent, à tour de rôle, un de leurs cartons sur une case *libre adjacente* à une case déjà occupée. Le fait de remplir une case grise («carré parfait») donne le droit de remettre immédiatement un carton de son jeu dans

le talon. Si l'on ne peut rien poser sur le tableau, on doit puiser un carton dans le talon et passer son tour.
Le gagnant est celui qui, le premier, s'est défait de tous ses cartons.

Ce jeu [1], simpliste en apparence, est d'une richesse (stratégie, probabilité...) que nous laisserons découvrir aux joueurs eux-mêmes!...

En effet, on peut se demander, par exemple:
— que doit-on faire si l'on a un des cartons 1, 25, 49, 64, 81? Faut-il le jouer dès que possible?
— Et le carton 24?
— Quelles sont les cases les plus favorables?

Autre propriété intéressante

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1		3						9
2		4		8				16	
3	3		9		15		21		
4		8		16		24			
5			15		25		35		
6				24		36		48	
7			21		35		49		63
8		16				48		64	
9	9						63		81

On peut aussi se demander pourquoi les deux cases situées au NE et au SO d'une case de la diagonale (carré parfait) «valent» exactement ce carré parfait moins un.
La superficie d'un carré de côté x vaut x^2; si l'on augmente la dimension d'une unité dans un sens et l'on diminue d'une unité dans l'autre sens, la superficie du rectangle obtenu vaut
$(x + 1)(x - 1)$, c'est-à-dire $x^2 - 1$!
Si, au lieu d'une unité, on en considère y, on obtiendra $(x + y)(x - y)$, c'est-à-dire $x^2 - y^2$.

Or dans une telle opération, le périmètre, lui, n'a pas changé; on en conclut que de tous les rectangles ayant même périmètre, le carré est celui dont la surface est maximum.

Exemple:

$x = 5$ $\quad x^2 = 25 \quad (x + y)(x - y) = 24$

$y = 1$ $\quad$ différence: y^2

$x = 5$ $\quad x^2 = 25 \quad (x + y)(x - y) = 16$

$y = 3$ $\quad$ différence: y^2

[1] Inspiré de «Le jeu de Pythagore», C. Rosset, Education 9.12.71.

Nouveau!
Blocs Schubi en Bois

Blocs d'attributs, édition moyenne de 48 éléments

Prix modique pour l'école

La boîte complète avec ravier	**Fr. 13.—**
à partir de 30 boîtes	Fr. 12.—
à partir de 100 boîtes	Fr. 11.—

Je commande .... boîtes de «Blocs Schubi», en bois, édition moyenne

Envoi à: Facture à:

Nom: ....

Adresse: ....

No postal, lieu: ....

Franz Schubiger

Mattenbachstrasse 2, 8400 Winterthur

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

«Mathématique première année» peut être obtenu auprès de l'Office romand des éditions et du matériel scolaires: rue des Tunnels 1, Ch. 2006 Neuchâtel.

— Livre de l'élève Fr. 7.60
— Livre du maître Fr. 9.50

SOMMAIRE

Objectifs, *S. R.* 1
Taxonome des objectifs cognitifs en mathématique, *Y. Tourneur* . . . 2
Objectifs communs au français et à la mathématique,
Mmes Meyer, Renaud, MM. Bernet, et al. 4
Qu'est-ce qu'un problème sans solution? *prof. G. Leresche* 9
La construction du nombre à virgule, *R. Hutin* 13
Table de multiplication, *G. Charrière* 24

Comité de rédaction:
Mlle A. Grin, MM. B. Beauverd, L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame, D. Froidcœur, G. Guélat, R. Hutin, F. Oberson, L. Pauli, S. Roller, rédacteur.

Abonnements:
Suisse F 7.—, Etranger F 8.-, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel (038 / 24 41 91).

Adresse de Math-Ecole: 43, fbg de l'Hôpital, 2000 Neuchâtel